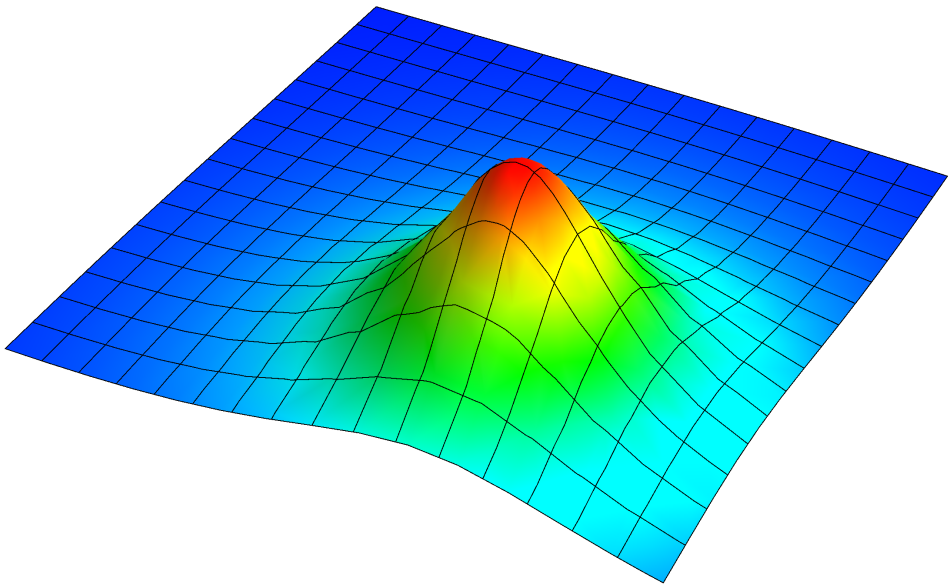
Gašper Žerovnik

Luka Snoj

Vladimir Radulović

Andrej Trkov

Merjenje doznega polja v prostoru – iskanje radioaktivnega vira



Ljubljana, november 2013

revizija 0

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Jedrska tehnika
Jedrska, reaktorska in radiacijska fizika

Revizija: 0

1. izdaja, november 2013

Kazalo

1 Namen vaje

Namen vaje je s pomočjo detektorja poiskati radioaktiven vir, ki je skrit v prostoru (na tleh). Ker je problem ekvivalenten iskanju maksimuma v 2D, pri tem pa uporabiti eno izmed sistematičnih metod iskanj.

2 Teoretične osnove

2.1 Radioaktiven vir in širjenje sevanja po prostoru

Kot radioaktiven vir uporabimo (v prvem približku) točkast vir, ki oddaja (tudi) žarke gama, za katere vemo, da so (poleg nevtronov) najbolj prodorni.

Intenziteta sevanja oz. hitrost doze, ki jo merimo z detektorjem, v okolici točkastega vira v praznem prostoru pada s kvadratom razdalje, kar je logična posledica zakona o ohranitvi števila delcev/mase/energije/itd.

Kadar je med nami (detektorjem) in virom fizična ovira, manjša hitrost doze ne pomeni nujno večje oddaljenosti. V snovi namreč intenziteta sevanja približno eksponentno pada (atenuira) z debelino. Približno zato, ker pri interakciji gama žarkov s snovjo prihaja tudi do sipanja ter nastanka sekundarnih žarkov gama (angl. build-up), ponavadi z nižjo. Pri večjih debelinah zato intenziteta sevanja pada počasneje kot eksponentno, efektivno se približa potenčni obliki.

Tretji efekt, ki ga ne smemo zanemariti, je povratno sipanje od sten sobe. En del gama žarkov se absorbira v steni, del gre skozi njo, preostanek pa se sipa nazaj v sobo. Ker stena ne predstavlja izvora sevanja, temveč le "robni pogoj" (linearno kombinacijo 1. in 2. reda), povratnega sipanja ne moremo zaznati v obliki maksimuma doznega polja, temveč le kot njegovo počasnejše zmanjševanje v okolici sten.

2.2 Iskanje (lokalnega) maksimuma v 2D

Iskanje radioaktivnega vira na površini z detektorjem sevanja je ekvivalentno matematičnemu iskanju maksimuma v 2D. Ob predpostavki, da je iskani vir edini izvor doznega polja v omejenem prostoru, zadošča poiskati lokalni maksimum. Večina znanih numeričnih metod namreč konvergira k enem od lokalnih ekstremov in ne zagotavlja, da bo našla globalen ekstrem.

2.2.1 Metoda iskanja na mreži

Gre za najbolj primitivno metodo. Pri njej naš prostor enakomerno razdelimo na kvadratno mrežo. Razmiki med točkami ustrezajo vnaprej določeni natančnosti (ločljivosti).

Metoda je zelo počasna. Njena edina prednost je, da je edina (od naštetih) 100 % zanesljiva v primeru, ko imamo v našem iskanem območju več kot en maksimum (izvor).

2.2.2 Bisekcija v 2D

Metoda bisekcije se lahko uporablja tudi za iskanje lokalnega maksimuma (ali minumuma), vendar se v primerjavi z iskanjem ničle nekoliko zakomplicira – iskanje lokalnega ekstrema je namreč ekvivalentno iskanju ničle odvoda (gradienta) funkcije in ne funkcije same.

V eni dimenziji predpostavimo, da obstaja lokalni maksimum na intervalu $(x-2h, x+2h)$. Vrednost funkcije moramo (namesto v treh) izračunati v petih točkah, npr. $f(x-2h)$, $f(x-h)$, $f(x)$, $f(x+h)$ in $f(x+2h)$.

- Če je $f(x-2h) < f(x-h) > f(x)$, je lokalni maksimum zagotovo nekje na intevalu $(x-2h, x)$.
- Če je $f(x-h) < f(x) > f(x+h)$, je lokalni maksimum zagotovo nekje na intevalu $(x-h, x+h)$.
- Če je $f(x) < f(x+h) > f(x+2h)$, je lokalni maksimum zagotovo nekje na intevalu $(x, x+2h)$.
- *Če je $f(x-2h) > f(x-h)$ in $f(x+h) < f(x+2h)$ in $(f(x-h) > f(x)$ ali $f(x) < f(x+h))$, nimamo nobenega zagotovila, da na intervalu $(x-2h, x+2h)$ obstaja lokalni maksimum.* **Temu**

primeru se avtomatsko lahko izognemo, če v 1. koraku iteracije velja $f(x-2h) < f(x) > f(x+2h)$.

V principu se lahko zgodi, da je hkrati zadoščeno 1. in 3. pogoju zgoraj. To pomeni, da imamo v območju vsaj dva lokalna maksimuma (ker imamo samo en radioaktiven vir, v našem primeru tega ne pričakujemo).

V 2D se zadeva izdatno zakomplicira, saj moramo funkcijo izračunati v 25(!) točkah, narediti pa moramo (do) 9 primerjav srednje točke z okoliškimi 8(!) točkami. Zato je že v 2D priporočljiva uporaba drugih metod, ki so numerično bistveno učinkovitejše.

2.2.3 Gradientna metoda

Gradientna metoda je optimizacijska metoda 1. reda. V principu je povsem enostavna. Izberemo začetno točko $\vec{r}_0$ in v njeni okolici izračunamo (izmerimo) gradient. Naslednji približek za lokalni maksimum nato iščemo v smeri gradienta. Za iskanje ekstrema na premici lahko izberemo poljubno metodo za iskanje ekstrema enodimenzionalne funkcije (npr. bisekcijo ali tangentno metodo). V primerjavi z metodo bisekcije njena učinkovitost skokovito narašča s številom dimenzij prostora. V primeru radialno simetrične funkcije metoda skonvergira že v prvem koraku (npr. točkast izvor v praznem prostoru).

V primeru, ko funkcija f ni analitična, lahko odvode aproksimiramo s končnimi diferencami (zadošča 1. red). V dveh dimenzijah uporabimo naslednje formule:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k} \tag{2}$$

2.2.4 Newtonova metoda

Po Newtonovi metodi funkcijo f lokalno aproksimiramo s kvadratno funkcijo in na vsakem koraku "eksaktno" poiščemo ekstrem te aproksimacije. Gre torej za optimizacijsko metodo 2. reda. Očitno velja, da bolj kot je funkcija podobna kvadratni, hitreje bo Newtonova metoda konvergirala. (V primeru radioaktivnega vira imamo, če zanemarimo ovire v prostoru, opravka z INVERZNO kvadratno funkcijo.)

Za izvedbo metode potrebujemo začetno točko $\vec{r}_0$. Naslednjo točko določimo po formuli:

$$\vec{r}_{i+1} = \vec{r}_i + [Hf(\vec{r}_i)]^{-1} \cdot \mathrm{grad}\, f(\vec{r}_i), \tag{3}$$

kjer je

$$Hf = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Hessova matrika,

$$\mathrm{grad}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \tag{5}$$

pa gradient funkcije f.

V primeru, ko funkcija f ni analitična, lahko odvode aproksimiramo s končnimi diferencami (npr. simetričnimi 2. reda). V dveh dimenzijah uporabimo naslednje formule:

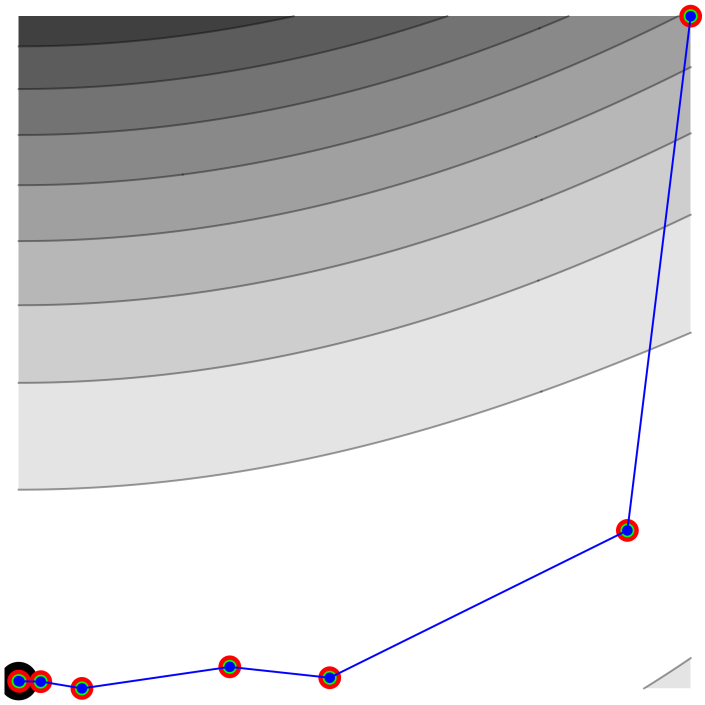
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+h,y) - f(x-h,y)}{2h} \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x+h,y) - 2f(x,y) + f(x-h,y)}{h^2} \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{f(x+h,y+k) - f(x+h,y-k) - f(x-h,y+k) + f(x-h,y-k)}{4hk}. \tag{8}$$

Na vsakem koraku moramo torej funkcijo izračunati (v našem primeru izmeriti) v devetih točkah.

Metodo iteriramo, dokler ne dosežemo ekstrema znotraj vnaprej predpisane natančnosti.



Slika 1: Primer iskanja ekstrema po Newtonovi metodi v 2D.

2.2.5 Metoda "glavne osi" (angl. Principal Axis Method)

Pri metodi "glavne osi" se lahko izognemo računanju odvodov, kar je ugodno, če funkcije (oz. polja) niso podane analitično (kot v našem primeru).

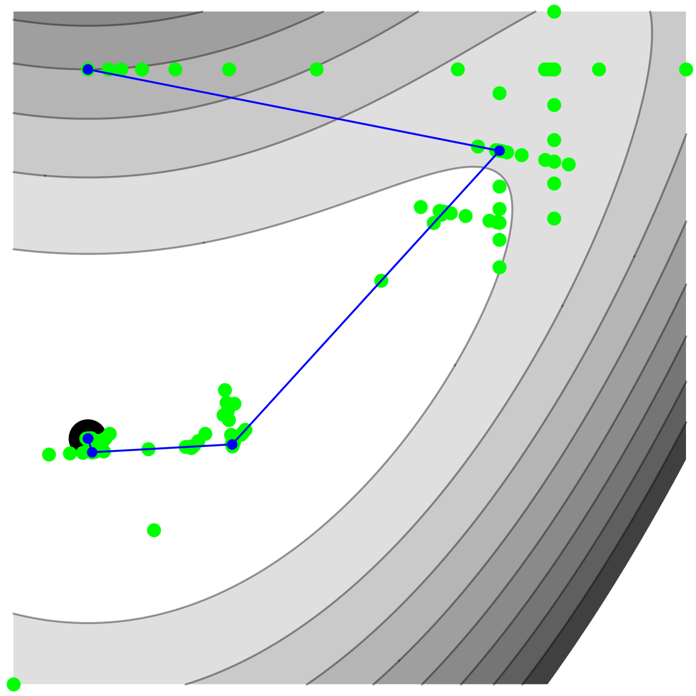
Pri n-dimenzionalnem problemu izberemo začetno točko $\vec{r}_0$ in n linearno neodvisnih (ne nujno pravokotnih) smeri $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\ldots$, $\vec{u}_n$. Na vsakem koraku novo točko $\vec{r}_i$ poiščemo z maksimizacijo (minimizacijo) funkcije na premici v smeri $\vec{u}_i$, ki gre skozi točko $\vec{r}_{i-1}$, ter zabeležimo $v_i = u_{i+1}$. Za iskanje ekstrema na premici lahko izberemo poljubno metodo za iskanje ekstrema enodimenzionalne funkcije (npr. bisekcijo ali tangentno metodo). Ko dobimo točko $\vec{r}_n$, nadomestimo $\vec{u}_n$ z $\vec{r}_n - \vec{r}_0$ in iteracija se konča.

Smeri nove iteracije določimo na podlagi matrike $V = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$, lahko z njeno diagonalizacijo, v praksi pa se je za bolj učinkovito izkazala SVD dekompozicija. (Zaradi enostavnosti lahko na vajah uporabimo diagonalizacijo – lastne vektorje 2D matrike lahko izračunamo s kalkulatorjem.)

Metodo iteriramo, dokler ne dosežemo ekstrema znotraj vnaprej predpisane natančnosti.

2.2.6 Metoda "zdrave pameti"

Pri metodi "zdrave pameti" gre za kombinacijo zgoraj naštetih metod in nekaterih drugih, ki niso zajete zgoraj (nekatere med njimi so tudi relativno težko opisljive). Učinkovitost metode zelo variira, ponavadi je učinkovita v preprostih primerih, včasih pa tudi popolnoma odpove.



Slika 2: Primer iskanja ekstrema po metodi "glavne osi" v 2D.

3 Naloga

Naša naloga bo s pomočjo detektorja ionizirajočega sevanja poiskati radioaktiven vir, ki je skrit nekje na tleh prostora. Pri tem uporabimo eno od uveljavljenih numeričnih metod iskanja lokalnega ekstrema.

4 Oprema

- **(Skrit) radioaktiven vir.** Položen bo na nekje na tla, tako da se problem iskanja vira v prostoru reducira na dve dimenziji.
- **Detektor ionizirajočega sevanja.**
- **Meter.**
- **Kalkulator.** (Še bolje Mathematica ali podoben program.)

5 Postopek meritve

Najprej definiraj koordinatni sistem, fizično označi izhodišče in koordinatne osi. Izberi eno izmed metod, opisanih v poglavju 2.2 "Iskanje (lokalnega) maksimuma v 3D", ki se ti zdi najbolj učinkovita, in jo začni sistematično izvajati. Poišči radioaktivni vir! (Iskanje z očmi ni dovoljeno!:)

Meritev bomo ponovili dvakrat ali trikrat pri različnih postavitvah vira. Vsakič uporabi drugo metodo iskanja!

6 Obdelava rezultatov

Natančno opiši postopek meritve in vse rezultate. Katera metoda optimizacije je v tem primeru po tvojem mnenju najučinkovitejša in zakaj?

Literatura

[1] F. Cvelbar, “Merjenje ionizirajočega sevanja,” DMFA.

[2] R. Fletcher, “Practical methods of optimization (2nd ed.),” New York: John Wiley & Sons. ISBN 978-0-471-91547-8, 1987.

[3] R.P. Brent, “Algorithms for Minimization without Derivatives,” Dover, 2002 (Original edition 1973).