

Teoretična astrofizika

1. domača naloga

2012

Enačbe zvezdne strukture v splošnem ne moremo rešiti analitično, temveč se moramo poslužiti numeričnega modeliranja. Vseeno je mogoče mehanski del enačb zvezdne strukture rešiti ločeno od energijskih enačb, če je le zveza med tlakom in gostoto v zvezdi dovolj preprosta. Če privzamemo enostavno zvezo med tlakom in gostoto $p = K\rho^\gamma$, lahko izpeljemo t.i. Lane-Emdenovo enačbo:

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\Theta}{dx} \right) = -\Theta^n, \quad (1)$$

kjer je $\rho(r) \equiv \rho_c \Theta^n(r)$, $\gamma = \frac{n+1}{n}$, $r \equiv \alpha x$ in

$$\alpha = \left[(n+1) \frac{K \rho_c^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G} \right]^{1/2}.$$

Zvezdnemu modelu s privzeto odvisnostjo med tlakom in gostoto pravimo *politropni* model.

Naloga 1: Zapišite robne pogoje in izpeljite analitični rešitvi Lane-Emdenove enačbe za vrednosti $n = 0$ ter $n = 1$. Preverite, da je rešitev enačbe za primer $n = 5$ enaka

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}x^2}}.$$

(Za dodatne točke lahko zadnji rezultat tudi izpeljete.)

Naloga 2: Numerično poiščite rešitev enačbe (1) za poljuben politropni index n in nekaj različnih primerov grafično prikažite. Kolikšna je natančnost vaše numerične metode?

Naloga 3: Numerično poiščite prvo ničlo rešitve x_1 ter odvod $\frac{d\Theta}{dx} |_{x_1}$. Izpolnite spodnjo tabelo:

n	x_1	$\frac{d\Theta}{dx} _{x_1}$
0.0		
0.1		
\vdots		
1.0		
0.5		
\vdots		
5.0		

Naloga 4: V praksi sta najbolj uporabna modela z $n = 1.5$ (enoatomni plin) in $n = 3$ (relativistični degeneriran plin). Bolj podrobno si pogledajte vašo rešitev: za modela z indeksoma $n = 1.5$ in $n = 3$ narišite spreminjanje gostote, mase, tlaka in temperature kot funkcijo radija ter primerjajte rezultate obeh modelov. Za izračun temperature privzemite, da v zvezdi ni

sevalnega tlaka in da velja enačba stanja idealnega plina. Količine izrazite v fizikalnih enotah. Preizkusimo lahko, kako dobro s tem modelom opišemo Sonce, katerega maso in radij poznamo. Primerjajte svoje rezultate modela z $n = 3$ z rezultati bolj podrobnega modela, tako imenovanega Standardnega Sončevega modela. Izračunane vrednosti tega modela dobite v priloženem dokumentu (spletna stran wiki predmeti). Podrobnosti o modelu pa si lahko preberete (neobvezno) v člankih, katere prav tako najdete na spletni strani.

Naloga 5: Izpeljite izraz za gravitacijsko energijo zvezde, katero opišemo s politropnim modelom z indeksom n . Namig: najprej pokažite, da velja:

$$d\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{1}{1+n} \left(\frac{dp}{\rho}\right).$$

Nato zapišite splošni izraz za gravitacijsko energijo ter tekom izpeljave trikrat uporabite tehniko integracije *per partes*.

Naloga 6: Uporabite rezultat iz prejšnje naloge in zapišite celotno energijo zvezde v primeru splošne enačbe stanja (virialni teorem). Kolikšna je vrednost celotne energije v primeru $n = 3$?