REŠITVE 4. IZPITA IZ UVODA V NUMERIČNE METODE-FIZIKI
5. september 2008

1. Naj bo
$$a_k = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^{k-1/2}}{100+t}dt.$$
Preverite, da velja
$$a_k = \frac{1}{2\,k-1} - 100\,a_{k-1}.$$
Izračunajte člene a_k, $k = 11, 12, \ldots, 15$, če veste, da je $a_{10} = 4.7188 \times 10^{-4}$.
Namig: Izračunajte $a_k + 100\,a_{k-1}$.
Rešitev: Glede na namig izračunamo
$$\begin{aligned} a_k + 100\,a_{k-1} &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^{k-3/2}}{100+t}\,(t+100)\;dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{k-3/2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{(k-1/2)} = \frac{1}{2\,k-1}. \end{aligned}$$
Računanje "naprej" ne bo numerično stabilno, saj ima ustrezna homogena diferenčna enačba naraščajočo rešitev, medtem ko ima zgornja očitno padajočo rešitev (kar sledi iz integralske reprezentacije a_k). Torej bomo računali "nazaj"
$$a_{k-1} = \frac{\frac{1}{2\,k-1} - a_k}{100},$$
pri čemer bomo izbrali recimo $a_{20} = 0$. Tako dobimo $a_{20} = 0$, $a_{19} = 2.5641 \times 10^{-4}$, ..., $a_{15} = 3.1958 \times 10^{-4}$, $a_{14} = 3.4163 \times 10^{-4}$,..., $a_{11} = 4.3082 \times 10^{-4}$ in $a_{10} = 4.7188 \times 10^{-4}$.

2. Za nesingularno matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, spodnje trikotno matriko L z enkami na diagonali in zgornje trikotno matriko U velja $A = L\,U$. Predlagajte **učinkovit algoritem** za izračun matrike U, če poznate matriki A in L. Koliko množenj in deljenj potrebujete za tak izračun?
Algoritem preverite na matrikah
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 0 & -2 \\ 3 & 8 & 2 & -1 \\ 4 & 11 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Rešitev: Pišimo $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, $L = (\ell_{i,j})_{i,j=1}^n$ in $U = (u_{i,j})_{i,j=1}^n$. Iz zveze $A = L\,U$ takoj izpeljemo algoritem

```
%prva vrstica U
for j=1:n
  U(1,j)=A(1,j);
```

```
end
%ostale vrstice U
for i=2:n
  for j=i:n
    U(i,j)=A(i,j)-L(i,1:i-1)*U(1:i-1,j);
  end
end
```

Deljenj očitno ni, množenj pa

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=i}^{n}(i-1) &= \sum_{i=2}^{n}(i-1)(n-i+1) = \sum_{k=1}^{n-1}k(n-k)\\ &= n\sum_{k=1}^{n-1}k - \sum_{k=1}^{n-1}k^2 = \frac{(n-1)n^2}{2} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\\ &= \frac{n^3}{6} + \mathcal{O}(n^2).\end{aligned}$$

Za konkretni primer dobimo

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Predlagajte algoritem za izračun ničle funkcije g, za katero je

$$g'(x) = e^{-x^2}, \quad g(0) = -1/2.$$

Ničlo funkcije tudi čim bolj natančno izračunajte.
Namig: Vrednosti $g(x)$ računajte s kakšno preprosto metodo za reševanje diferencialne enačbe.
Rešitev: Zaporedje pribižkov po Newtonovi metodi je

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)} = x_k - \frac{g(x_k)}{e^{-x_k^2}}.$$

Za izračun $g(x_k)$ uporabimo kar trapezno metodo s korakom x_k, torej

$$g(x_k) \approx -\frac{1}{2} + \frac{x_k}{2}\left(e^{-0} + e^{-x_k^2}\right).$$

Če izberemo $x_0 = 0.5$, dobimo $x_1 = 0.5710$, $x_2 = 0.5827$, …, $x_5 = 0.5846$.
Za primerjavo naj omenimo, da je točna ničla enaka 0.551039.
Opomba: Metodo bi lahko takoj izboljšali tako, da bi trapezno metodo na vsakem koraku uporabili na intervalu $[x_{k-1}, x_k]$ in ne vedno na $[0, x_k]$.

4. Začetni problem prvega reda

$$y'(x) = -y(x), \quad y(0) = 1,$$

rešujete z implicitno Eulerjevo metodo

$$y_{k+1} = y_k + h\, f(x_{k+1}, y_{k+1}).$$

Preverite, da je analitična rešitev zgornjega problema strogo padajoča funkcija. Kakšen mora biti korak h, da bo tudi zaporedje numeričnih približkov y_k, $k = 0, 1, \ldots$, strogo padajoče?
Rešitev: Analitična rešitev začetnega problema je $y(x) = e^{-x}$, torej je očitno strogo padajoča. Implicitna Eulerjeva metoda za konkretni primer je $y_{k+1} = y_k + h\,(-y_{k+1})$, torej

$$y_{k+1} = (1+h)^{-1} y_k = (1+h)^{-2} y_{k-1} = \cdots = (1+h)^{-k-1} y_0 = (1+h)^{-k-1}.$$

Zaporedje numeričnih približkov $(y_k)_{k=0}^{\infty}$ bo torej strogo padajoče, če je $1 + h > 1$, torej $h > 0$.