Numerične metode-fiziki, REŠITVE, 16.9.2013

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk, naloge so enakovredne. Uporabljate lahko pisalo, kalkulator in dva lista formata A4 z zapiski!

1	2	3	4	Σ

Ime in priimek

Vpisna številka

Naloga 1 [25 točk]

Naj bo $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nesingularna zgornja trikotna matrika in $\boldsymbol{e}_j = [\underbrace{0,0,\ldots,0}_{j-1},1,\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n-j}]^T$. Predlagajte **učinkovit** postopek za izračun vektorja $U^{-1}\boldsymbol{e}_j$. **Natančno** preštejte število potrebnih operacij (štejete seštevanja, odštevanja, množenja in deljenja).

Rešitev: Najpomembnejša opazka je, da ne računamo inverza matrike, ampak rešujemo sistem linearnih enačb $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_j$, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$. Ker je matrika zgornja trikotna, uporabimo algoritem obratnega vstavljanja. Vektor $\boldsymbol{e}_j$ na desni strani sistema je poseben, zato hitro opazimo, da je $x_k = 0$, $k = j+1, j+2, \ldots, n$. Ostale komponente izračunamo takole

```
for k=j:-1:1
  x(k)=(e(k)-U(k+1:j)*x(k+1:j))/U(k,k);
end
```

Število operacij je tako

$$1 + \sum_{k=1}^{j-1}(2 + (2(j-k)-1)) = j + 2\,j(j-1) - (j-1)j = j^2.$$

Naloga 2 [25 točk]

Zapišite interpolacijski polinom p v Newtonovi obliki, ki se s funkcijo $f(x) = \sqrt{1+x}$ ujema v točkah $x_0 = 0$, $x_1 = 3$ in $x_2 = 8$. Obenem ima v točki x_1 enak odvod kot funkcija f.
Rešitev: Tabela deljenih diferenc je

x	$[\cdot]$	$[\cdot,\cdot]$	$[\cdot,\cdot,\cdot]$	$[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
0	1			
		1/3		
3	2		$-1/36$	
		1/4		1/450
3	1/4		$-1/100$	
		1/5		
8	3			

Interpolacijski polinom v Newtonovi obliki se torej glasi

$$p(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{36}x(x-3) + \frac{1}{450}x(x-3)^2.$$

Naloga 3 [25 točk]

Naj bo

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Določite ortogonalno matriko Q, da bo

$$A\,Q = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Opomba: Zvezdica označuje poljubno število.
Rešitev: Iz zveze v besedilu naloge dobimo, da je

$$Q^T\,A^T = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Torej za Q^T lahko izberemo Givensovo rotacijo, ki "uniči" element na mestu $(2,1)$ v matriki A^T. Po znanih formulah za Givensove rotacije dobimo

$$Q^T = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

Naloga 4 [25 točk]

Začetni problem

$$y''(x) + y'(x) + y(x) + 1 = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1,$$

rešujete s trapezno metodo

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right)$$

za sistem prvega reda s korakom $h = 0.5$. Izračunajte numerični približek za $y'(0.5)$.
Rešitev: Uvedemo novi neznanki $y_1 = y$ in $y_2 = y'$. Od tod dobimo sistem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_2 - y_1 - 1. \end{aligned}$$

Če pišemo $\boldsymbol{Y} = [y_1, y_2]^T$, se torej ygornji sistem prepiše v

$$\boldsymbol{Y}' = A\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{b},$$

kjer je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = [0, -1]^T.$$

Trapezna metoda se torej glasi

$$\boldsymbol{Y}_{k+1} = \boldsymbol{Y}_k + \frac{h}{2}\left(A\boldsymbol{Y}_k + \boldsymbol{b} + A\boldsymbol{Y}_{k+1} + \boldsymbol{b}\right).$$

Od tod dobimo

$$\left(I - \frac{h}{2}A\right)\boldsymbol{Y}_{k+1} = \left(I + \frac{h}{2}A\right)\boldsymbol{Y}_k + h\,\boldsymbol{b}.$$

Iz začetnih pogojev dobimo $\boldsymbol{Y}_0 = [1, 1]^T$, od koder ha $h = 0.5$ sledi $\boldsymbol{Y}_1 = [1.1905, -0.2381]^T$. Torej je $y'(0.5) \approx -0.2381$.