Interpolacija

Uvod

- Osnovni problem interpolacije: dane so vrednosti f_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, v paroma različnih točkah x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Iščemo polinom p najnižje možne stopnje, za katerega velja

$$p(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

- Polinom p se imenuje interpolacijski polinom.

Lema

Za podatke (x_i, f_i), $i = 0, 1, \ldots, n$, kjer so x_i paroma različne točke, obstaja natanko en interpolacijski polinom p_n stopnje $\leq n$.

- Interpolacijski polinom pogodto uporabimo za izračun vrednosti pri $x \neq x_i$, $i = 0, 1, \ldots n$.
- Namesto interpolacijskega polinoma lahko iščemo kakšno drugo "preprosto" funkcijo, ki zadošča interpolacijskim pogojem.
- Če je n velik, potem interpolacijski polinom ni primern.
- Alternativa je, da podatke razdelimo v gruče, konstruiramo interpolacijske polinoma na majhnem številu podatkov in jih "zlepimo" v zlepke.
- Dandanes so zlepki osnova za večino vizualizacij, animacij, načrtovanje,...

Klasična oblika

- Interpolacijski polinom zapišemo v klasični obliki

$$p_n(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0.$$

- Dobimo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned}
a_n\, x_0^n + a_{n-1}\, x_0^{n-1} + \cdots + a_1\, x_0 + a_0 &= f_0 \\
a_n\, x_1^n + a_{n-1}\, x_1^{n-1} + \cdots + a_1\, x_1 + a_0 &= f_1 \\
&\vdots \\
a_n\, x_n^n + a_{n-1}\, x_n^{n-1} + \cdots + a_1\, x_n + a_0 &= f_n.
\end{aligned}$$

- V matrični obliki torej

$$V\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}.$$

- Pri tem je $\boldsymbol{a} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0)^\top$, $\boldsymbol{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_n)^\top$ in

$$V = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots x_n & 1 \end{bmatrix}.$$

- Ker je

$$\det(V) = \prod_{i<j} (x_i - x_j),$$

ima sistem enolično rešitev.

- Računanje na tak način je prezahtevno in slabo pogojeno. Če je denimo $x_i = i/n$, $i = 0, 1, \ldots, n$, je za $n = 5$ pogojenstno število matrike V $4.9 \cdots 10^3$m, pri $n = 20$ pa že kar $9.7 \cdots 10^{16}$.
- Interpolacijski polinom znamo izračunati bolj ekonomično in natančneje.

Lagrangeova oblika

- Če namesto baze potenc za polinom izberemo ustreznejšo bazo, lahko interpolacijski polinom kar konstruiramo.
- Naj bo

$$\ell_{n,i}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

- Potem je

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j \, \ell_{n,j}(x)$$

interpolacijski polinom stopnje $\leq n$ za podatke (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$.

- Naj bo $\omega(x) := (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$. Potem na kratko pišemo

$$\ell_{n,i}(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}.$$

Izrek

Če je f $(n+1)$-krat zvezno odvedljiva funkcija na intervalu $[a, b]$, ki vsebuje vse paroma različne točke x_0, x_1,...,x_n, potem za vsak $x \in [a, b]$ obstaja tako število $\xi \in (a, b)$, da je

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x).$$

- Tudi Lagrangeova oblika ni najboljša za konstrukcijo (veliko operacij in vnaprejšnje poznavanje stopnje polinoma).

Newtonova oblika

Definicija

Deljena diferenca $[x_0, x_1, \ldots, x_n]f$ *je vodilni koeficient interpolacijskega polinoma stopnje k, ki se ujema s funkcijo* f *v* $x_0, x_1 \ldots, x_k$.

Izrek

Za deljene diference velja:

a)

$$\begin{aligned} p_n(x) = {} & [x_0]f + (x - x_0)[x_0, x_1]f + \cdots \\ & + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})[x_0, x_1, \ldots, x_n]f \end{aligned}$$

je interpolacijski polinom, ki se v točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *ujema z* f.

b) *Zadoščajo rekurzijski formuli*

$$[x_0, x_1, \ldots, x_k]f = \frac{[x_1, x_2, \ldots, x_k]f - [x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]f}{x_k - x_0}.$$

- Polinom iz prejšnjega izreka se imenuje Newtonov interpolacijski polinom.
- Kaj se zgodi, ko gresta dve ali več točk v deljeni diferenci druga proti drugi?
- Izkaže se, da posplošeno deljeno diferenco lahko definiramo takole:

$$[x_0, \ldots, x_k]f = \begin{cases} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, & x_0 = \cdots = x_k, \\ \dfrac{[x_1, \ldots, x_k]f - [x_0, \ldots, x_{k-1}]f}{x_k - x_0}, & \text{sicer.} \end{cases}$$

- Če se točke v deljeni diferenci ponovijo, pomeni, da bo polinom poleg vrednosti interpoliral še prve, druge,. . . odvode.

Primer

Zapišimo interpolacijski polinom p, za katerega je $p(0) = 1$, $p'(0) = 2$, $p''(0) = 3$, $p(1) = -1$, $p'(1) = 3$ in $p(2) = 4$. Tabela deljenih diferenc je

x_i	$[\cdot]f$	$[\cdot,\cdot]f$	$[\cdot,\cdot,\cdot]f$	$[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]f$	$[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]f$	$[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]f$
0	1					
		2				
0	1		$\frac{3}{2}$			
		2		$-\frac{11}{2}$		
0	1		-4		$\frac{29}{2}$	
		-2		9		$-\frac{79}{8}$
1	-1		5		$-\frac{21}{4}$	
		3		$-\frac{3}{2}$		
1	-1		2			
		5				
2	4					

polinom pa $p(x) = 1 + 2\,x + \frac{3}{2}\,x^2 - \frac{11}{2}\,x^3 + \frac{29}{2}\,x^3(x-1) - \frac{79}{8}\,x^3(x-1)^2$.

- Sedaj lahko zapišemo izrek za napako interpolacijskega polinoma tudi v primeru, ko točke x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, niso paroma različne.

Izrek

Naj bo f $(n+1)$-krat zvezno odvedljiva funkcija in p_n interpolacijski polinom na točkah x_i, $i = 0, 1, \ldots n$ (če se točke ponavljajo, polinom interpolira ustrezne višje odvode). Potem je

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x),$$

kjer je $\min\{x, x_0, \ldots, x_n\} \leq \xi \leq \max\{x, x_0, \ldots, x_n\}$.

Primer

Izračunajmo kvadratni interpolacijski polinom, ki interpolira funkcijsko vrednost funkcije $f(x) = \sin x$ *v točkah* $x_0 = 0$ *in* $x_1 = \pi/2$ *ter njen odvod v* $x_0 = 0$. *Nato čim bolje ocenimo napako pri interpolaciji.*
S tabelo deljenih diferenc izračunamo interpolacijsko parabolo

$$p_2(x) = x + \frac{4 - 2\pi}{\pi^2} x^2.$$

Napako ocenimo s pomočjo prejšnjega izreka. Očitno je $\left| f^{(3)}(x) \right| \leq 1$, *faktor* $\omega(x) = x^2 (x - \pi/2)$ *pa ocenimo s pomočjo odvoda. Dobimo*

$$|\omega(x)| \leq \max_{x \in [0, \pi/2]} x^2 (\pi/2 - x) = \frac{\pi^3}{54}.$$

Torej je

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{3!} \frac{\pi^3}{54} = 0.095698.$$

Numerično odvajanje