Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

Verjetnost v fiziki 2012/13 — tutorstvo #1

Kombinatorika

Avtorja: Peter Ferjančič, Boštjan Kokot

Mentor: izr. prof. dr. Simon Širca

4. oktober 2012

1 Cardanov met dveh kock

1.1 Ozadje

Girolamo Cardano, po izobrazbi zdravnik, je bil rojen okoli leta 1500 v Milanu in je bil patološki hazarder (mimogrede, beseda hazard izhaja iz arabske besede "al zahr", ki pomeni kocke), ki jih je kot amaterski matematik tudi rad raziskoval. V svojem življenju je napisal 131 tiskanih del, trdil je da jih je spisal, a zažgal, še 170 in zapustil ob svoji smrti še 111 neobjavljenih rokopisov. Bil je tudi eden prvih ljudi, ki je napisal avtobiografijo. Naslovljena je bila *De vita propria liber* (*Življenja mojega knjiga*) in je omenjala pojem poštene kocke v svojih delih. Kot prvi je uvedel uporabo ulomkov za zapis verjetnosti nekega dogodka, kar se uporablja še dandanes.

1.2 Naloga: Uvod v met kocke

Sledimo njegovim ugotovitvam s sledečimi vprašanji na temo poštene šeststrane kocke (njegov zapis z ulomki je simpatičen):

- Kolikšna je verjetnost, da vržemo na pošteni igralni kocki 1 ali 2?
- Koliko je verjetnost, da vržemo 1 ali 2 piki trikrat zapored?
- Koliko je verjetnost, da vržemo 1 ali 2 piki vsaj v enem od dveh metov kocke?
- Pri metu dveh kock, katera vsota pik na obeh kockah je najbolj pogosta?

1.3 Rešitev

- $\frac{1}{3}$
- $(\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27}$
- $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$ ali $1 - (\frac{2}{3})^2 = \frac{5}{9}$
- naverjetnejši met 7, z verjetnostjo $\frac{6}{36}$

2 Chevalier de Méré

2.1 Ozadje

Antoine Gombaud, znan predvsem kot Chevalier de Méré, je bil francoski pisatelj 17. stoletja. Prevzel ga je Paciolijev problem (naslednja naloga) in z močno intuicijo za verjetnost se ga je poskušal lotiti. Svoje izkušnje je prenesel na naslednji primer:

2.2 Naloga: Met šestic

Klasična kockarska igra v tistih časih je imela sledeča pravila: dva igralca (recimo jima napadalec in branilec) sta stavila enaki vsoti. Napadalec je vrgel igralno kocko štirikrat in če je v vsaj enem metu padla šestica, je pobral celotno vsoto, drugače jo je pobral branilec. Izračunaj, kdo ima boljšo verjetnost za zmago.

2.3 Rešitev

Najlažje izračunamo verjetnost, da napadalec ne vrže šestice v štirih metih. Verjetnost za nekaj takega je $(\frac{5}{6})^4 = 0.48225$, torej malenkost pod 0.5. V tej igri ima torej napadalec malenkost boljše možnosti za zmago.

2.4 Kako je de Méré ustvaril novo igro

Chevalier de Méré ni bil zadovoljen s to različice igre, saj je le štirikratni met kocke dopuščal precej statistične svobode — v kolikor se šestica nebi pojavila recimo 20 metov zapored, bi napadalec hitro izgubil precejšnjo vsoto. Da bi omejil možnost za lastno izgubo, je razmišljal tako:

Verjetnost, da vrže napadalec dve šestici zapored ($P = 1/36$) je 1/6 verjetnosti, da vrže eno šestico ($P = 1/6$). V prejšnjem delu naloge smo pokazali, da so za napadalčevo prednost potrebni štirje meti, česar se je de Méré dobro zavedal. Sklepal je torej, da če stavi na met dveh šestic naenkrat v $4 \cdot 6 = 24$ metih bo z dosti večjo zanesljivostjo zaslužil.

2.5 Naloga: Ali je de Méré obogatel?

Preveri njegovo razmišljanje. Kolikšna je verjetost, da v 24 metih vržeš dve šestici naenkrat z dvema kockama?

2.6 Rešitev

Nalogo rešujemo identično kot 3. točko 1. naloge: verjetnost, da ne vrže dveh šestic, je $\frac{35}{36}^{24} = 0.508596$, torej malenkost več kot pol.

2.7 Naloga: Kdaj bi de Méré obogatel?

De Méré je s to igro izgubil zadosti denarja, da je empirično dokazal svojo napako. Na koliko metov bi moral staviti, da bi statistično zmagoval igre?

2.8 Rešitev

Velja: $(\frac{35}{36})^n = 0.5$. Torej:

$$n = \frac{\log(0.5)}{\log(\frac{35}{36})} = 24.6$$

Moral bi torej staviti na 25 metov. So close and yet so far away.

3 Paciolijev problem

3.1 Ozadje

Luca Pacioli je bil frančiškanski menih in eden najboljših matematikov svojega časa (1445-1517), ki je med drugim tudi postavil temelje računovodstva. Njegovo najbolj znano pisano delo je *Summa de arithmetica, geometria et proportionalita*. Med svojim delom širom Evrope je srečal Leonarda da Vincija, s katerim sta hitro postala dobra prijatelja. Leonardo je sicer imel močno intuicijo za geometrijo in razmerja, ampak šele Pacioli ga je uvedel v svet prave matematike.

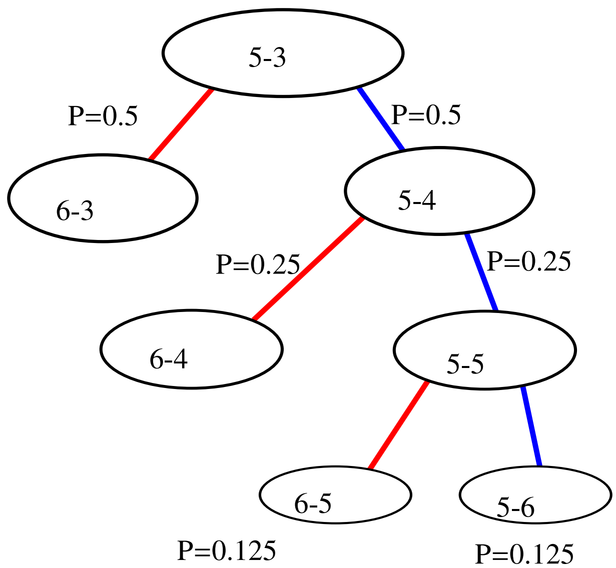
Paciolli je v svoji knjigi postavil problem, znan pod imenom "Problem of points", ki je predstavljal nerešljiv problem za matematike nadaljnih slabih dvesto let, ko sta ga s skupnimi močmi rešila Blaise Pascal in Piere de Fermat.

3.2 Naloga: Problem of the points

A in B igrata pošteno igro na srečo. Dogovorila sta se, da igrata dokler eden od njiju ne zmaga šestih iger, ko pobere celoten nagradni izkupiček. Igro zaključita predčasno, ko A zmaga pet iger in B tri. Poskušaj v manj kot 200 letih ugotoviti, kako naj si pošteno razdelita dobitke.

3.3 Rešitev

V trenutku, ko končata z igro, je rezultat 5-3, torej A potrebuje še eno, B pa tri zmage da pobere skupni dobitek. Poglejmo, kako se lahko igra odvija naprej.



Torej: verjetnost, da zmaga igralec B (modri) je 0.125, verjetnost da zmaga A (rdeči) je 0.875. Pravično je, da si v takem razmerju tudi razdelita dobitek.

4 Izpit iz VF 31. 1. 2012, 3. naloga

4.1 Naloga

Zastopanost krvnih skupin 0, A, B oziroma AB v celotni populaciji je

$$0 : 44\%; \quad A : 42\%; \quad B : 10\%; \quad AB : 4\%$$

a) Iz populacije naključno izberemo dve osebi. Kolikšna je verjetnost, da imata osebi enako krvno skupino, in kolikšna verjetnost, da imata drugačni skupini? b) Iz populacije naključno izberemo štiri osebe. Izračunaj verjetnost, da je v tej četverici zastopanih natanko k različnih krvnih skupin, kjer je $k = 1, 2, 3, 4$.

4.2 Rešitev

4.2.1 a

$$P = 0.44^2 + 0.42^2 + 0.1^2 + 0.04^2 = 0.3816 \,.$$

4.2.2 b

Za $k = 1$:

$$P = 0.44^4 + 0.42^4 + 0.1^4 + 0.04^4 = 0.0687\ .$$

za $k = 2$: imamo možnosti da so 3 A skupine in 1 B skupina, ali pa 2 A in 2 B:

$$\begin{aligned} P_2 &= \sum_{i<j} \binom{4}{2} p_i^2 p_j^2 + \sum_{i\neq j} \binom{4}{3} p_i^3 p_j^1 \\ &= 6(p_1^2p_2^2 + p_1^2p_3^2 + p_1^2p_4^2 + p_2^2p_3^2 + p_2^2p_4^2 + p_3^2p_4^2) \\ &\quad +4(p_1p_2^3 + p_1p_3^3 + p_1p_4^3 + p_2p_1^3 + p_2p_3^3 + p_2p_4^3 + p_3p_1^3 + p_3p_2^3 + p_3p_4^3 + p_4p_1^3 + p_4p_2^3 + p_4p_3^3) \\ &= 0.2308 + 0.3665 = 0.5973\ . \end{aligned}$$

za $k = 4$:

$$P_4 = p_1p_2p_3p_4 4! = 0.0177\ .$$

za $k = 3$

$$P_3 = 1 - P_1 - P_2 - P_4 = 0.3163\ .$$

5 Koze in avti

5.1 Naloga

V znanem primeru iz knjige *The curious incident of the dog in the nighttime* je predstavljena TV igra, kjer lahko tekmovalec zadne avto (dobro) ali kozo (slabo). Tekmovalec ima v igri na voljo na izbiro troja vrata: A, B in C. za enimi izmed njih se nahaja avto, za dvemi pa je koza. Tekmovalec ne ve, kje se kaj nahaja, voditelj oddaje pa ve. Ko si igralec izbere ena vrata (npr. A) mu voditelj oddaje pokaže kaj je za enimi izmed vrat, ki jih tekmovalec ni izbral (v tem primeru torej B ali C, recimo da odpre vrata C), za katerimi ve, da je koza. Po tem ima tekmovalec možnost, da zamenja vrata za še neodprta (B) ali pa ostane pri prvotno izbranih (A). Kaj se tekmovalcu bolj splača? Ali zamenjava sploh vpliva na verjetnost zadetka nagrade?

5.2 Rešitev

Tekmovalcu se seveda bolj splača zamenjati vrata. Da izbere pravilna vrata takoj na začetku ima verjetnost $\frac{1}{3}$. Takrat voditelj oddaje odpre ena vrata, za katerimi je zagotovo koza, torej imajo vrata, ki so zaprta in neizbrana verjetnost $\frac{2}{3}$ da se za njimi nahaja avto. Torej samo v primeru, ko takoj na začetku tekmovalec izbere vrata z avtom ($P = 1/3$) bo ob zamenjavi dobil kozo, v ostalih primerih pa bo ob zamenjavi dobil avto.

6 Risk — domača naloga

6.1 Naloga

Pri strateški družabni namizni igri *Risk* je cilj zavojevanje sveta preko bitk. Ob zadostnem številu vključenih figur napadalec vrže 3 igralne kocke, branilec pa 2. V parih se ločeno primerja najvišja meta napadalca in branilca, ter druga najvišja meta obeh igralcev. V kolikor je napadalec vrgel več kot branilec, le-ta izgubi figuro, če pa je met branilca enak ali večji metu napadalcu, figuro izgubi napadalec.

Primer: Napadalec vrže $2, 4, 5$, branilec vrže $3, 5$. Najprej primerjamo najvišja meta, torej 5 in 5 in eno enoto izgubi napadalec. Druga najvišja meta sta 4 in 3 in enoto izgubi branilec.

Če bi meti bili $4, 5, 6$ ter $5, 6$ bi napadalec izgubil 2 enoti, če bi meti bili $3, 4, 5$ in $3, 4$ bi dve enoti izgubil branilec. Poskušaj ugotoviti, kaj se v tej igri bolj splača, braniti ali napadati?

6.2 Rešitev

Malenkost bolj se splača napadati.