Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

Verjetnost v fiziki 2012/13 — tutorstvo #3

Pogojna Verjetnost

Avtorja: Peter Ferjančič, Boštjan Kokot

Mentor: izr. prof. dr. Simon Širca

18. oktober 2012

1 Uvod v pogojno verjetnost

1.1 Intuitivna predstava pogojne verjetnosti

Pri metu šeststrane igralne kocke, kolikšna je verjetnost, da:

- vržemo liho število?
- vržemo število, (strogo) manjše od 4?
- vržemo liho število, pri pogoju da je met (strogo) manjši od 4?
- vržemo liho število, pri pogoju da je met (strogo) večji od 3?

Rešitve

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$

Malce težje, ma ne zelo

V škatli imamo napajalnike, od katerih vemo, da je 5 pokvarjenih, 10 defektnih in 25 delujočih. Pokvarjeni napajalniki enostavno ne delujejo, defektni pa se pokvarijo po 8 urah. Ko naključno vzamemo napajalnik in ga priključimo, le-ta deluje. Kolikšna je verjetnost, da smo vzeli delujoč napajalnik?

Rešitev

$\frac{5}{7}$

Bayesova formula - če postane komplicirano

Če želimo pogojno verjetnost zapisati formalno korektno (kar se izkaže za koristno pri bolj kompliciranih primerih) je zelo koristna Bayesova formula.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Pri čemer se $P(A|B)$ bere kot: verjetnost dogodka A, pri pogoju B.

2 Zabava za sinove

Podjetje, kjer dela Venceslav, organizira zabavni večer za zaposlene s sinovi. Vsi zaposleni z vsaj enim moškim potomcem dobijo vabilo zase in najmlajšega sina. Glede na to, da ima Venceslav dva otroka in je dobil povabilo, kakšna je verjetnost, da ima hčerko?

Rešitev

$\frac{2}{3}$

3 Naloga iz 2. izpita iz VF 2011/12

Napetost U v električnem vezju opišemo z gaussovsko porazdeljeno naključno spremenljivko s povprečjem nič in varianco 10^{-8}. Izračunaj verjetnost, da U preseže vrednost 10^{-4} in verjetnost, da izmerimo $-2 * 10^{-4} \leq U \leq 10^{-4}$. Ob pogoju, da je U pozitivna, kolikšna je (pogojna) verjetnost, da U preseže vrednost 10^4? Izračunaj še pričakovano vrednost $|U|$. Pomagaš si lahko s spodnjo tabelo, ki ustreza normalni porazdelitvi.

x	1	1.64	1.96	2	2.58	7.13
$P(N(0,1) > x)$	15.9%	5%	2.5%	2.27%	0.5%	5×10^{-13}
$P(\|N(0,1)\| > x)$	31.7%	10%	5%	4.55%	1%	10^{-12}

Rešitev

a)

$$P(U > 10^{-4}) = P(z > 1) = 0.159\%$$

b)

$$P(2 * 10^-4 < U < 1 * 10^{-4}) = P(-2 < z < 1)1 - 0.159 - 0.0023 = 0.818$$

c)

$$P(U > 10^{-4}|U > 0) = \frac{P(U > 10^{-4})}{P(U > 0)} = \frac{0.159}{0.5} = 0.318$$

d) Gausova porazdelitev:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

pri čemer je μ središče porazdelitve in σ standardna deviacija. Integriramo:

$$E(|U|) = 2\int_0^\infty U f(U) dU = 10^{-4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

4 Bolezen γ

Da ugotovimo, ali je nek pacient okužen z boleznijo γ, izvedemo krvni test. Ta test ni popoln, saj zazna bolezen le v 99 % primerov, poleg tega pa obstaja tudi 1 % možnost, da bo lažno pozitiven. Če vemo, da je z boleznijo γ okuženih 0.5 % ljudi, kolikšna je verjetnost, da je okužen nekdo, čigar test je pozitiven?

Rešitev

Označimo s črko O dogodek, ko je nekdo okužen in s črko T dogodek, da je test pokazal okužbo. Črka N naj pomeni, da je nekdo neokužen, torej nasprotje od O. Zanima nas torej, kolikšna je verjetnost, da je nekdo okužen, pri čemer je test pozitiven, ali:

$$\begin{aligned} P(O|T) &= \frac{P(OT)}{P(T)} = \frac{P(T|O)P(O)}{P(T|O)P(O) + P(T|N)P(N)} \\ &= \frac{0.99 \cdot 0.005}{0.99 \cdot 0.005 + 0.01 \cdot 0.995} = 0.3322\,. \end{aligned}$$

Torej samo 33 % tistih, ki jim bo krvni test pokazal okužbo, bo bolezen dejansko imelo.

4.1 Ponovitev testa

Preden začnemo z zelo nevarnim zdravljenjem bolezni γ, se je dobro prepričati da ima naš pacient res bolezen, zato ponovimo test, ki je zopet pozitiven. Koliko je v tem primeru verjetnost, da ima pacient bolezen?

Rešitev

$$\begin{aligned} P(O|TT) &= \frac{P(OTT)}{P(TT)} = \frac{P(O|T)^2 P(O)}{P(T|O)^2 P(O) + P(T|N)^2 P(N)} \\ &= \frac{0.99^2 \cdot 0.005}{0.99^2 \cdot 0.005 + 0.01^2 \cdot 0.995} = 0.998\,. \end{aligned}$$

5 Izgubljeno letalo

Nekje nad tropskim pragozdom je izginilo letalo. Raziskovalci so z analizo poleta ugotovili, da je lahko padlo (z enako verjetnostjo) samo na enem izmed treh gosto poraslih območij, ne vedo pa, na katerem. Ko preiskovalci raziščejo neko območje, bstaja verjetnost $1 - \alpha_i$, da najdejo letalo, ki je padlo na to območje, in verjetnost α_i, da letalo spregledajo. Prvi dan preiščejo območje 1, a letala ne najdejo. Kolikšna je verjetnost, da se letalo nahaja v i-tem območju, pri čemer je $i = 1, 2, 3$?

Rešitev

i=1

Naj bo L_i dogodek, da se letalo nahaja v i-tem območju in N dogodek, da letalo med iskanjem prvega območja ni bilo najdeno.

$$P(L_1|N) = \frac{P(L_1 N)}{P(N)} = \frac{P(N|L_1)P(L_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(N|L_i)P(L_i)} = \frac{\alpha_1 \frac{1}{3}}{\alpha_i \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}}$$

$$P(L_1) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 2}$$

i=2,3

$$P(L_i|N) = \frac{P(L_i N)}{P(N)} = \frac{P(N|L_i)P(L_i)}{\sum_{i=1}^{3} P(N|L_i)P(L_i)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\alpha_i \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}}$$