Numerične metode-fiziki, REŠITVE, 19.6.2013

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Uporabljate lahko pisalo, kalkulator in literaturo!

1	2	3	4	Σ

Ime in priimek

Vpisna številka

Naloga 1 [25 točk]

Izračunajte LU razcep z delnim pivotiranjem za matriko

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Natančneje, določite zgornjo trikotno matriko U, spodnjo trikotno matriko L z enicami po diagonali in permutacijsko matriko P, da bo $P\,A = L\,U$.

Rešitev: Na prvem koraku zamenjamo prvo in zadnjo vrstico (menjave sproti izvajamo v matriki P, ki je na začetku identiteta) in naredimo eliminacije v prvem stolpcu. Dobimo matriko

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1/2 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Na drugem koraku zamenjamo drugo in tretjo vrstico in naredimo eliminacije v preostanku drugega stolpca. Dobimo

$$A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & -4/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Na tretjem koraku pivotiranje ni potrebno. Izvedemo samo eliminacijo preostale enke v tretjem stolpcu. Dobimo

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & -4/3 & 1 \\ 0 & 0 & -3/4 & -5/4 \end{pmatrix}.$$

Matrika L je sedaj spodnji trikotnik matrike A_3 in enice po diagonali, matrika U zgornji trikotnik matrike A_3 vključno z diagonalo, matrika P pa

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Naloga 2 [25 točk]

Iščete ničle funkcije $f_a(x) = x - a + 1/x$.

a) Preverite, da ima f_a za $a > 2$ natanko dve realni ničli.

b) Poiščite tako funkcijo h_a, da bo za $a > 2$ navadna iteracija

$$x_{n+1} = \frac{h_a(x_n)}{x_n^2 - 1}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

za dovolj dober začetni približek x_0 konvergirala k eni od ničel funkcije f_a z redom konvergence vsaj 2.

c) S pomočjo točke b) poiščite večjo od ničel funkcije f_3 na tri mesta natančno. Zapišite začetni približek x_0 ter x_1, x_2 in x_3.

Rešitev:

a) Enačbo $f_a(x) = 0$ preoblikujemo v $x^2 - a\,x + 1 = 0$. Ker gre za preprosto kvadratno enačbo, ima slednja dve realni rešitvi natanko tedaj, ko je diskriminanta pozitivna, torej $a > 2$.

b) Iz točke a) zlahka sklepamo, da ima f_a dve enostavni ničli. V tem primeru vemo, da Newtonova metoda konvergira k ničlam z redom vsaj dva. Torej poskusimo h_a izračunati tako, da je omenjena iteracija ravno Newtonova metoda. Kratek račun nas pripelje do

$$h_a(x) = a\,x^2 - 2\,x.$$

c) Za $a = 3$ iz grafa (ali kako drugače) preberemo, da je večja ničla nekje med 2 in 3. Izberemo $x_0 = 2.5$ in izvajamo iteracijo iz točke b). Dobimo $x_1 = 2.6190$, $x_2 = 2.6180$ in $x_3 = 2.6180$.

Naloga 3 [25 točk]

Funkcijo $f(x) = 1/(1+x)$ interpolirate na intervalu $[0,h]$, $h > 0$, z interpolacijskim polinomom stopnje 5. Interpolirate vrednost in odvod v točkah $x = 0, h/2, h$.

a) Določite interpolacijski polinom v Newtonovi obliki, če je $h = 2$.

b) Čim bolje ocenite, koliko je lahko največ h, da bo napaka pri interpolaciji manjša od 0.01.

Rešitev:

a) Sestavimo tabelo deljenih diferenc

x	$[\cdot]$	$[\cdot,\cdot]$	$[\cdot,\cdot,\cdot]$	$[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$	$[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$	$[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
0	1					
		-1				
0	-1		$1/2$			
		$-1/2$		$-1/4$		
1	$1/2$		$1/4$		$1/12$	
		$-1/4$		$-1/12$		$-1/36$
1	$-1/4$		$1/12$		$1/36$	
		$-1/6$		$-1/36$		
2	$1/3$		$1/18$			
		$-1/9$				
2	$-1/9$					

Interpolacijski polinom je

$$p(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^2(x-1) + \frac{1}{12}x^2(x-1)^2 - \frac{1}{36}x^2(x-1)^2(x-2).$$

b) Napaka se izraža kot

$$|f(x) - p_5(x)| = \left| \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\omega(x) \right|$$

kjer je $0 \le \xi \le h$ $\omega(x) = x^2(x-h/2)^2(x-h)^2$. Iščemo torej čim boljšo zgornjo mejo za

$$\max_{x\in[0,h]} |f(x) - p_5(x)|.$$

Ker je $f^{(6)}(x) = 6!/(1+x)^7$, je

$$\max_{\xi\in[0,h]} \left| \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} \right| \le 1.$$

Po drugi strani so ekstremi funkcije ω doseženi pri $x = 0, h/2, h$ in

$$x = \frac{h}{6}\left(3 \pm \sqrt{3}\right).$$

Torej je

$$\max_{x\in[0,h]} |\omega(x)| \le \left|\omega\left(h(3\pm\sqrt{3})/6\right)\right| = \frac{h^6}{432}.$$

Ker želimo, da je

$$\max_{x\in[0,h]} |f(x) - p_5(x)| < 1/100,$$

je dovolj zagotoviti

$$\frac{h^6}{432} < 0.01,$$

oziroma $h < 1.2762$.

Naloga 4 [25 točk]

Naj bo

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Uporabite Sturmovo zaporedje in odgovorite na spodnji vprašanji.

a) Ali je število -1 lastna vrednost matrike A?

b) Koliko lastnih vrednosti je strogo manjših od -1?

Rešitev: Pri obeh vprašanjih potrebujemo Sturmovo zaporedje polinomov izračunano pri -1. V praksi polinomov Sturmovega zaporedja ne potrebujemo, saj lahko računamo neposredno njihove vrednosti, vndar jih tukaj vseeno zapišimo. Z nekaj računanja pridemo do

$$\begin{aligned}
f_0(\lambda) &= 1, \\
f_1(\lambda) &= -2 - \lambda, \\
f_2(\lambda) &= \lambda^2 + 4\,\lambda + 3, \\
f_3(\lambda) &= -\lambda^3 - 6\,\lambda^2 - 10\,\lambda - 4, \\
f_4(\lambda) &= \lambda^4 + 8\,\lambda^3 + 21\,\lambda^2 + 20\,\lambda + 5, \\
f_5(\lambda) &= -\lambda^5 - 10\,\lambda^4 - 36\,\lambda^3 - 56\,\lambda^2 - 35\,\lambda - 6.
\end{aligned}$$

Za $\lambda = -1$ dobimo zaporedje $\{1, -1, 0, 1, -1, 0\}$ Ker je na koncu zaporedja 0, je $\lambda = -1$ lastna vrednost matrike A. Število ujemanj predznakov v zgornjem zaporedju je enako 1 (ničlo v notranjosti štejemo za eno ujemanje). To pomeni, da je natanko ena lastna vrednost strogo večja od -1. Ker je ena enaka -1, morajo biti 3 strogo manjše od -1.