Teoretična astrofizika

2. domača naloga

2012

Spektralne črte predstavljajo enega izmed najpomembnejših virov informacij v astrofiziki. Prisotnost črte v spektru opazovanega objekta nam po eni strani odstre kemijsko sestavo absorberja, po drugi pa nosi tudi druge informacije, kot so kinematika, temperatura, itd. Da bi lahko pravilno prebrali informacije, ki nam jih črta ponuja, moramo poznati in razumeti osnovno obliko črte.

Naloga 1: Na kratko opišite, kako pravzaprav nastane absorpcijska črta v spektru zvezde ali kakega drugega sevalca. Zapišite in na kratko razložite Lorentzov in Gaussov profil črte (zakaj/kdaj ima črta tako obliko). Zapišite vrednost Dopplerjevega parametra b (kakšna je njegova odvisnost od temperature). Pomagajte si z navedeno literaturo (npr. [1] - poglavje 2: na wiki strani).

Prava oblika črte $\phi(\nu)$ bo konvolucija zgornjih dveh oblik:

$$\phi(\nu) = \frac{H(a,x)}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_{\rm D}}, \tag{1}$$

kjer je $\Delta\nu_{\rm D} = \nu_j b/c$ za črto s centralno frekvenco ν_j, b je Dopplerjev parameter, c svetlobna hitrost, $H(a,x)$ pa Voigt-Hjertigova funkcija

$$H(a,x) = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{(x-y)^2 + a^2} dy, \tag{2}$$

kjer sta

$$a = \frac{\Gamma_j}{4\pi\Delta\nu_{\rm D}}, \qquad x = \frac{\nu - \nu_j}{\Delta\nu_{\rm D}}. \tag{3}$$

Γ pa je konstanta dušenja. Voigtov profil je normaliziran: $\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\nu)d\nu = 1$. Vrednosti centralne valovne dolžine in konstante dušenja za nekaj črt so podane v spodnji tabeli.

Črta	λ_j[Å]	f$_j$	Γ_j[s^{-1}]
Lyα	1215.67	4.164×10^{-1}	6.265×10^{8}
Lyβ	1025.72	7.912×10^{-2}	1.672×10^{8}
CIV	1548.19	1.9×10^{-1}	2.65×10^{8}
MgII	2803.53	3.03×10^{-1}	2.57×10^{8}

Absorpcijo bomo opisali z optično globino τ_ν. Če slednjo poznamo, je gostota toka, ki jo prejmemo z zvezde, enaka:

$$j_{\nu,\rm op} = j_{\nu,0}e^{-\tau_\nu}. \tag{4}$$

Privzeli bomo raven kontinuum, torej $j_{\nu,0} = 1$. Optična globina je odvisna od sipalnega preseka absorpcije $\sigma_{\rm X,ij}$ (vrednost je odvisna od absorbirajočega elementa X ter začetnega i in končnega j energijskega stanja elementa) ter gostote stolpca $N_{\rm X}$ (gostota stolpca je število absorberjev v valju s presekom 1 m^2, ki se razteza od sevalca do nas), ki absorbirajo svetlobo:

$$\tau_{\nu,i} = N_{\rm X}\sigma_{\rm X,ij}\phi(\nu). \tag{5}$$

Sipalni presek za posamezno črto izmerimo v laboratoriju (ali izračunamo z uporabo kvantne mehanike) in ga opišemo s t.i. oscilatorsko močjo f, sicer pa ga v splošnem za vezano-vezano absorpcijo zapišemo kot (vir: vsaka astrofizikalna knjiga, ki se ukvarja s sevalnimi procesi, poglavje o vezano-vezani (ang. bound-bound) absorpciji):

$$\sigma_{\mathrm{X,ij}} = \frac{\pi e^2 c}{4\pi m_e c^2 \varepsilon_0} f_{\mathrm{X,ij}} = r_e \pi c f_{\mathrm{X,ij}}, \tag{6}$$

kjer je r_e klasični radij elektrona. Končno lahko zapišemo optično globino kot:

$$\tau(\nu) = r_{\mathrm{e}} c \pi N_{\mathrm{X}} f_{X,ij} \frac{H(a,x)}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_{\mathrm{D}}}, \tag{7}$$

oziroma, zaradi praktičnosti raje delamo z valovnimi dolžinami,

$$\tau(\lambda) = r_{\mathrm{e}} \sqrt{\pi} N_{\mathrm{X}} f_{X,ij} \frac{\lambda_j^2}{\Delta\lambda_{\mathrm{D}}} H(a,x), \tag{8}$$

kjer smo upoštevali zvezo $\Delta\lambda_{\mathrm{D}} = \lambda_j b/c$. V primeru, da delamo z valovnimi dolžinami, moramo spremeniti še parametra $a = \frac{\lambda_j^2 \Gamma_j}{4\pi\Delta\nu_{\mathrm{D}} c}$ in $x = \frac{\lambda - \lambda_j}{\Delta\lambda_{\mathrm{D}}}$.

Naloga 2: Numerično izračunajte in grafično prikažite, kako se s povečanjem števila absorberjev N_X spreminja absorpcijska črta (pri konstantnem b). Podobno naredite še za različne vrednosti b ob konstantnem N_X. Namig: Vrednosti N_X naj se gibljejo v območju 10^{12-20} cm^{-2}, parameter b pa naj zavzame vrednosti 5-100 km s^{-1}. Komentirajte rezultate.

Naloga 3: Opazujemo spekter oddaljene zvezde. Med zvezdo in nami se nahajata dva oblaka nevtralnega vodika. Prvi oblak glede na nas miruje, opišemo pa ga s parametroma $b = 25$ km s^{-1} in $N_H = 10^{13}$ cm^{-2}. Drugi oblak ima glede na nas radialno hitrost +90 km s^{-1} ter $b = 35$ km s^{-1} in $N_H = 10^{14.2}$ cm^{-2}. Eden redkih vesoljskih teleskopov, ki je lahko opazoval območje Lyα črte je bil teleskop FUSE z ločljivostjo 0.1 Å. Bi s tem teleskopom lahko opazili, da sta med nami in zvezdo prisotna dva oblaka?

Poleg globine in širine nas zanima tudi 'moč' črte. Črto odštejemo od kontinuuma in integriramo po valovni dolžini:

$$W = \int_0^\infty \left(\frac{j_{0,\lambda} - j_\lambda}{j_{0,\lambda}} \right) d\lambda = \int_0^\infty \left[1 - e^{-\tau(\lambda')} \right] d\lambda. \tag{9}$$

Novo količino W imenujemo ekvivalentna širina - to je širina pravokotnika, katerega višina je enaka višini continuuma, površina pa je enaka površini med črto in kontinuumom.

Naloga 4: Ker je $\tau \propto N_X$, je zanimivo opazovati odvisnost $W(N_X)$. Pričakujemo, da bo vrednost ekvivalentne širine naraščala s številom absorberjev - tej odvisnosti zato pravimo *krivulja rasti*. Preden se polotimo numeričnega računa (naloga 5), lahko pogledamo, kako se krivulja obnaša v limitnih primerih:

* Pokažite, da za optično tanek absorber ($\tau \ll 1$) velja linearna zveza $W \propto N_X$ in da $W \neq W(b)$.
* [neobvezno] Pokažite, da je odvisnost v primeru srednje visoke absorpcije, ko večino absorpcije prispeva Gaussova porazdelitev, sorazmerna $W \propto b \left(\ln \frac{N_X}{b}\right)^{1/2}$.

⋆ [neobvezno] Pokažite, da je odvisnost v primeru optično debelega absorberja, ko večino absorpcije prispevajo repi Lorentzove porazdelite, sorazmerna $W \propto N_X^{1/2}$.

Komentirajte posamezne režime.

Naloga 5: Numerično izračunajte krivuljo rasti $W(N_X)$ za različne parametre b za vsaj dve različni črti. Preverite, da se krivulja obnaša tako, kot ste pokazali v prejšnji nalogi. Je med krivuljami rasti različnih črt kakšna bistvena razlika? V praksi lahko črti enostavno izmerimo ekvivalentno širino. S kakšnimi težavami se soočamo, če želimo z uporabo krivulje rasti iz ekvivalentne širine določiti N_X?

Voigtov profil - numerično reševanje

Voigtova funkcija (2) predstavlja precejšen numerični izziv. Čeprav lahko integral rešujete neposredno numerično, je v vsakdanjih aplikacijah ta način časovno preveč potraten za praktično uporabo. Obstaja obsežna literatura o učinkovitih in natančnih algoritmih, ki rešijo Voigtovo funkcijo. Največ algoritmov izhaja iz dejstva, da je Voigtova funkcija pravzaprav realni del splošnejše Faddeevajeve funkcije [2]:

$$w(z) = e^{-z^2}\left(1 + \frac{2i}{\pi}\int_0^z e^{t^2}dt\right), \tag{10}$$

kjer je $z = x + ia$. Iskanje realne rešitve zgornje funkcije je s pravim postopkom bistveno hitrejše kot reševanje prvotnega integrala. Hitro lahko rešitev poiščemo tudi tako, da preidemo v Fourierov prostor [3].

V primeru črt vodika pa se da Voigtovo funkcijo dovolj dobro aproksimirati z naslednjo funkcijo [4]:

$$H(a,x) = H_0 - \frac{a}{\sqrt{\pi}\left[H_0^2\left(4x^4 + 7x^2 + 4 + Q\right) - Q - 1\right]}, \tag{11}$$

kjer je $Q = 1.5x^{-2}$ in $H_0 = e^{-x^2}$. Uporaba te formule je še posebej enostavna. Lahko poizkusite, kako dobro z njo aproksimiramo rešitve za profile drugih elementov.

Literatura

[1] Tepper-Garcia, T. 2007, phd thesis

[2] Drayson, R. S. 1975, JQSRT, 16, 611

[3] Mendenhall, M. H. 2006, arXiv:physics/0607013v2

[4] Tepper-Garcia, T. 2006, MNRAS, 369, 2025