Teoretična astrofizika

3. domača naloga

2013

Če želimo podrobno razumeti zvezdno zgradbo in njeno evolucijo, moramo raziskati mehanizme nastajanja energije v zvezdnem jedru. Eddington je leta 1920 [1] pravilno razmišljal, da v zvezdah pridobivanje energije s krčenjem (Kelvin-Helmhozova skala) ne more biti možno, saj bi se zvezde na ta način enostavno prehitro razvijale. Kmalu zatem je v fiziki prišlo do revolucije v razumevanju jedrske fizike, kar je prineslo povsem naravno razlago za proizvodnjo energije v zvezdnih jedrih.

V zvezdah nas zanima jedrska fuzija oziroma zlivanje lažjih elementov v težje, pri čemer kot produkt med drugim nastanejo visokoenergijski fotoni. Ti so odgovorni za tlak, ki zvezdi preprečuje, da bi se sesedla. S teoretičnimi izračuni lahko pokažemo, koliko energije se bo sprostilo pri posamezni jedrski reakciji. Vendar za točen model to ni dovolj: najprej moramo vedeti, katere reakcije bodo v zvezdah prevladovale. To informacijo nam bo podala količina R, imenovana hitrost jedrske reakcije.

Hitrost neke jedrske reakcije bo odvisna od številske gostote reaktantov n_A in n_B; hitrosti v, s katero se reaktanti zaletavajo eden v drugega; ter sipalnega preseka $\sigma(v)$:

$$R_{A,B} = n_A n_B \sigma(v) v.$$

Hitrost delcev naj ima porazdelitev $\phi(v)$, torej

$$R_{A,B} = (1+\delta_{A,B})^{-1} n_A n_B \int_0^\infty \sigma(v) v \phi(v) dv = (1+\delta_{A,B})^{-1} n_A n_B \langle \sigma v \rangle, \tag{1}$$

kjer je $\delta_{A,B}$ Kroneckerjev delta (premislite, zakaj potrebujemo ta člen!). Privzeli bomo, da imajo delci Maxwell-Boltzmannovo porazdelitev po hitrosti:

$$\phi(v) dv = 4\pi v^2 \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{\mu v^2}{2kT}\right\} dv,$$

kjer je μ reducirana masa reaktantov. Da pa lahko pride do reakcije med dvema reaktantoma, morata najprej preiti medsebojni potencial.

Naloga 1: Ocenite, kolikšno energijo bi moral imeti proton, da bi lahko premagal potencial drugega protona (prva reakcija v $p-p$ ciklu). Kolikšno termično energijo pa imajo protoni v zvezdnem jedru ($T_c \sim 1.5 \times 10^7$ K)?

Delci kljub nizkim energijam vseeno lahko premagajo potencialno bariero drugega delca s pomočjo kvantnega tuneliranja. Verjetnost za tuneliranje je sorazmerna z $E^{-1} \exp\{-b/E^{1/2}\}$ (podrobnosti poiščite v literaturi na wiki strani!), torej

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi\mu}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty S(E) \exp\left\{-\frac{E}{kT} - \frac{b}{E^{1/2}}\right\} dE, \tag{2}$$

kjer je $b = 0.99 Z_A Z_B A^{1/2}$ MeV$^{1/2}$, A je reducirana atomska masa v enotah osnovne enote atomske mase; $S(E)$ imenujemo astrofizikalni sipalni presek in je blaga funkcija energije. V posebnih primerih, ko smo v bližini resonance reakcije, je $S(E)$ močno odvisna od energije (ima Breit-Wignerjevo obliko), a tega režima v fiziki zvezd ne srečamo pogosto.

Naloga 2: Bolj natančno si poglejte eksponenti člen pod integralom (t.i. Gamowova funkcija). Razložite, kaj fizikalno ta člen pravzaprav predstavlja. Na isti graf narišite Gamowo funkcijo ter posamezne prispevke (to je, tuneliranje in termično porazdelitev), pri čemer podatke za lepšo predstavitev ustrezno skalirajte. Kot primer vzemite prvo (in najpočasnejšo) reakcijo iz $p-p$ cikla ($p+p \rightarrow D+e^{+}+\nu_e$), pri čemer primerjajte grafe za tri različne, a smiselne vrednosti temperature. Kako se energija vrha Gamowove funkcije E_0 spreminja s temperaturo?

Naloga 3: Integral v enačbi (2) ni analitično rešljiv. Kljub temu lahko ob nekaterih predpostavkah Gamowovo funkcijo preoblikujemo v analitično rešljivo obliko. Predpostavite, da je Gamowova funkcija Gaussova funkcija, pri čemer vrhova obeh funkcij ležita pri enaki energiji. Poleg tega naj se krivini krivulj v okolici vrhov ujemata. Z drugimi besedami, Gamowovo funkcijo razvijte okoli E_0. Nadalje predpostavite, da opazujemo funkcijo pri relativno nizkih temperaturah ($T < 10^9$ K). Pri zgornjih predpostavkah poenostavite izraz (2) v

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{K}{A Z_A Z_B} S(E_0) \tau^2 e^{-\tau}, \qquad \tau = 42.48 \left(\frac{Z_A^2 Z_B^2 A}{T_6} \right)^{1/3}, \tag{3}$$

kjer je T_6 temperatura v enotah 10^6; $K = 7.2 \times 10^{-19}$ (če je $S(E_0)$ v enotah keV barn). Pomagajte si z literaturo na wiki spletni strani.

Naloga 4: Izračunajte hitrost reakcij $\langle \sigma v \rangle$ v odvisnosti od temperature v primeru prve reakcije $p-p$ cikla na dva načina: z numeričnim reševanjem enačbe (2) ter z analitičnim približkom (3). Preverite ujemanje rezultatov. Podobno naredite še za primer najpočasnejše reakcije CNO cikla ($p +^{14} N \rightarrow^{15} O + \gamma$). Privzemite, da je $S(E_0)_{pp} = 4 \times 10^{-22}$, $S(E_0)_{CNO} = 3.3$ keV barn.

V zvezdah nas v končni fazi zanima, kolikšna je hitrost proizvedene energije na enoto mase:

$$\varepsilon_{A,B} = \frac{R_{A,B} Q}{\rho}, \tag{4}$$

kjer je Q masni defekt, torej $Q = (m_{\text{reaktantov}} - m_{\text{produktov}})c^2$ (če pri reakciji nastane nevtrino, moramo od te vrednosti odšteti energijo, ki jo je nevtrino odnesel s seboj). Če želimo izračunati hitrost proizvedene energije na enoto mase pri zlivanju protonov v helijeva jedra, moramo biti pozorni na to, da (i) je za proces potrebnih več reakcij, torej moramo sešteti vse posamezne prispevke (ii) obstajajo trije $p-p$ cikli, ki se razlikujejo po tem, kakšen katalizator nastopa v reakcijah. Če upoštevamo samo najpomembnejši $p-p$ cikel (ki prispeva $\sim 85\%$ energije), lahko končni rezultat zapišemo kot [2]:

$$\varepsilon_{p,p} = 0.24 \rho X^2 \left(\frac{10^6}{T} \right)^{2/3} \exp \left[-33.8 \left(\frac{10^6}{T} \right)^{1/3} \right] \text{W kg}^{-1}, \tag{5}$$

kjer je X masno razmerje vodika v jedru. Za fuzijo protonov v helijeva jedra je izjemno pomemben tudi CNO cikel. Podobno kot pri $p-p$ ciklu lahko končni rezultat strnemo v:

$$\varepsilon_{CNO} = 8.7 \times 10^{20} \rho X_{CNO} X \left(\frac{10^6}{T} \right)^{2/3} \exp \left[-152.3 \left(\frac{10^6}{T} \right)^{1/3} \right] \text{W kg}^{-1}, \tag{6}$$

kjer je X_{CNO} masni delež ogljika, kisika in dušika v zvezdnem jedru.

Naloga 5: Na isti graf narišite hitrost proizvedene energije na enoto mase na enoto gostote kot funkcijo temperature v primeru $p-p$ in CNO ciklov, pri čemer privzemite naslednje vrednosti: $X = 0.7$ in $X_{CNO} = 0.02$. Kateri proces prevladuje v Sončevem jedru? Kateri proces prevladuje v masivnih zvezdah? **Dodatna naloga:** Enako kot v prejšnjem primeru, vendar uporabite enačbi (2) in (4). Pri tem upoštevajte zgolj reakciji, zapisani v nalogah 2 in 4. Privzemite $Q_{pp} = 26.2$ MeV ter $Q_{CNO} = 23.8$ MeV. Pazite na enote! Se rezultati precej razlikujejo?

Literatura

[1] Eddington, A. S. 1920, The Observatory, 43, 341

[2] Choudhuri, A. R. 2010, *Astrophysics for physicists*, Cambridge University Press