Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

Verjetnost v fiziki 2012/13 — tutorstvo #2

Primerjava Zveznih in Diskretnih Porazdelitev

Avtorja: Peter Ferjančič, Boštjan Kokot

Mentor: izr. prof. dr. Simon Širca

11. oktober 2012

Uvod-teorija

Za *zvezne porazdelitve* velja:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0\,, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= 1\,, \\ P(a \leq X \leq b) &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,, \\ F(x) = P(X \leq x) &= \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Tu *f(x)* predstavlja *gostoto porazdelitve verjetnosti*, *F(x)* pa ustrezno kumulativno porazdelitev.

Za *diskretne porazdelitve* velja:

$$\begin{aligned} f(x_i) &\geq 0\,, \\ \sum_{i=1}^{n} f(x_i) &= 1\,, \\ P(X = x_i) &= f(x_i)\,, \\ F(x) = P(X \leq x) &= \sum_{x_i \leq x} f(x_i)\,. \end{aligned}$$

Glavna razlika med zgornjima dvema porazdelitvama je, da se je pri zvezni porazdelitvni nesmiselno spraševati po verjetnosti za nahajanje porazdeljene količine v eni točki (če se po tem sprašujemo, vedno dobimo rezultat 0), pri diskretni porazdelitvi pa so količine porazdeljene točkasto (npr. naboj elektrona). Zvezna porazdelitev je lahko limitni primer diskretne, še zlasti kadar imamo pri diskretni porazdelitvi veliko točk (npr. zadetkov), ki dobro popišejo nek interval. Obratno lahko posamezne točke (npr. naboje), ki jih želimo zapisati kot zvezno porazdelitev (npr. gostoto naboja), lahko zapišemo z Diracovimi delta "funkcijami". Primer za gostoto naboja:

$$\varrho(r) = \sum_i e_i \delta(r - r_i)\,.$$

1 Delujoče in pokvarjene elektronske komponente

Kupimo dve elektronski komponenti, od katerih je lahko vsaka delujoča (D) oz. pokvarjena (P). Štirim možnim izidom pripadajo verjetnosti $(P, P) = 0.09$, $(D, P) = (P, D) = 0.21$, $(D, D) = 0.49$. (i) Zapiši posamezne verjetnosti za število delujočih komponent $n = 0, 1, 2$ (npr. $n = 1$ pomeni, da je natanko ena delujoča komponenta). (ii) Zapiši verjetnost, da imamo vsaj eno delujočo komponento.

Rešitev:

(i)
$P(0) = (P, P) = 0.09$
$P(1) = (P, D) + (D, P) = 0.42$
$P(2) = (D, D) = 0.49$

(ii)
Lahko si zamislimo novo spremenljivko I, ki zavzame vrednost 0, ko nobena komponenta ne deluje in

1, ko deluje vsaj ena komponenta (le zaradi lažjega zapisa). Beseda "vsaj" pove, da moramo sešteti verjetnosti, ko delujeta obe komponenti, in verjetnosti, ko deluje ali ena ali druga:
$P(I = 1) = (D, D) + (D, P) + (P, D) = 0.91$
$P(I = 0) = 0.09$

2 Napake v prenosu informacij

Obstaja verjetnost, da bo bit informacije prenešen prek digitalnega sprejemnega signala vseboval napako. Naj bo X enak številu delov z napako v naslednjih štirih prenesenih bitih. Možne vrednosti X so $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Predpostavi verjetnosti $P(X = 0) = 0.6561$, $P(X = 1) = 0.2916$, $P(X = 2) = 0.0486$, $P(X = 3) = 0.0036$, $P(X = 4) = 0.0001$. (i) Preveri, ali so verjetnosti ustrezno normirane. (ii) Določi verjetnost, da bosta vsaj 2 bita brez napake. (iii) Določi verjetnost, da bo vsaj en bit imel napako.

Rešitev:

(i)

$$\sum_i P(x_i) = 1$$

(ii) Da sta vsaj dva bita brez napake, pomeni, da moramo sešteti vse verjetnosti, kjer imamo 2 delujoča bita:

$$\begin{aligned} P(\text{vsaj 2 bita brez napake}) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= 0.6561 + 0.2916 + 0.0486 = 0.9963\,. \end{aligned}$$

(iii)

$$P(\text{vsaj 1 bit nedelujoč}) = 1 - P(X = 0) = 0.3439\,.$$

3 Nečistoče v polprevodniških ploščicah

Verjetnost, da v polprevodniški ploščici najdemo velik delec (nečistočo) je 0.01. Sedaj opravljamo meritve na ploščicah. Zanima nas verjetnost, da bo po $x-1$ delujočih ploščicah x-ta onesnažena. (i) Izračunaj verjetnosti $P(x = 2)$, $P(x = 3)$ in $P(x = 8)$. (ii) Izračunaj $P(x)$ za kateri koli x (za katero koli število izmerjenih ploščic).

Rešitev:

(i) Označimo s s (slabe) tiste ploščice, ki vsebujejo velik delec in z d (dobre) tiste, ki ga ne. Verjetnost, da bomo pri eni analizirani ploščici naleteli na velik delec, je $P(x = 1) = 0.01$ (s). Verjetnost, da bomo pri dveh analiziranih ploščicah naleteli na velik delec, je $P(x = 2) = 0.99 * 0.01$ (ds). Po enakem kopitu $P(x = 3) = (0.99)^2 0.01$ (dds) in $P(x = 8) = (0.99)^7 0.01$ $(ddddddds)$.

(ii) Posplošitev na poljuben x je očitna: $P(x) = (0.99)^{x-1} 0.01$ $(ddd...ds)$.

4 Tok v žici

Naj zvezna naključna spremenljivka X predstavlja tok, izmerjen v tanki bakreni žici (v mA). Predpostavimo, da je mersko območje [0, 20 mA] in da je gostota porazdelitve verjetnosti za x na tem območju

$f(x) = 0.05$ (enakomerna). (i) Kakšna je verjetnost, da bo merjeni tok manjši kot 10 mA? (ii) Kakšna je verjetnost, da bo tok med 5 mA in 20 mA? (iii) Določi kumulativno porazdelitveno funkcijo F, ki ustreza f. (iv) Reši zgornje naloge še za primer $f(x) = 0.005x$ na intervalu [0, 20 mA]. Povsod drugod je $f(x) = 0$.

Rešitev:

(i)

$$P(x \leq 10) = \int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} 0.05\,\mathrm{d}x = 0.5\,.$$

(ii)

$$P(5 \leq x \leq 20) = \int_5^{20} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_5^{20} 0.05\,\mathrm{d}x = 0.75\,.$$

(iii)

$$F(x) = \int_0^{x} f(u)\,\mathrm{d}u = 0.05x\,.$$

Zgornja enačba velja na območju [0,20 mA]. Pod tem območjem zavzame vrednost 0, nad območjem pa vrednost 1. Celotna kumulativna funkcija je potemtakem razdeljena na 3 območja.

(iv)

$$\begin{aligned}
P(x \leq 10) &= \int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} 0.005x\,\mathrm{d}x = 0.005\frac{x^2}{2}\Big|_0^{10} = 0.25\,,\\
P(5 \leq x \leq 20) &= \int_5^{20} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_5^{20} 0.005x\,\mathrm{d}x = 0.005\frac{x^2}{2}\Big|_5^{20} = 0.938\,,\\
F(x) &= \int_0^{x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{x} 0.005x\,\mathrm{d}x = 0.005\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\mathrm{x}} = 0.005\frac{x^2}{2}\,.
\end{aligned}$$

5 Vrtanje lukenj v kovinsko ploščo

Naj x predstavlja premer luknje, zvrtane v kovinsko ploščo. Ciljni premer je 12.5 mm. Večino naključnjih motenj povzroči povečanje premera. Zgodovinski podatki kažejo, da lahko porazdelitev x modeliramo s funkcijo $f(x) = 20\mathrm{e}^{-20(x-12.5)}$ za $x \geq 12.5$. Na območju $x \leq 12.5$ je f enaka 0 (manjši premeri od ciljnega nas ne zanimajo). (i) Če je plošča z luknjo večja od 12.6 mm obravnavana kot odpadna, kolikšen delež plošč v takem primeru zavržemo? (ii) Kolikšen delež plošč ima velikost luknje med 12.5 mm in 12.6 mm? (iii) Določi kumulativno porazdelitveno funkcijo F, ki ustreza f.

Rešitev:

(i)

$$P(x \geq 12.6) = \int_{12.6}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{12.6}^{\infty} 20\mathrm{e}^{-20(x-12.5)}\,\mathrm{d}x = 0.135\,.$$

Vse plošče z luknjo, ki je večja od 12.6, zavržemo, zato moramo integrirati od 12.6 do ∞.

(ii)

$$P(12.5 \leq x \leq 12.6) = \int_{12.5}^{12.6} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{12.5}^{12.6} 20\mathrm{e}^{-20(x-12.5)}\,\mathrm{d}x = 0.865\,,$$

ali lažje

$$P(12.5 \leq x \leq 12.6) = 1 - P(x \geq 12.6) = 0.865\,.$$

(iii)

$$F(x) = \int_{\infty}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\infty}^{x} 20\mathrm{e}^{-20(u-12.5)}\,\mathrm{d}u = 1 - \mathrm{e}^{-20(x-12.5)}\,.$$

Zgornja enačba velja na območju $x \geq 12.5$. Pod tem območjem zavzame F vrednost 0.

6 Planckova formula v skali frekvenc in valovnih dolžin

Tako besedilo kot tudi rešitev te naloge lahko najdete v knjigi I. Kuščer, A. Kodre: *Matematika v fiziki in tehniki* (DMFA - založništvo, Ljubljana, 2006), na str. 270-272. Za zgled sta avtorja vzela spekter, ki ga seva črno telo in je dan s Planckovo formulo:

$$\frac{dj}{d\nu} = \frac{2\pi}{c^2}\frac{h\nu^3}{\exp(h\nu/kT) - 1}\,.$$

(i) Prevedi spektralno gostoto izsevane moči iz frekvenčnega merila v merilo valovne dolžine. (Zamenjaj spremenljivko, po kateri porazdeljujemo izsevano gostoto moči.) (ii) Za obe porazdelitvi določi maksimuma in ju primerjaj. Ali velja $\nu_{max} = \mathrm{c}/\ \lambda_{max}$? Namig: odvajanje. Obe porazdelitvi si tudi grafično predstavi.

Rešitev:

Transformacija spremenljivk pri verjetnih porazdelitvah

Klasični zgled: Planckova formula za sevanje črnega telesa. Spektralna gostota moči na enoto ploščine je (v frekvenčnem merilu)

$$\frac{dj}{d\nu} = \frac{2\pi}{c^2}\,\frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}$$

Kako je to videti v enotah val. dolžine λ? Da ne bi kdo enostavno nadomestil $c = \nu\lambda \longrightarrow \nu = c/\lambda$ in to je to! Ne! Počpa

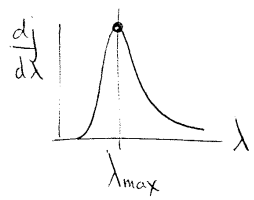
$$\frac{dj}{d\lambda} = \frac{dj}{d\nu}\left|\frac{d\nu}{d\lambda}\right| = \frac{c}{\lambda^2}\frac{dj}{d\nu} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}$$

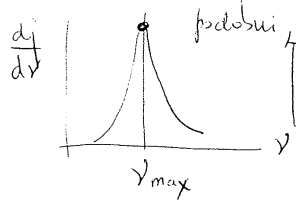
abs. vrednost ker nas ne zanima, kako je interval dolžin, le moč (izsevana vanj)

$$d\nu = -\frac{c}{\lambda^2}\,d\lambda$$

Obe porazdelitvi imata maksimuma na različnih mestih! Videti sta tako podobni, ampak

$$\boxed{\lambda_{max} \neq \frac{c}{\nu_{max}}}\,!$$





ν_{max}: $\quad x \equiv \frac{h\nu}{kT} \qquad \frac{d^2 j}{d\nu^2} = 0 \Rightarrow (x-3)e^x + 3 = 0$

oziroma $\quad x = 3(1-e^{-x})$,

kar lahko rešimo iteratimo in dobimo $x \approx 2.821$. Pri temp. površine Sonca $T = 6000\,K$ to pomeni $\underline{\lambda(\nu_{max}) = 860\,nm\,(IR)}$

λ_{max}: $\quad x \equiv \frac{hc}{\lambda kT} \qquad \frac{d^2 j}{d\lambda^2} = 0 \Rightarrow (x-5)e^x + 5 = 0$

oziroma $\quad x = 5(1-e^{-x})$,

kar reši $x \approx 4.965$ oz. $\underline{\lambda_{max} = 490\,nm}$

(modra svetloba v vidnem delu spektra)

4.10.2011 (prvi dve uri)