Energijska enačba

Energija: $e = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho u$

Splošen zapis:
$$\rho \frac{D}{Dt}\left[\frac{1}{2}v^2 + u\right] = -\nabla \cdot (p\vec{v}) - \nabla \cdot \vec{q} - \nabla \cdot (\tau\vec{v}) + \rho\vec{v} \cdot \vec{g}$$

Diferencialna enačba za ohranitev kinetične energije (dobimo jo tako, da gibalno enačbo množimo s hitrostjo):
$$\rho \frac{D}{Dt}\left[\frac{1}{2}v^2\right] = +p\nabla \cdot \vec{\mathrm{v}} + \underline{\tau}: \nabla \cdot \vec{v} + \rho\vec{v} \cdot \vec{g}$$

Enačbo ohranitve notranje energije dobimo tako, da od splošne energijske enačbe odštejemo kinetično energijo:
$$\rho \frac{D}{Dt} u = -p\nabla \cdot \vec{v} - \nabla \cdot \vec{q} - \underline{\tau}: \nabla \cdot \vec{v}$$

Zapis notranje energije s temperaturo fluida:
$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{q} - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \nabla \cdot \vec{v} - \underline{\tau}: \vec{v}$$

Fourierov zakon prevajanja toplote:
$$\nabla \cdot \vec{q} - \lambda\nabla T$$

Poenostavitve energijske enačbe:

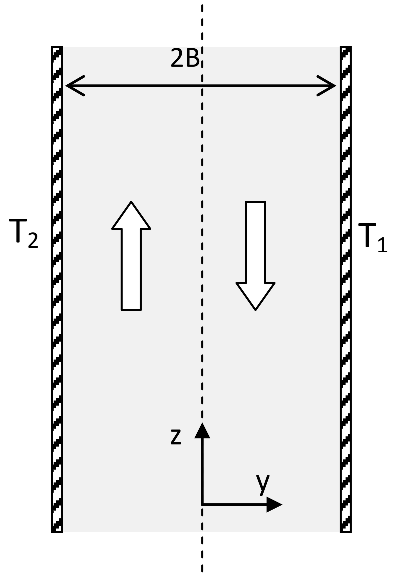
Za idealen plin velja $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{p}{T}$
$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = \lambda\nabla^2 T - p\nabla \cdot \vec{v} + \mu\phi_v$$

Energijska enačba za fluid pri konstantnem tlaku
$$\varrho c_p \frac{DT}{Dt} = \lambda\nabla^2 T + \mu\phi_v$$
$$\varrho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}\right] = \lambda\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}T + \frac{\partial^2}{\partial y^2}T + \frac{\partial^2}{\partial z^2}T\right) + \mu\phi_v,$$

kjer je ϕ_v disipacijska funkcija, ki nastopa zaradi viskoznega gretja

$$\phi = 2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

Naloga 1: Naravna konvekcija



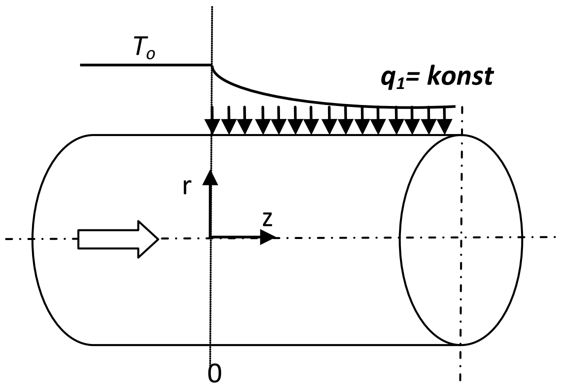
Tekočina med dvema neskončnima vzporednima ploščama z različnima temperaturama T_1 in T_2, ki sta med sabo oddaljeni za 2B, se začne gibati sama od sebe. Predpostavimo stacionaren laminaren tok. Zaradi različnih temperatur plošč ($T_2 > T_1$)bo različna tudi gostota tekočine. Izračunajte temperaturno porazdelitev in porazdelitev hitrosti v y smeri.

1. Splošna energijska enačba za temperaturo pri konstantnem tlaku
   $\rho_{cp}\frac{DT}{Dt} = \lambda\nabla^2 T + \mu\phi$
   in za obravnavani primer:
   $$0 = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

2. Temperaturna porazdelitev po y
   $$T = \frac{1}{\lambda}[C_1 y + C_2]$$
   Z upoštevanjem robnih pogojev $T(-B) = T_2$ in $T(B) = T_1$, aritmetične povprečne temperature $T_{sr=}\frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ in razlike temperatur $\Delta T_=(T_2 + T_1)$, dobimo rešitev temperaturne porazdelitve:
   $$T = T_{sr} - \frac{1}{2}\Delta T\left(\frac{y}{B}\right)$$

3. Splošna gibalna enačba za Newtonsko tekočino v z smeri:
   $$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \varrho g_z$$
   Upoštevamo, da je gostota odvisna samo od temperature, tako da uvedemo relativni volumski raztezek zaradi temperaturnih sprememb pri konstantnem tlaku $\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$ in gostoto zapišemo kot $\rho = \bar{\rho}(1 - \beta(T - \bar{T}))$, kjer sta $\bar{\rho}$ in $\bar{T}$ referenčna gostota in temperatura. V primeru naravne konvekcije je gradient tlaka samo posledica teže tekočine, zato se gibalna enačba zapiše
   $$-\mu\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = \bar{\rho}\beta(T - \bar{T})g$$
   Vstavimo izraz za temperaturno porazdelitev, dvakrat integriramo in upoštevamo, da je volumski pretok v z smeri enak 0 (od tod sledi $\bar{T} = T_{sr}$). Hitrostna porazdelitev je torej:
   $$v_z = \frac{\bar{\rho}\beta g}{12\mu}\Delta T\left(\frac{y^3}{B} - By\right)$$

Naloga 2: Prisilna konvekcija v cevi



Obravnavamo stacionaren, laminaren, osnosimetričen tok nestisljive tekočine v cevi s polmerom R. Na steni cevi dovajamo konstanten toplotni tok q_1. Snovske lastnosti tekočine (ρ, μ, λ, c_p) so konstantne. Zapišite energijsko enačbo in določite porazdelitev temperaturnega polja fluida po prerezu in vzdolž cevi.

1. Energijska enačba
   $$\rho_{cp} v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right]$$

2. Pri izpeljavi temperaturnega polja upoštevamo rešitev hitrostnega polja za laminaren tok v cevi (Hagen-Poiseuillev tok)
   $$v_z = v_{max}\left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]$$
   in upoštevamo naslednje brezdimenzijske spremenljivke:
   $\theta = \frac{T-T_0}{q_1 R}\lambda,\ \xi = \frac{r}{R}, \gamma = \frac{z\lambda}{\rho c_p v_{max} R^2}.$
   Dobimo zapis energijske enačbe z brezdimenzijskimi spremenljivkami:
   $$(1-\xi^2)\frac{\partial\theta}{\partial\gamma} = \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)$$
   Upoštevamo robne pogoje:
   RP1: $r = 0;\ \xi = 0\ \rightarrow \theta_{končna}$
   RP2: $r = R;\ \xi = 1\ \rightarrow \frac{\partial\theta}{\partial\xi} = -1$
   RP3: $z = 0;\ \gamma = 0\ \rightarrow \theta = 0$

   Enačbe s temi robnimi pogoji ne moremo rešiti, zato uvedemo limitno rešitev pri $\gamma \gg 0$ in $z \gg 0$ ter podamo nov robni pogoj v obliki dodatne enačbe, kjer predpostavimo, da temperatura linearno narašča vzdolž cevi, oblika temperaturnega profila pa se ohranja:
   RP4: $\theta(\gamma,\xi) = C_o\gamma + \psi(\xi)$

   Toplotni tok, ki ga dovajamo skozi plašč cevi je enak razliki toplotnih tokov skozi presek cevi:
   $-2\pi R \cdot z \cdot q_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^R c_p\rho(T-T_o)v_z r dr\, d\theta$ oz. $-\gamma = \int_0^1 (1-\xi^2)\xi d\xi$

   Z upoštevanjem robnih pogojev RP1 do RP4 sledi rešitev temperaturnega polja v brezdimenzijskih spremenljivkah:
   $$\theta = -4\gamma - \xi^2 - \frac{1}{4}\xi^4 + \frac{7}{24}$$