Domače naloge iz Verjetnosti za fizike, 2010/2011

Z *so označene rezervirane naloge.

1. * V središču kocke s stranico a imamo skoraj točkast izotropen izvor žarkov γ. Izračunaj verjetnostno porazdelitev dolžin naključno izbranih izsevanih žarkov, ki jih definirajo v kocki.

2. * V središču tetraedra s stranico a imamo skoraj točkast izotropen izvor žarkov γ. Izračunaj verjetnostno porazdelitev dolžin naključno izbranih izsevanih žarkov, ki jih definirajo v tetraedru.

3. * Nekje v krogli polmera r, npr. v razdalji $x < r$ od središča, imamo skoraj točkast izotropen izvor žarkov γ. Izračunaj verjetnostno porazdelitev dolžin naključno izbranih izsevanih žarkov, ki jih definirajo v krogli.

4. * Nekje v osi enoosnega elipsoida s polosema a in b, npr. v razdalji $x < b$ od središča, imamo skoraj točkast izotropen izvor žarkov γ. Izračunaj verjetnostno porazdelitev dolžin naključno izbranih izsevanih žarkov, ki jih definirajo v krogli.

5. * Po kupoli (površini) polkrogle s polmerom r imamo enakomerno premazan izotropen sevalec žarkov γ. Izračunaj verjetnostno porazdelitev po dolžinah tetiv, ki jih naključno izbrani žarki definirajo v polkrogli.

6. * Podobna naloga kot prejšnja, le da je sevalec enakomerno razmazan po osnovnici (ravni krožni robni ploskvi) polkrogle.

7. * Po plašču neskončno dolgega valja s polmerom r imamo enakomerno premazan izotropen sevalec žarkov γ. Izračunaj verjetnostno porazdelitev po dolžinah tetiv, ki jih naključno izbrani žarki definirajo v valju.

8. * Po plašču valja s polmerom r in višino h imamo enakomerno premazan izotropen sevalec žarkov γ. Izračunaj verjetnostno porazdelitev po dolžinah tetiv, ki jih naključno izbrani žarki definirajo v valju.

9. * Po eni od osnovnih ploskev valja s polmerom r in višino h imamo enakomerno premazan izotropen sevalec žarkov γ. Izračunaj verjetnostno porazdelitev po dolžinah tetiv, ki jih naključno izbrani žarki definirajo v valju.

10. * Po osnovni ploskvi stožca s polmerom r in višino h imamo enakomerno premazan izotropen sevalec žarkov γ. Izračunaj verjetnostno porazdelitev po dolžinah tetiv, ki jih naključno izbrani žarki definirajo v stožcu.

11. * Po plaščui stožca s polmerom r in višino h imamo enakomerno premazan izotropen sevalec žarkov γ. Izračunaj verjetnostno porazdelitev po dolžinah tetiv, ki jih naključno izbrani žarki definirajo v stožcu.

12. * Po eni od osnovnih ploskev kocke z robom a imamo enakomerno premazan izotropen sevalec žarkov γ. Izračunaj verjetnostno porazdelitev po dolžinah tetiv, ki jih naključno izbrani žarki definirajo v kockii.

13. * Po eni od osnovnih ploskev tetraedra z robom a imamo enakomerno premazan izotropen sevalec žarkov γ. Izračunaj verjetnostno porazdelitev po dolžinah tetiv, ki jih naključno izbrani žarki definirajo v tetraedru.

14. * Elipso s polosema a in b v ravnini prebada enakomerno žarkovje, ki izvira izotropno iz zelo oddaljenih izvirov. Izračunaj verjetnostno porazdelitev po dolžinah tetiv, ki jih izrežejo naključno izbrani žarki iz elipse.

15. * Enoosni elipsoid s polosema a in b v prostoru prebada enakomerno žarkovje, ki izvira izotropno iz zelo oddaljenih izvirov. Izračunaj verjetnostno porazdelitev po dolžinah tetiv, ki jih izrežejo naključno izbrani žarki iz elipsoida.

16. Elipsa s polosema a in b je na robu premazana z enakomernim sevalcem, ki seva izotropno v ravnini. Izračunaj verjetnostno porazdelitev po dolžinah tetiv, ki jih izrežejo naključno izbrani žarki iz elipse.

17. Krožni kolobar iz dveh koncentričnih krožnic s polmeroma $r_1 < r_2$ v ravnini prebada enakomerno žarkovje, ki izvira izotropno iz zelo oddaljenih izvirov. Izračunaj verjetnostno porazdelitev po dolžinah tetiv, ki jih izrežejo naključno izbrani žarki iz elipse.

18. Varianta prejšnje naloge, če krožnici nista koncentrični.

19. * Krožni kolobar iz dveh koncentričnih krožnic s polmeroma $r_1 < r_2$ je po notranji krožnici enakomerno premazan s sevalcem, ki seva izotropno v ravnini. Izračunaj verjetnostno porazdelitev po dolžinah tetiv, ki jih izrežejo naključno izbrani žarki.

20. Varianta prejšnje naloge, če krožnici nista koncentrični.

21. Krožni kolobar iz dveh koncentričnih krožnic s polmeroma $r_1 < r_2$ je po zunanji krožnici enakomerno premazan s sevalcem, ki seva izotropno v ravnini. Izračunaj verjetnostno porazdelitev po dolžinah tetiv, ki jih izrežejo naključno izbrani žarki.

22. Varianta prejšnje naloge, če krožnici nista koncentrični.

23. V posodi imamo enoatomni plin (npr. Helij) pri temperaturi $T = 300K$. Ujamemo N naključno izbranih atomov plina. Zapiši verjetnostno porazdelitev po skupni energiji ujetih atomov plina! Kolikšne so njena varianca, poševnost in eksces?

24. Naključno izbrana dvoatomna molekula ima Maxwellsko porazdeljen vektor hitrosti, t.j. vse tri komponente hitrosti so porazdeljene po Gausovi porazdelitvi z variacijo $\sigma(\propto \sqrt{T})$. Potem se molekula razleti na dva enaka kosa (atoma), tako da je v težiščnem opazovalnem sistemu razcep izotropen, razpadna produkta pa odletita vsaksebi s hitrostjo v^*. Izračunaj verjetnostno porazdelitev po vektorju hitrosti za razpadna produkta v laboratorijskem koordinatnem sistemu.

25. Podobna naloga kot prejšnja, le da se tokrat molekula razleti (izotropno) na tri enake razpadne produkte, ki imajo v težiščnem koordinatnem sistemu vsi velikost hitrosti v^*.

26. * Predprejšnja naloga v dveh dimenzijah.

27. Predprejšnja naloga v dveh dimenzijah.

28. n-stopenjska binarna bomba. Recimo, da imamo bombo sestavljeno iz 2^n koščkov tako, da sta po dva koščka zapakirana v mini bombico, po dve mini bombici v malo večjo bombo, in tako naprej, na n nivojih. V t-tem trenutku, kjer gre t od 1 do n, raznese bombico na t-tem nivoju, tako da oba koščka - v težiščnem opazovalnem sistemu - odletita izotropno vsaksebi z nasprotnima hitrostima velikosti v_0. Zapiši verjetnostno porazdelitev vektorja hitrosti kosov bombe na t-tem nivoju, za poljuben $t = 1, \ldots, n$.

29. Zgornja naloga v dveh dimenzijah.

30. * Kocko s stranico a vržemo na črtast papir vzporednih črt z razmikom b. Izračunaj verjetnost da kocka pade na eno od črt.

31. * Kovanec s polmerom r vržemo na črtast papir vzporednih črt z razmikom b. Izračunaj verjetnost da kocka pade na eno od črt.

32. * Elipsasto ploščico s polosema a in b vržemo na črtast papir vzporednih črt z razmikom c. Izračunaj verjetnost da kocka pade na eno od črt.

33. * Iglo dolžine l vržemo na karo-papir s črtami v kvadratni mreži z razmikom a. Zapiši verjetnost, da igla pade na (vsaj) eno izmed črt mreže.

34. * Iglo dolžine l vržemo na karo-papir s črtami v kvadratni mreži z razmikom a. Naj bo $l < a$. Zapiši verjetnost, da igla pade na dve pravokotni črti mreže (na "križ").

35. * Kovanec s polmerom r vržemo na karo-papir s črtami v kvadratni mreži z razmikom $a > 2r$. Zapiši verjetnost, da igla pade na (vsaj) eno izmed črt mreže.

36. * Kovanec s polmerom r vržemo na karo-papir s črtami v kvadratni mreži z razmikom $a > 2r$. Zapiši verjetnost, da igla pade na dve pravokotni črti mreže (na "križ").

37. * Gaussov slučajni vektor. Naj bo $\vec{x}$ n-dimenzionalni realni vektor, ki je porazdeljen po kombinirani Gaussovi porazdelitvi z gostoto

$$w(\vec{x}) = C \exp(-\vec{x}.A\vec{x}),$$

$A = A^T$ pa je pozitivna simetrična realna matrika $n \times n$. Določi konstanto C, tako da bo gostota pravilno normalizirana in poišči (kovariančno) matriko korelacijskih koeficientov $M_{i,j} = \overline{x_i x_j}$.

38. Gaussov kompleksni slučajni vektor. Naj bo $\vec{x}$ n-dimenzionalni kompleksni vektor, ki je porazdeljen po kombinirani Gaussovi porazdelitvi z gostoto

$$w(\vec{x}) = C \exp(-\vec{x}.A\vec{x}),$$

$A = A^\dagger$ pa je pozitivna hermitska kompleksna matrika $n \times n$. Določi konstanto C, tako da bo gostota pravilno normalizirana in poišči (kovariančno) matriko korelacijskih koeficientov $M_{i,j} = \overline{x_i^* x_j}$. Izračunaj še $\overline{x_i x_j}$.

39. Transport nevtronov. Nevtron s hitrostjo v se siplje v snovi tako, da so dolžine poti (med sosednjimi sipanji) statistično neodvisne in porazdeljene eksponento s povprečno prosto potjo l, sipalni proces pa naj bo takšen, da se nevtron siplje enakomerno v prostorski kot 2π v smeri naprej, njegova hitrost pa se pri tem ne spremeni. To pomeni, da kot med vektorjem hitrosti pred in po sipanju ni nikoli večji od $\pi/2$. Izračunaj (ali simuliraj) difuzijsko konstanto za nevtrone $D = \lim_{t\to\infty} \overline{|\vec{r}(t) - \vec{r}(0)|^2}/6t$.

40. Dvodimenzionalna varianta prejšnje naloge.

41. Varianta predprejšnje naloge, kjer pa se nevtroni sipajo vedno v prostorski kot 2π nazaj, t.j. kot med začetno in končno hitrostjo je vedno večji od $\pi/2$.

42. Dvodimenzionalna varianta prejšnje naloge.

43. Zgibanje polimera. Imejo dolgo molekulo iz N členov, kjer si vse vezi lahko predstavljamo kot palčke dolžine l, atome, oz. atomske skupine, pa kot kolena, ki so povsem prosto gibljiva. Izračunaj povprečno kvadratno dolžino polimera $\overline{|\vec{r}_N - \vec{r}_0|^2}$.

44. * Varianta prejšnje naloge, kjer pa naj sosednje kemijske vezi zahtevajo fiksen kot, npr $\alpha = \pi/2$.

45. Varianta prejšnje naloge v ravnini. Tu sta za vsak par vezi samo dve možnosti, levo ali desno 'koleno'.

46. * Slučajna hoja na krožnici. Krožnico razdelimo na N predalčkov. Slučajni sprehajalec naj se sprehaja tako, da v enem koraku skoči za en predalček z verjetnostjo p in za dva predalčka z verjetnostjo q, z verjetnostjo $1 - 2p - 2q$ pa naj ostane na mestu. Izračunaj časovno konstanto s katero se porazdelitev seseda v ravnovesno enakomerno porazdelitev po dolgem času. Ali obstaja preprost limitni rezultat za velike N?

47. Asimetrična slučajna hoja na krožnici. Podobna naloga kot zgornja, le da zdaj skačemo vedno samo v eni smeri, za en ali dva predalčka, z ustreznima verjetnostima p in q, z verjetnostjo $1 - p - q$ pa ostanemo na mestu. Poleg časovne konstante izračunaj še povprečno hitrost s katero se vrtimo naokrog.

48. Slučajna hoja po šahovnici. Figura se po šahovnici premika slučajno, in sicer tako, da v vsakem koraku napravi en korak na sosednje polje iste barve z verjetnostjo p, na sosednje polje druge barve z verjetnostjo q, in s preostalo verjetnostjo ostane na mestu. Če vemo, da smo v začetku na enem od belih polj (z enako verjetnostjo za vsa bela polja), izračunaj po kolikšnem času je razlika verjetnosti, da smo na belem ali črnem polju manjša od $\epsilon = 0.01$. Kako je ta ças odvisen od ϵ?

49. Slučajna hoja po neskončni šahovnici. Figura se po neskonňic šahovnici premika slučajno, in sicer tako, da v vsakem koraku napravi en korak na sosednje polje iste barve z verjetnostjo p, na sosednje polje druge barve z verjetnostjo q, s preostalo verjetnostjo $1-4p-4q$ pa ostane na mestu. Izračunaj difuzijsko konstanto za horizontalni premik figure, $D_x = \lim_{t\to\infty} \overline{(x_t - x_0)^2}/(2t)$, ter verjetnost da se figura po času t vrne na izhodiščno mesto.

50. * Naključna hoja po ogliščih kocke. Robotek se naključno pomika po ogliščih kocke tako, da v vsakem koraku z verjetnostjo $p/3$ zdrsne v eno od sosednjih oglišč, z verjetnostjo $1-p$ pa ostane na mestu. Izračunaj relaksacijski čas, za verjetnostno porazdelitev robotka po ogliščih in morda še ostale zanimive lastnosti tega markovskega procesa.

51. Podobna naloga kot prejšnja, le da se robotek pomika med oglišči oktaedra, verjetnosti za prehod pa so $p/4$ in verjetnost za obstanek na mestu $1-p$.

52. Podobna naloga kot prejšnja, le da se robotek pomika med oglišči tetraedra, verjetnosti za prehod pa so $p/3$ in verjetnost za obstanek na mestu $1-p$.

53. Varianta prejšnje naloge za dodekaeder.

54. Varianta prejšnje naloge za ikozaeder.

55. Napravili smo generator naključnih štveil, ki generira enakomerno porazdeljena cela števila $x \in \{1,\ldots,b\}$, npr. $b = 10$. Zaporedna števila so med seboj statistično nekorelirana, z enim samim pogojem. Dve zaporedni naključni števli nista nikoli enaki (torej štveila se generirajo brez ponovitev). Zapisi porazdelitev vsote n zaporednih taksnih naključnih števil $z = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Kolikšno je povprečje in kolikšna standardna deviacija?

56. Podobna naloga kot prejšnja, le da imamo med sosednjima naključnima številoma x_i in x_{i+1} sledečo vez, $|x_i - x_{i+1} \leq c$, npr. $c = 1$.

57. Naj bo $x_j = 1, \ldots, N$ množica identično porazdeljenih slučajno neodvisnih spremenljivk s povprečjem $\bar{x}$ in variacijo σ^2, npr. neodvisnih izmerkov neke fizikalne količine. Izmed teh N vrednosti izžrebamo povsem slučajno in nedvisno dve podmnožici, npr. $\{p(1), p(2), \ldots, p(M)\} \subseteq \{1, \ldots, N\}$ in $\{q(1), q(2), \ldots, q(L)\} \subseteq \{1, \ldots, N\}$ (ne nujno disjunktni!), ter definirajmo delni povprečju

$$x_M = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} x_{p(j)}, \quad x_L = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L} x_{q(j)}.$$

Izračunaj korelacijski koeficient med delnma povprečjema x_M in x_L.

58. Naj bo $x_j, j = 1, \ldots, N$ množica identično porazdeljenih neodvisnih slučajnih spremenljivk z znanimi momenti $m_n = \overline{x^n}$. Definiraj eksperimentalne ocene za momente kot slučajne spremenljivke

$$z_n = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j^n.$$

Oceni efektivne napake, oz. variacijo ocen momentov $\sigma_n^2 = \overline{(z_n - m_n)^2}$.

59. Podobna naloga kot prejšnja, le da za centrirane momente m_n^c

$$z_n^c = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(x_j - z_1)^n, \quad z_1 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j,$$

t.j. oceni $\sigma_n^2 = \overline{(z_n^c - m_n^c)^2}$.

60. Naj bosta x in y dve slučajno neodvisni spremenljivki, porazdeljeni enakomerno na intervalu $[-a, a]$. Definiraj novi slučajni spremenljivki $u = \min\{x, y\}, v = \max\{x, y\}$ in izračunaj korelacijski koeficient r_{uv}.

61. Podobna naloga kot prejšnja, le da za Gaussovo porazdeljeni spremenljivki x, y, s povprečjem $\bar{x}$ in s.d. σ.

62. Predprejšnja naloga za tri enakomerno porazdeljene slučajne spremenljivke x, y, z, in $u = \min\{x, y, z\}$, $v = \max\{x, y, z\}$.

63. Predprejšnja naloga za tri Gaussovo porazdeljene slučajne spremenljivke x, y, z, in $u = \min\{x, y, z\}$, $v = \max\{x, y, z\}$.

64. * V posodi imamo N_1 zelenih, N_2 rdečih in N_3 modrih kroglic. Povsem po naključju izvlečemo M kroglic. Zapiši verjetnost, da je med njimi natanko m_1 zelenih, m_2 modrih in m_3 rdečih ($m_1 + m_2 + m_3 = M$).

65. * Varianta prejšnje naloge za kroglice k barv. Podatki so $N_1, N_2, \ldots N_k$ kroglic v posodi in $m_1, m_2, \ldots, m_k$ izvlečenih kroglic.

66. * V vrečki imamo N_1 rdečih in N_2 modrih bonbonov. Otrok seže v vrečko in vzame bonbon. Če je rdeče barve, ga obdrži, če pa je modre, ga vrže nazaj v vrečko. Postopek ponavlja toliko časa, da dobi vse rdeče bonbone. Izračunaj ali simuliraj verjetnostno porazdelitve po število posegov v vrečko.

67. * Varianta prejšnje naloge, pri čemer želi otrok dobiti samo $M < N_1$ rdečih bonbonov. Izračunaj pa zgolj povprečno število posegov v vrečko, in morda še variacijo tega števila.

68. * Prostorsko diskretni-časovno zvezni markovski stohastični proces: "symmetric simple exclussion process" (SSEP). Vzemimo verižico n mest, ki so lahko ali zasedena ali prosta (torej v stanjih 0 ali 1). Predstavljamo si lahko, da imamo na vsakem zasedenem mestu po eno žogico, ki lahko v vsakem trenutku (dt) skoči naključno na eno od sosednjih mest (torej za največ eno mesto).

    V trenutku dt, vsaka od v zogic skoči z verjetnostjo dt na levo (a samo, če je levo mesto prosto), z verjetnostjo dt na desno (spet samo, če je desno mesto prosto) in z verjetnostjo $1 - 2dt$ (oziroma $1 - dt$ ali 1) ostane na mestu.

    Na prvo mesto $i = 1$, če je prosto, pa skoči iz okolice nova žogica z verjetnostjo αdt, oz. pod pogojem, da je žogica že na prvem mestu z verjetnostjo βdt ta izgine v okolico. Prav tako na zadnje mesto $i = n$, če je prosto, skoči nova žogica iz okolice z verjetnostjo γdt, oz. pod pogojem, da je žogica že na zadnjem mestu z verjetnostjo δdt ta izgine v okolico. Takšen model, določen s parametri sklopitve z okolico $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ imenujemo neravnovesni odprti SSEP in se skupaj s svojimi bližnjimi sorodniki uporablja kot zanimiv in koristen model pri obravnavi raznih kolektivnih pojavov v statistični fiziki in tudi širše, npr. v biologiji, modeliranju prometa ipd.

Obravnavaj SSEP s parametri $\beta = 0, \gamma = 0, \delta = \alpha$ in konstruiraj (neravnovesno) stacionarno stanje (t.j. lastni vektor ustrezne markovske matrike z lastno vrednostjo 1), za nekaj vrednosti n. Lahko poskusiš ekzaktno za $n = 2, 3, \ldots$, ali pa numerično za večje n. Mimogrede, v literararaturi lahko najdeš tudi točne, sicer precej komplicirane rešitve, za poljuben n. Zanimivo fizikalno vprašanje je npr. kako izgleda - v stacionarnem stanju - tok delcev, t.j. število žogic na časovno enoto, ki prepotujejo skozi sistem iz leve na desno, ali pa verjetnost, da najdemo žogico na i-tem mestu, kot fukcijo i ("gostotni profil"). Drugo zanimivo vprašanje je, kako se obnaša relaksacijski čas, npr. kot fukncija n, za neko nestacionarno začetno porazdelitev.