Domače naloge iz Verjetnosti za fizike, 19.1.2010

1. Stekleno prizmo s presekom v obliki enakostraničnega trikotnika s stranico a z vseh strani osvetljuje enakomerno (izotropno) porazdeljeno žarkovje oddaljenih izvorov, vendar tako, da vsi žarki potekajo v ravnini pravokotnega preseka prizme (v ravnini trikotnika). (t.j. problem je v bistvu dvodimenzionalen). Poišči porazdelitev dolžin tetiv, ki jih žarki definirajo v prizmi.

2. Podobna naloga kot zgoraj, le da so izvori žarkov izotropni sevalci na robu trikotnika.

3. Stekleno prizmo s presekom v obliki kvadrata s stranico a z vseh strani osvetljuje enakomerno (izotropno) porazdeljeno žarkovje oddaljenih izvorov, vednar tako da vsi žarki potekajo v ravnini pravokotnega preseka prizme (v ravnini kvadrata). (t.j. problem je v bistvu dvodimenzionalen). Poišči porazdelitev dolžin tetiv, ki jih žarki definirajo v prizmi.

4. Podobna naloga kot zadnja, le da nas zanima verjetnost, da naključni žarek, ki zadane prizmo, le-to zapusti skozi nasprotno stranico kvadratnega preseka.

5. Podobna naloga kot predzadnja, le da so izvori žarkov izotropni sevalci na robu kvadrata.

6. Podobna naloga kot predzadnja, le da nas zanima zgolj verjetnost, da naključni izsevani zarek, zadene ob nasprotno stranico kvadrata.

7. Stekleno prizmo s presekom v obliki elipse s polosema a in b z vseh strani osvetljuje enakomerno (izotropno) porazdeljeno žarkovje oddaljenih izvorov, vednar tako da vsi žarki potekajo v ravnini pravokotnega preseka prizme (v ravnini elipse). (t.j. problem je v bistvu dvodimenzionalen). Poišči porazdelitev dolžin tetiv, ki jih žarki definirajo v prizmi.

8. Podobna naloga kot zgoraj, le da so izvori žarkov izotropni sevalci na robu elipse.

9. Osnovna ploskev stožca s polmerom r in višino h je z notranje strani premazana z radioaktivno snovjo, ki enakomerno in izotropno seva

žarke γ v notranjost stožca. Zapiši porazdelitev dolžin tetiv, ki jih žarki definirajo v notranjosti stožca.

10. Podobna naloga kot prejšnja, le za polneskončen valj z osnovnico s polmerom r.

11. Podobna naloga kot prejšnja, le za poševen polneskončen valj s krožnim presekom (osnovnica je elipsasta z malo polosjo r) in kotom nagiba α.

12. Podobna naloga kot prejšnja, le za kocko, ki je znotraj premazana z radioaktivno snovjo.

13. Podobna naloga kot prejšnja - torej kocka, ki je od znotraj premazana z radioaktivno snovjo, le da nas zanima relativna verjetnost, da naključno izsevani žarek zadane nasprotno ploskev ali da zadane kako od štirih sosednjih ploskev.

14. Na višini h nad ravno površino Zemlje raznese bombo. Ob eksploziji je porazelitev delcev po smereh izotropna, vsi delci pa imajo enako velikost hitrosti v_1. Izračunaj porazdelitev delcev eksplozije po dometu.

15. Na višini h nad ravno površino Zemlje raznese bombo. Ob eksploziji je porazelitev delcev po hitrostih izotropna in Maxwellova $dW \propto d^3v \exp[-v^2/(2v_1^2)]$. Izračunaj porazdelitev delcev eksplozije po dometu.

16. Na površini planeta malega princa s polmerom R in ubežno hitrostjo v_0 raznese bombo. Ob eksploziji je porazelitev delcev po smereh izotropna, vsi delci pa imajo enako velikost hitrosti v_1, $v_1 < v_0$. Izračunaj porazdelitev delcev eksplozije po dometu (razdalji od mesta eksplozije).

17. Na površini planeta malega princa s polmerom R in ubežno hitrostjo v_0 raznese bombo. Ob eksploziji je porazelitev delcev po hitrostih izotropna in Maxwellova $dW \propto d^3v \exp[-v^2/(2v_1^2)]$. Izračunaj porazdelitev delcev eksplozije po dometu (razdalji od mesta eksplozije), pri pogoju da delec ne pobegne v vsemirje.

18. Kolikšna je verjetnost pri prejšnji nalogi, da naključo izbrani delec bombe pobegne v vsemirje?

19. Na stoèc s kotom z višino h in polmerom osnovne ploskve r pada enakomerno deževje. Predpostavi, da se kaplje vode, ki padajo vse z

enako hitrostjo v_0, od površine stožča prožno odbijejo po odbojnem zakonu, dokler ne pristanejo na tleh. Zapiši verjetnostno porazdelitev za naključno izbrano kapljo po številu trkov s stožcem preden pade na tla.

20. Podobna naloga kot prejšnja, le da za polkroglo.

21. Podobna naloga kot predprejšnja naloga, le da nas zanima verjetnostna porazdelitev po razdalji od mesta kjer naključno izbrana kaplja pade na tla do roba osnovne ploskve stožca.

22. Podobna naloga kot predprejšnja naloga, le da nas zanima verjetnostna porazdelitev po razdalji od mesta kjer naključno izbrana kaplja pade na tla do roba osnovne ploskve polkrogle.

23. V kvantni fiziki večkrat simuliramo kompleksne sisteme s Hamiltonkami, ki jih predstavimo z matrikami z naključnimi elementi. Vzemi npr ensamble realnih simetričnih matrik 2×2 katerih elementi so Gaussovo porazdeljena naključna števila s povprečjem 0 in standardno deviacijo σ_d na diagonali in σ_o stran od diagonale. Ponavadi vzamejo $\sigma_d = \sqrt{2}\sigma_o$ kar zagotovi posebno udobno simetrijo takšnega ensambla.

    Zapiši kombinirano verjetnostno porazdelitev lastnih vrednosti takšnih matrik.

24. Nadaljevanje prejšnje naloge. Izračunaj porazdelitev razmihov (razlik) med lastnima energijama (lastnima vrednostima) ensembla matrik iz prejšnje naloge.

25. Podobno kot predprejšnja naloga, vendar za naključne kompleksne hermitske matrike, kjer sta realni in imaginarni del izvendiagonalnega matričnega elementa neodvisni gausovi spremeljivki s standardno deviacijo σ_0.

26. Nadaljevanje prejšnje naloge. Izračunaj porazdelitev razmihov (razlik) med lastnima energijama (lastnima vrednostima) ensembla matrik iz prejšnje naloge.

27. V teoretični fiziki večkrat potrebujemo koncept "naključnih vektorjev" $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$, ki so normalizirani $\vec{x} \cdot \vec{x} = \sum_{j=1}^{N} x_j^2 = 1$. Še drugače lahko $\vec{x}$ razumemo kot točko enakomerno porazdeljeno na $N-1$ dimenzionalni sferi, oziroma površini N dimenzionalne krogle.

Izračunaj povprečja

$$\overline{x_j^2}, \quad \overline{x_j^2 x_k^2}$$

za splošen N.

28. V primeru zgornje naloge izračunaj splošne momente

$$\overline{x_j^{2k}}, \quad \overline{x_k^{2k} x_l^{2l}}$$

v limii velikih N. Zapiši celotno porazelitev posamezne komponente x_j za velike N.

29. V teoretični fiziki večkrat potrebujemo koncept "naključnih vektorjev" $\vec{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, ki so normalizirani $\vec{x}^* \cdot \vec{x} = \sum_{j=1}^{N} |x_j|^2 = 1$. Še drugače lahko $\vec{x}$ razumemo kot točko enakomerno porazdeljeno na $2N-1$ dimenzionalni sferi, oziroma površini $2N$ dimenzionalne krogle.

    Izračunaj povprečja

$$\overline{|x_j|^2}, \quad \overline{|x_j|^2 |x_k|^2}$$

za splošen N.

30. V primeru zgornje naloge izračunaj splošne momente

$$\overline{|x_j|^{2k}},$$

v limii velikih N. Zapiši celotno porazelitev posamezne (kompleksne) komponente x_j za velike N.

31. Model naključne hoje. Pijanec hodi po cesti tako, da v vsakem trenutku (npr. v eni sekundi), napravi en korak, z verjetnostjo $1/2$ naprej in z verjetnostjo $1/2$ nazaj. Izračunaj oz. opiši porazdelitev števila korakov, ki jih naredi pijanec zaporednoma v isto smer, preden "obrne".

    Kako bi izgledala pijančeva hoja, če nikoli ne bi dovolili da stori več kot r zaporednih korakov v isto smer? Primerjaj variacijo (povprečen kvadrat prepetovane poti v odvisnosti od časa $\overline{x^2(t)}$) za različne r.

32. Študiraj model naključne hoje, pri katerem si pijanec zapomni smer zadnjega koraka in "obrne" z verjetnostjo $p < 1/2$. Študira,j kako je variacija (povprečen kvadrat prepetovane poti v odvisnosti od časa $\overline{x^2(t)}$) odvisna od p.

33. Model naključne hoje po šahovnici. V spodnje levo polje šahovnice (8×8) postavimo kralja, ki se na vsakem koraju premakne za eno (dovoljeno) potezo, ki jo izmed možnih potez izžrebamo naključno in enakomerno.

    Po koliko potezah bo v povprečju kralj prvič pristal na nasprotnem, zgornjem desnem polju šahovnice?

34. Enodimenzionalna verzija zgornje naloge. Diskretna naključna hoja po slamici dolžine N korakov. Gosenico postavimo na spodnji rob slamice, v eni časovni enoti naredi gosenica korak naprej ali nazaj z verjetnostima po $1/2$. Po koliko korakih v povprečju gosenica prvič doseže nasprotni rob slamice? Kako je porazdeljeo število portrebnih korakov?

35. Naključna hoja po slamici dolžine N korakov kot markovski proces. Gosenica se lahko giblje po slamici od roba do roba. Ko prispe do roba, v naslednjem koraku z verjetnostjo $1/2$ ostane na robu, ali pa se od roba odmakne za korak. Izračunaj verjetnostno porazdelitev gosenice po slamici ob t-tem koraku, če je na začetku gosenica na spodnjem robu slamice. Problem reši analitično vsaj za majhne N.

36. Model naključne hoje po dvodimenzionalni kvadratni mreži. V vsakem koraku se z verjetnostjo $p/4$ premaknemo levo, desno, gor ali dol, in z verjetnostjo $1-p$ ostanemo na mestu. Izračunaj povprečna kvadrata premikov $\overline{x^2(t)}$ in $\overline{y^2(t)}$ v vodoravni in navpični smeri.

37. Prejšnja naloga. Izračunaj verjetnost, da smo po t korakih na istem mestu.

38. Prejšnja naloga na končni periodični kvadratni mreži $N \times N$. Izračunaj porazdelitev $P(x, y, t)$ za dolge čase t in poišči časovno konstanto s katero se porazdelitev približuje ravnovesju (vodilna lastna vrednost markovske matrike).

39. Model naključne hoje po dvodimenzionalni heksagonalni mreži. V vsakem koraku se z verjetnostjo $p/6$ premaknemo do ene izmed šestih sosednjih točk mreže, z verjetnostjo $1-p$ pa ostanemo na mestu. Izračunaj povprečen kvadrat odmika od začetne točke po t korakih $\overline{r^2(t)}$.

40. Prejšnja naloga. Izračunaj verjetnost, da smo po t korakih na istem mestu.

41. Napravimo model naključne hoje za dve korelirani slučajni spremenljivki x, y, ki se v diskretnih časovnih korakih lahko spreminjata samo za vrednost $0, \pm h$. Z verjetnostjo $1/6$ se v naključnem koraku vrednosti obeh spremenljivk povečata za h z verketnostjo $1/6$ se vrrednosti obeh spremenljivk zmanjšata za h, z verjetnostjo $1/6$ se x poveča (zmanjša) za h in z verjetnostjo $1/6$ se y poveča (zmanjša) za h. Na začetku naj bodo vrednosti x in y enake nič. Po t korakih izračunaj pričakovane vrednosti
$$\overline{x^2(t)}, \quad \overline{y^2(t)}, \quad \overline{x(t)y(t)}$$
in izračunaj korelacijski koeficient $r_{xy}(t)$. Ali ima $r_{xy}(t)$ smiselno definirano limito $t \to \infty$.

42. Študiraj markovski proces med oglišči trikotnika A, B, C. V vsakem koraku je možno skočiti na kako od sosednjih oglišč in recimo da poznamo verjetnosti $P_{i,j}$, $i, j \in \{A, B, C\}$, in da velja $P_{ii} = 0$ (nikoli ne ostanemo na istem mestu). Analitično poišči stacionarno porazdelitev na ogliščih trikotnika.

43. Prejšnja naloga. V stacionarnem stanju lahko definiramo "tok delcev", npr. kot povprečno svetilo obhodov delca okrog središča trikotnika na število korakov, ko gre število korakov proti neskončno. Namig: V ta namen je treba "razširiti" markovski proces na mnogo kopij trikotnikov, tako da lahko "štejemo" obhode.

44. Predprejšnja naloga za splošen markovski proces med oglišči kvadrata.

45. Prejšnja naloga. V stacionarnem stanju lahko definiramo "tok delcev, npr. kot povprečno svetilo obhodov delca okrog središča trikotnika na število korakov, ko gre število korakov proti neskončno. Namig: V ta namen je treba "razširiti" markovski proces na mnogo kopij kvadratov, tako da lahko "štejemo" obhode.

46. Predprejšnja naloga za homogen (asimetričen) markovski proces med oglišči N-kotnika. Verjetnosti za prehod v prejšnje ogliš$\underline{v}$e p_- in naslednje oglišče p_+, $p_- + p_+ = 1$, naj bodo za vsa oglišča enaka.

47. Predprejšnja naloga (povprečen tok) za homogen asimetričen N-členi markovski proces opisan v prejšnji nalogi.

48. Naj bosta x in y dve slučajno neodvisni spremenljivki, porazdeljeni enakomerno na intervaly $[-a, a]$. Definiraj novi slučajni spremenljivki $u = \min\{x, y\}, v = \max\{x, y\}$ in izračunaj korelacijski koeficient r_{uv}.

49. Podobna naloga kot zgornja, le za normalno (Gaussovo) porazdeljeni slučajni spremenljivki s povprečjem 0 in standardno deviacijo σ.

50. Podobna naloga kot zgornja, le za eksponentno porazdeljeni slučajni spremenljivki s povprečjem τ.

51. Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_N$ slučajno neodvisne spremenljivke porazdeljene enakomerno na intervalu $[-a, a]$. Obravnavaj porazdelitev njihovega maksimuma $v = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, vsaj za najpreprostejša primera $N = 2, 3$, ali pa morda znaš povedati tudi kaj za velike N?

52. Podobna naloga kot zgornja, le za normalno (Gaussovo) porazdeljene slučajne spremenljivke s povprečjem 0 in standardno deviacijo σ.

53. Podobna naloga kot zgornja, le za eksponentno porazdeljene slučajne spremenljivke s povprečjem τ.

54. Podobna naloga kot zgornja, le za Cauchy-Lorentzovo porazdeljene slučajne spremenljivke $w(x) = (1/\pi)[x^2 + a^2]^{-1}$.

55. Izračunaj konvolucijo (porazdelitev vsote) dveh slučajno neodvisnih Cauchy-Lorentzovo porazdeljenih slučajnih spremenljivk

$$w_1(x_1) = (1/\pi)[(x_1 - \bar{x}_1)^2 + a_1^2]^{-1}$$

in

$$w_2(x_2) = (1/\pi)[(x_2 - \bar{x}_2)^2 + a_2^2]^{-1}.$$

56. Napravili smo generator naključnih štveil, ki generira enakomerno porazdeljena cela števila $x \in \{1, \ldots, b\}$, z npr. $b = 10$. Števila so med seboj statistično nekorelirana, z enim samim pogojem. Dva zaporedni naključni števli nista nikoli enaki (torej štveila se generirajo brez ponovitev). Zapiši porazdelitev vsote n zaporednih takšnih naključnih števil $z = \sum_{j=1}^{n} x_j$. Kolikšno je povprečje $\bar{z}$ in standardna deviacija σ_z.

57. Izračunaj korelacijski koeficient med dvema zaporednima številoma $r_{x_j x_{j+1}}$ iz prejšnje naloge v odvisnosti od b. Če prepovemo še ponivitve po treh zaporednih poskusih, izračunaj še korelacijski koeficient $r_{x_j x_{j+2}}$.

58. Definiraj delne vsote pri prejšnji nalogi $z_j = \sum_{k=1}^{N} x_{j+k}$. Ali so z_j med seboj korelirani za različne "časovne zamike" j? Izračunaj korelacijski koeficient

$$r_{z_0 z_j}$$

za različne j.

59. Naj bodo $x_j, j = 1, \ldots, N$ slučajno neodvisne spremenljivke z variacijami σ_j^2 (prav tako pa naj bodo vsi momenti končni). Vzemimo spremenljivko

$$z = \left(\sum_{j=1}^{N} g_j x_j \right) / \left(\sum_{j=1}^{N} g_j \right)$$

Določi g_i tako, da bo variacija σ_z^2 kar najmanjša in izračunaj tak najmanjši σ_z^2.

60. Naj bo $x_j, j = 1, \ldots, N$ množica identično porazdeljenih slučajno neodvisih spremenljivk z variacijo σ^2, npr. neodvisnih izmerkov neke količine.

Izmet teh N vrednosti izžrebajmo povsem slučajno dve podmnožici

$$\{p(1), p(2), \ldots, p(M)\} \subseteq \{1, \ldots, N\}\}, \quad M \leq N,$$

in

$$\{q(1), q(2), \ldots, q(L)\} \subseteq \{1, \ldots, N\}\}, \quad L \leq N,$$

(ne nujno disjunktni) in izračunajmo delni povprečji:

$$z_M = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} x_{p(j)}, \quad z_L = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{L} x_{q(j)}$$

Izračunaj korelacijski koeficient med z_M in z_L. Kako je odvisen od vrednosti M in L (za nek fiksen velik N)?

61. Naj bo $x_j, j = 1, \ldots, N$ množica identično porazdeljenih slučajno neodvisih spremenljivk porazdeljenih po neki porazdelitvi s točno znanimi momenti $m_n = \overline{x_j^n}$.

Definiraj eksperimentalne ocene za momente kot slučajne spremenljivke

$$z_n = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j^n$$

Teoretično oceni efektivne napake, oz. variacije ocen za momente

$$\overline{(z_n - m_n)^2}.$$

62. Podobna naloga kot zgoraj, le da za centrirane momente

$$z_n^c = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(x_j - z_1)^n, \quad z_1 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j,$$

t.j. oceni

$$\overline{(z_n^c - m_n^c)^2}.$$