



---

UNIVERZA V MARIBORU  
TEHNIŠKA FAKULTETA  
STROJNIŠTVO

Andro Alujevič

# ELASTO-PLASTOMEHANIKA

Maribor, 1991

UNIVERZA V MARIBORU

TEHNIŠKA FAKULTETA

STROJNIŠTVO

# ELASTO-PLASTOMEHANIKA

ANDRO ALUJEVIČ

MARIBOR, 1991

Na podlagi mnenja Republiškega sekretariata za kulturo je učbenik oproščen plačevanja davka na promet proizvodov.

Naslov publikacije: ELASTO-PLASTOMEHANIKA  
Vrsta publikacije: Skripta  
Avtor: red.prof.dr Andro Alujevič  
Recenzenta: red.prof.dr Maks Oblak  
red.prof.dr Andrej Umek  
Lektor: prof. Erna Leš  
Naklada: 500 izvodov  
Tisk: Tehniška fakulteta Maribor

# Predgovor

Pred dvanajstimi leti je na tedanji Visoki tehniški šoli v Mariboru izšlo zbrano gradivo o elastomehaniki, kot se je od 1973 predavala na strojništvu v 3. letniku vseh usmeritev - konstrukterjem, energetikom in proizvodnim tehnologom. Skupaj z manjkajočim poglavjem o plastomehaniki, kakor tudi z osnovami postopkov končnih in robnih elementov, sem sedaj pripravil novo dopolnjeno izdajo v obliki skript za potrebe pouka strojništva na Tehniški fakulteti v Mariboru.

Skripta posvečam spominu pokojnega prof.dr.Ervina Preloga, ki mi je bil učitelj tega predmeta.

Maribor, 1991

Avtor

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Napetostni tenzor</b>	<b>7</b>
2.1	Ravnovesna enačba . . . . .	8
2.2	Zasuk napetostnega tenzorja . . . . .	10
2.3	Poševna ravnina . . . . .	13
2.4	Glavne napetosti . . . . .	14
2.5	Napetostni grafi . . . . .	17
2.6	Največje strižne napetosti . . . . .	17
2.7	Oktaedrične napetosti . . . . .	21
2.8	Odklonske napetosti . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Deformacijski tenzor</b>	<b>25</b>
3.1	Deformacijska enačba . . . . .	27
3.2	Združljivost . . . . .	29
3.3	Neelastični raztezki . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Konstitutivni zakon</b>	<b>35</b>
4.1	Reologija in modeliranje . . . . .	35
4.2	Posplošeni Hookov zakon . . . . .	37
4.2.1	Ravninsko deformacijsko stanje . . . . .	41
4.2.2	Ravninsko napetostno stanje . . . . .	41
4.3	Navier - Laméjeve enačbe . . . . .	42
4.4	Beltrami-Mitchellove enačbe . . . . .	43
4.4.1	Beltrami-Mitchell za ravninsko napetostno stanje . . .	44
4.4.2	Beltrami-Mitchell za ravninsko stanje deformacij . . .	46

5	Ortogonalne krivočrtne koordinate	47
5.1	Diferencialni operatorji . . . . .	50
5.2	Osnovne enačbe . . . . .	52
5.3	Valjni koordinatni sistem . . . . .	54
5.4	Krogelni koordinatni sistem . . . . .	57
6	Radialni problemi	59
6.1	Mehanske napetosti v cevi . . . . .	59
6.2	Mehanske napetosti v krogli . . . . .	61
6.3	Napetosti v polnem valju in polni krogli . . . . .	63
6.4	Termične napetosti v valju in krogli . . . . .	64
6.5	Centrifugalne napetosti v valju . . . . .	66
6.6	Krčni nased dveh obročev . . . . .	70
6.7	Napetosti v obročih spremenljive debeline . . . . .	72
6.8	Transverzno in polarno izotropni valji . . . . .	76
7	Airyjev postopek	83
7.1	Reševanje s polinomi . . . . .	86
7.2	Fourierova metoda reševanja . . . . .	89
7.3	Reševanje s Fourierovo vrsto . . . . .	93
7.4	Airyjev postopek v polarnih koordinatah . . . . .	96
7.5	Postopek končnih razlik . . . . .	101
8	Novejše numerične metode	105
8.1	Končni elementi . . . . .	105
8.2	Robni elementi . . . . .	109
9	Plastomehanika	113
9.1	Kriterij tečenja . . . . .	113
9.2	Potek plastifikacije . . . . .	116
9.3	Raztezanje debelostene krogle . . . . .	120
9.4	Raztezanje debelostene cevi . . . . .	123
9.5	Plastifikacija obroča spremenljive debeline . . . . .	126
9.6	Plastični upogib nosilca . . . . .	131
9.7	Torzija okroglega prereza . . . . .	132
9.8	Drzne črte pri plastifikaciji . . . . .	133
	Literatura . . . . .	141

# 1. Uvod

Kadar je strojni del obremenjen z zunanji silami in/ali momenti, lahko tudi s temperaturnimi razlikami, težnostjo, centrifugalnim pospeškom ipd., je njegovo obnašanje odvisno tudi od lastnosti snovi (homogenost, izotropnost, reologija itd.). Če se pri tem trdno telo deformira elastično, se po sprostitvi bremen vrne v prvotno obliko. Kadar pa nastopi (lokalno ali v večjem območju) plastična deformacija, ostane po sprostitvi ali stalna sprememba oblike ali zaostale napetosti. Ustrezni konstitutivni zakon je v približku linearen pri elastičnosti in bilinearen pri elasto-plastičnosti (Slika 1.1), kar za enoosni primer palice, obremenjene na tlak ali na vlek (nateg), podaja preprosta zveza (če je  $\sigma_0$  meja pričetka tečenja snovi)

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \sigma < \sigma_0 \quad (1.1)$$

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{E_t}{1 - \frac{E_t}{E}}\varepsilon_p, \quad \sigma > \sigma_0 \quad (1.2)$$

kjer sta  $E$  elastični modul in  $E_t$  tangentni modul.

Nauk o trdnosti (1.letnik) ne daje dovolj točnih obrazcev za izračun napetosti in deformacij v ploskovnih in prostorskih telesih, pa tudi sicer so bile formule večinoma poenostavljene, npr. za dolge nosilne elemente. V elasto-plastomehaniki bomo zato izhajali iz polnega polja pomikov in sil, ki sta vektorja v kartezičnem sistemu.

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \quad (1.3)$$

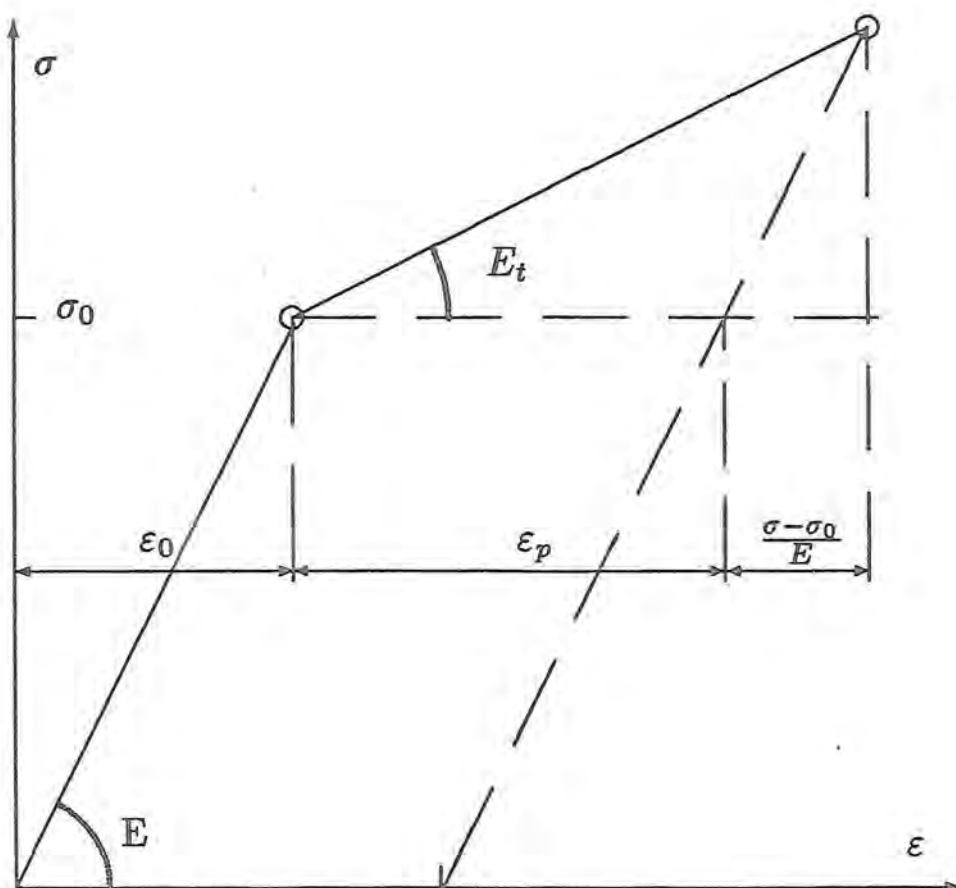
$$\vec{f} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k} \quad (1.4)$$

Napetostni in deformacijski tenzor lahko definiramo kot diadni produkt dveh vektorjev ( $\underline{T}$  naj pomeni bodisi  $\underline{\sigma}$  ali  $\underline{\varepsilon}$  oziroma splošno tenzor, ki je kvadratna matrika z določenim fizikalnim pomenom)

$$\underline{T} = \vec{p} \vec{q}^* \quad (1.5)$$

$$\vec{p} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k} \quad (1.6)$$

$$\vec{q} = q_x \vec{i} + q_y \vec{j} + q_z \vec{k}, \quad (1.7)$$



Slika 1.1:  $\sigma \varepsilon$  diagram



tako da dobimo matrični zapis tenzorja

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} p_x q_x, & p_x q_y, & p_x q_z \\ p_y q_x, & p_y q_y, & p_y q_z \\ p_z q_x, & p_z q_y, & p_z q_z \end{bmatrix} \neq \underline{T}^* \quad (1.8)$$

kar v splošnem primeru ni simetričen tenzor. Lahko pa vsak tenzor razstavimo na njegovo simetrično in asimetrično komponento, to je

$$\underline{T} = \frac{\underline{T} + \underline{T}^*}{2} + \frac{\underline{T} - \underline{T}^*}{2} = \underline{\Phi} + \underline{\Omega} \quad (1.9)$$

kjer npr. pri deformacijah  $\underline{\Phi}$  predstavlja dilatacije,  $\underline{\Omega}$  pa rotacije togega telesa, ki nič ne prispevajo k preoblikovanju telesa. Pri napetostih je  $\underline{\Omega} = 0$ , medtem ko  $\underline{\Phi}$  posameznega tenzorja pogosto razstavimo na povprečen in deviatoričen delež. Ker je  $\underline{\Phi} = \underline{\Phi}^*$ , ima ta tenzor tri realne lastne vrednosti (glavne napetosti oziroma glavne deformacije) pri zavrtitvi koordinatnega sistema v smer, ko izginejo strižne komponente. Pri napetostih je to avtomatično izpolnjeno, pri deformacijah pa je šele po odštetju rotacij togega telesa.

Ker velja za vektorje rotacijsko pravilo

$$\vec{p}' = \underline{R} \vec{p}, \quad \vec{q}' = \underline{R} \vec{q} \quad (1.10)$$

je zaradi transpozicije

$$(\vec{q}')^* = (\underline{R} \vec{q})^* = \vec{q}^* \underline{R}^* \quad (1.11)$$

in zato

$$\vec{p}' (\vec{q}')^* = \underline{R} \vec{p} \vec{q}^* \underline{R}^* \quad (1.12)$$

ali za rotacijo tenzorja

$$\underline{T}' = \underline{R} \underline{T} \underline{R}^* \quad (1.13)$$

kar bomo uporabili v 2.poglavju pri določevanju glavnih napetosti. Poleg diadnega poznamo tudi skalarni in vektorski produkt vektorjev

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = p_x q_x + p_y q_y + p_z q_z \quad (1.14)$$

$$\vec{p} \times \vec{q} = (p_y q_z - p_z q_y) \vec{i} + (p_z q_x - p_x q_z) \vec{j} + (p_x q_y - p_y q_x) \vec{k} \quad (1.15)$$

V naslednjem zapisu bomo uporabili tudi vektor  $\vec{\nabla}$  ("nabla")

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (1.16)$$

in pomenijo  $\vec{\nabla} \cdot = \text{div}$ ,  $\vec{\nabla} = \text{grad}$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2$  (Laplace), diferencialne operatorje.

Med veličinami stanja telesa veljajo enačbe, ki povezujejo 18 podatkov (15 neznank in 3 znanke - kjer je telo vpeto ali podprto, so neznane reakcije). Te enačbe so v elastomehaniki podane kot:

#### a) Ravnovesje

$$\vec{\nabla} \cdot \underline{\sigma} + \vec{f} = 0, \quad \underline{\sigma} = \underline{\sigma}^* \quad (1.17)$$

#### b) Kinematika

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^*}{2}, \quad \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^* \quad (1.18)$$

#### c) Konstitutivna zveza

$$\underline{\sigma} = \underline{E} (\underline{\varepsilon} - \alpha T \underline{\delta}) \quad (1.19)$$

kjer je modul elastičnosti

$$\underline{E} = E_{ijkl} = \lambda \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{kj}) \quad (1.20)$$

in sta Laméjevi konstanti:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (1.21)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{- strižni modul} \quad (1.22)$$

Za jeklo, ki ima Youngov modul  $E = 210. \text{ GPa}$  in Poissonovo število  $\nu = 0.3$ , dobimo ustrezni vrednosti  $\lambda = 120. \text{ GPa}$  in  $\mu = 80. \text{ GPa}$ . Lahko pa za zapis konstitutivne zveze uporabimo tudi kompresivni modul

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (1.23)$$

katerega vrednost pri omenjenem jeklu je  $K = 175. \text{ GPa}$ . Tako dobimo Hookov zakon v obliki

$$\underline{\sigma} = \sigma_v \underline{\delta} + \underline{S} = 3 K \varepsilon_v \underline{\delta} + 2 \mu \underline{e} \quad (1.24)$$

kjer so deviatorične napetosti in deviatorične deformacije nastale z odštetjem povprečnih (volumskih) napetosti oziroma dilatacij

$$\underline{S} = \underline{\sigma} - \sigma_v \underline{\delta}, \quad \sigma_v = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (1.25)$$

$$\underline{e} = \underline{\varepsilon} - \frac{\varepsilon_v}{3} \underline{\delta}, \quad \varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (1.26)$$

Skupek enačb (1.17) do (1.19) brez upoštevanja termičnih prispevkov lahko združimo v enovito Navier-Laméjevo enačbo, ki ima naslednji zapis

$$\nabla^2 u_i + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x_i} + \frac{f_i}{\mu} = 0 \quad (1.27)$$

Možna rešitev te enačbe je Galerkinov vektor  $G_i$ , s katerim dobimo pomike

$$u_i = \nabla^2 G_i - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 G_j}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1.28)$$

tako da velja biharmonska enačba

$$\nabla^4 G_i + \frac{f_i}{\mu} = 0 \quad (1.29)$$

vendar je njeno reševanje ponavadi nemogoče, kajti robni pogoji so podani kot sile in/ali pomiki.

Poleg vsega so pri reševanju še določeni potrebni in zadostni pogoji (kompatibilnostne enačbe). Za enkrat povezana območja so to tako imenovane St. Venantove (deformacijske) enačbe,

$$\text{rot} (\text{rot } \underline{\varepsilon})^* = 0 \quad (1.30)$$

ki jih pravtako lahko s pomočjo konstitutivnega zakona (v elastomehaniki) prepisemo v tako imenovane Beltrami-Mitchelove (napetostne) enačbe, ki pa jih tukaj v uvodu niti simbolično ne bomo zapisali.

Vse podane enačbe, z izjemo Hookovega konstitutivnega zakona, veljajo tudi v plastomehaniki, ki nastopi po prekoračitvi kriterija tečenja (1.2). Seveda moramo za ploskovne in prostorske primere uporabiti primerjalne napetosti, ki jih ovrednotimo n.pr. po Misesu ali Tresci. Nadaljnje obnašanje gradiva v plastičnem področju sledi ustreznemu zakonu, kot je n.pr. Prandtl-Reussova relacija ipd.

V naslednjih poglavjih bodo poleg podrobne teorije elasto-plastičnosti podani tudi nekateri, predvsem radialni problemi (valj, kroglja), ki so rešljivi analitično, medtem ko bomo za dvo in trirazsežne primere uporabili predvsem novejšo numerične postopke (končni in robni elementi).

## 2. Napetostni tenzor

Iz nauka o trdnosti poznamo definicijo, da je sila/prerez=napetost, kar seveda velja integralno samo za čisti tlak in vlek (nateg). Razlikovati moramo tudi med normalnimi in strižnimi komponentami napetosti. Zato so obrazci pri upogibu, strigu in torziji drugačni.

V splošnem moramo upoštevati spreminjanje napetosti po prerezu, ki je definiran s svojo velikostjo in normalo

$$\vec{a} = a \vec{n} \quad (2.1)$$

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k} \quad (2.2)$$

$$\vec{n} \vec{n}^* = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (2.3)$$

Splošna napetost je lahko definirana kot vektor

$$\vec{p} = \lim \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta a} \quad (2.4)$$

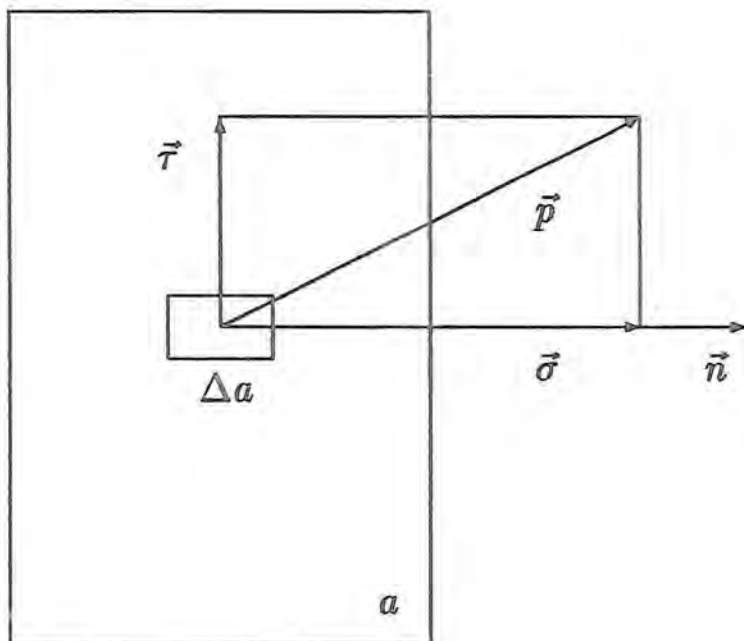
$$\vec{p} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k} \quad (2.5)$$

Ker moramo razlikovati med normalnimi (pravokotnimi) napetostmi, ki delujejo ortogonalno na ravnino prereza, torej v smeri normale, in strižnimi napetostmi, ki se pojavljajo v ravnini prereza, pod pravim kotom glede na normalo prereza, velja naslednja zveza (Slika 2.1)

$$\vec{p} = \vec{\sigma}_n + \vec{\tau}_n \quad (2.6)$$

Z razstavitvijo na koordinatne smeri dobimo v prostoru devet komponent napetosti (med njimi jih je šest med seboj neodvisnih), npr.:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$ , ki sestavljajo

$$\vec{p} = \underline{\sigma} \vec{n} \quad (2.7)$$



Slika 2.1: Napetosti v prerezu

S pomočjo diadnega produkta (1.5) lahko zapišemo napetostni tenzor v obliki

$$\underline{\sigma} = \vec{p} \vec{n}^* \quad (2.8)$$

in so zato posamezne projekcije napetosti v koordinatnih smereh

$$\sigma_x = p_x n_x, \quad \sigma_y = p_y n_y, \quad \sigma_z = p_z n_z, \quad \tau_{xy} = p_x n_y \dots \quad (2.9)$$

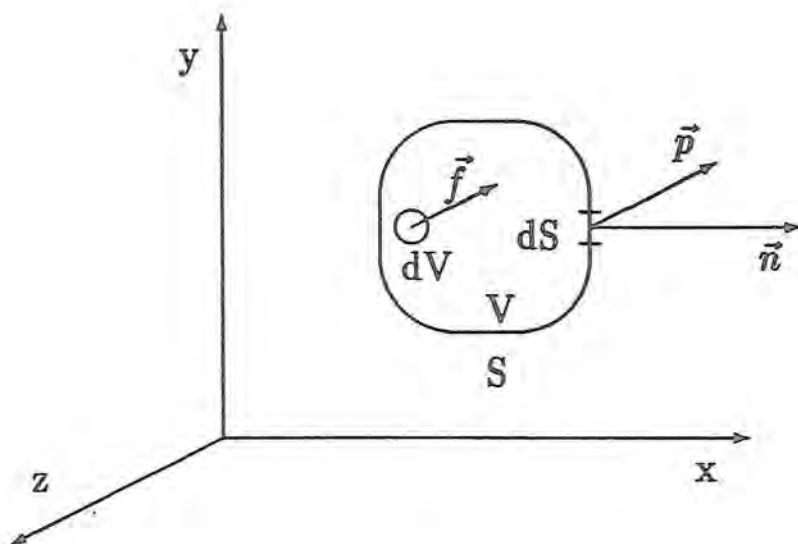
## 2.1 Ravnovesna enačba

Bilanca vseh površinskih sil  $\vec{p}$  in prostorskih sil  $\vec{f}$  v telesu  $V$  s površino  $S$  (Slika 2.2) je podana z enačbo

$$\iint \vec{p} dS + \iiint \vec{f} dV = 0 \quad (2.10)$$

in zaradi veljavnosti obrazca (2.7)

$$\iint \underline{\sigma} \vec{n} dS + \iiint \vec{f} dV = 0 \quad (2.11)$$



Slika 2.2: Površinske in prostorninske sile

Po Gaussovem divergenčnem teoremu

$$\int \int \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS = \int \int \int \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \, dV \quad (2.12)$$

velja namesto enačbe (2.11) tudi

$$\int \int \int (\vec{\nabla} \cdot \underline{\sigma} + \vec{f}) \, dV = 0 \quad (2.13)$$

oziroma tudi za vsak del telesa  $dV$ , tako dobimo

$$\vec{\nabla} \cdot \underline{\sigma} + \vec{f} = 0 \quad (2.14)$$

ali drugače zapisano

$$\sigma_{mn,n} + f_m = 0 \quad (2.15)$$

in v komponentni obliki

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \quad (2.18)$$

Ravnovesje navorov (momentov) daje dodatne enačbe ("vzvodno" pravilo), pri čemer so za preprečitev rotacije telesa potrebne naslednje zveze

$$(\tau_{xy} dy) dx = (\tau_{yx} dx) dy \quad (2.19)$$

$$(\tau_{yz} dz) dy = (\tau_{zy} dy) dz \quad (2.20)$$

$$(\tau_{zx} dx) dz = (\tau_{xz} dz) dx \quad (2.21)$$

oziroma preprosteje

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (2.22)$$

kar pomeni, da je napetostni tenzor vedno simetričen

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^* \quad (2.23)$$

z rotorjem

$$\underline{\Omega} = \frac{\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*}{2} = 0 \quad (2.24)$$

Zaradi te lastnosti so vse tri lastne vrednosti (glavne napetosti) realna števila, ko izginejo strižne napetosti v treh posebnih, med seboj ortogonalnih smereh.

## 2.2 Zasuk napetostnega tenzorja

Zanimajo nas napetosti v poljubni ravnini (prerezu), ki je podana z normalo

$$\vec{n} = \cos(\alpha) \vec{i} + \cos(\beta) \vec{j} + \cos(\gamma) \vec{k} \quad (2.25)$$

kjer velja

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1 \quad (2.26)$$

Zaradi rotacijskega pravila (1.13), to je za napetostni tenzor,

$$\underline{\sigma}' = \underline{R} \underline{\sigma} \underline{R}^* \quad (2.27)$$

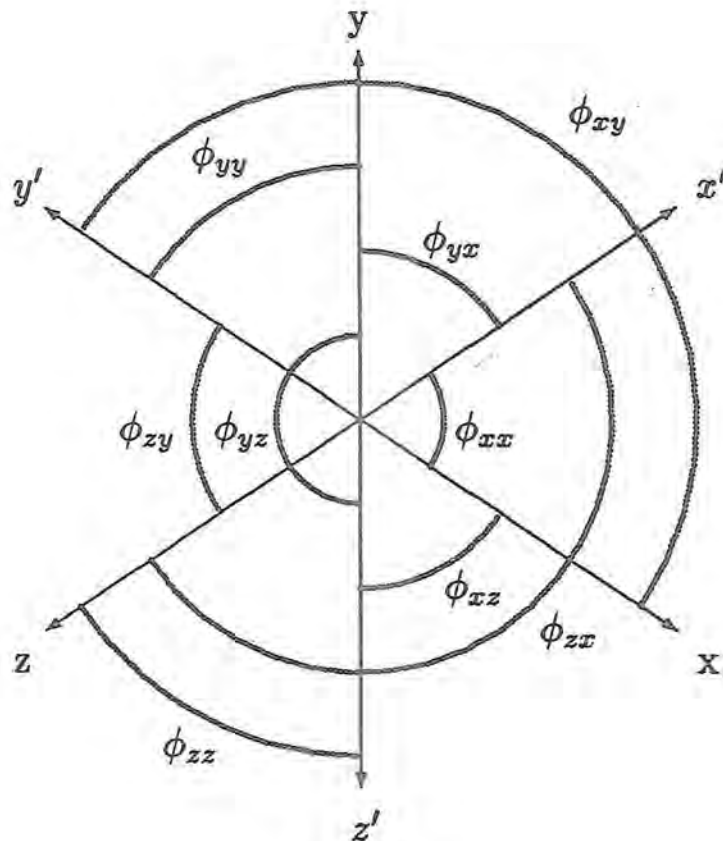
dobimo z uporabo rotacijske matrike



$$\underline{R} = \begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{yx} & r_{yy} & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{zy} & r_{zz} \end{bmatrix} \neq \underline{R}^* \quad (2.28)$$

kjer so  $r_{mn}$  ( $m, n = x, y, z$ ) smerni cosinusi med novimi in starimi osmi (Slika 2.3).

$$r_{mn} = \cos(\phi_{mn}), \quad \phi_{mn} \neq \phi_{nm}, \quad r_{mn} \neq r_{nm}, \quad (m \neq n) \quad (2.29)$$



Slika 2.3: Vmesni koti pri rotaciji koordinatnega sistema

Po izvršenem matričnem množenju (2.27) z (2.28) dobimo po komponentah ob upoštevanju simetrije tenzorja napetosti (2.23)

$$\sigma'_x = \sigma_x r_{xx}^2 + \sigma_y r_{xy}^2 + \sigma_z r_{xz}^2 + 2(\tau_{xy} r_{xy} r_{xx} + \tau_{xz} r_{xz} r_{xx} + \tau_{yz} r_{yz} r_{xy}) \quad (2.30)$$

$$\sigma'_y = \sigma_x r_{yx}^2 + \sigma_y r_{yy}^2 + \sigma_z r_{yz}^2 + 2(\tau_{xy} r_{yy} r_{yx} + \tau_{xz} r_{yz} r_{xy} + \tau_{yz} r_{yz} r_{yy}) \quad (2.31)$$

$$\sigma'_z = \sigma_x r_{zx}^2 + \sigma_y r_{zy}^2 + \sigma_z r_{zz}^2 + 2(\tau_{xy} r_{zy} r_{zx} + \tau_{xz} r_{zz} r_{zx} + \tau_{yz} r_{zz} r_{zy}) \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \tau'_{xy} &= \sigma_x r_{yx} r_{xx} + \sigma_y r_{yy} r_{xy} + \sigma_z r_{yz} r_{xz} + \tau_{xy} (r_{yy} r_{xx} + r_{yx} r_{xy}) + \\ &+ \tau_{xz} (r_{yz} r_{xx} + r_{yx} r_{xz}) + \tau_{yz} (r_{yz} r_{xy} + r_{yy} r_{xz}) \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \tau'_{xz} &= \sigma_x r_{zx} r_{xx} + \sigma_y r_{zy} r_{xy} + \sigma_z r_{zz} r_{xz} + \tau_{xy} (r_{zy} r_{xx} + r_{zx} r_{xy}) + \\ &+ \tau_{xz} (r_{zz} r_{xx} + r_{zx} r_{xz}) + \tau_{yz} (r_{zz} r_{xy} + r_{zy} r_{xz}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \tau'_{yz} &= \sigma_x r_{zx} r_{yx} + \sigma_y r_{zx} r_{yy} + \sigma_z r_{zz} r_{yz} + \tau_{xy} (r_{zy} r_{yx} + r_{zx} r_{yy}) + \\ &+ \tau_{xz} (r_{zz} r_{yx} + r_{zx} r_{yz}) + \tau_{yz} (r_{zz} r_{yy} + r_{zy} r_{yz}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Kot primer cilindrične zavrtitve dobimo v ravnini  $(x, y) \perp z$ , ko velja

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi, & \sin\phi, & 0. \\ -\sin\phi, & \cos\phi, & 0. \\ 0., & 0., & 1. \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

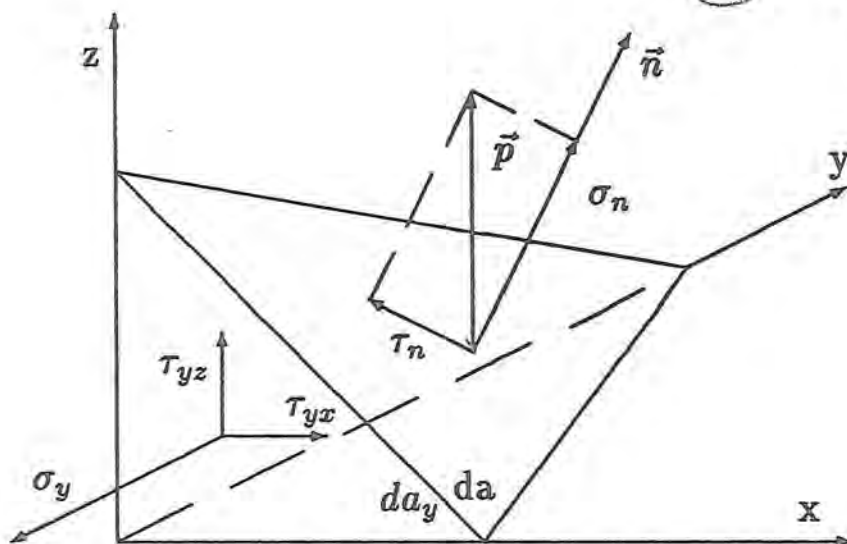
napetosti (upoštevaje  $2 \sin\phi \cos\phi = \sin(2\phi)$ ,  $\cos^2\phi - \sin^2\phi = \cos(2\phi)$ )

$$\sigma'_x = \sigma_x \cos^2\phi + \sigma_y \sin^2\phi + \tau_{xy} \sin(2\phi) \quad (2.37)$$

$$\sigma'_y = \sigma_x \sin^2\phi + \sigma_y \cos^2\phi - \tau_{xy} \sin(2\phi) \quad (2.38)$$

$$\tau'_{xy} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin(2\phi) + \tau_{xy} \cos(2\phi) \quad (2.39)$$

kar je znan rezultat iz trdnosti (ravninsko stanje napetosti), saj so preostale napetosti ostale pri zavrtitvi nespremenjene ( $\sigma'_z = \sigma_z$ ,  $\tau'_{xz} = 0$ ,  $\tau'_{yz} = 0$ ).



Slika 2.4: Poševna ravnina

## 2.3 Poševna ravnina

Poljubna poševna ravnina, ki ne gre skozi koordinatno izhodišče, izreže skupaj s koordinatnimi ravninami iz telesa tetraeder - četverec (Slika 2.4). Ravnovesje sil na tem četvercu daje projekcije sil

$$p_x da = \sigma_x da_x + \tau_{yx} da_y + \tau_{zx} da_z \quad (2.40)$$

$$p_y da = \sigma_y da_y + \tau_{zy} da_z + \tau_{xy} da_x \quad (2.41)$$

$$p_z da = \sigma_z da_z + \tau_{xz} da_x + \tau_{yz} da_y \quad (2.42)$$

Ker so

$$da_x = da n_x, \quad da_y = da n_y, \quad da_z = da n_z \quad (2.43)$$

veljajo zveze

$$p_x = \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \quad (2.44)$$

$$p_y = \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z + \tau_{xy} n_x \quad (2.45)$$

$$p_z = \sigma_z n_z + \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y \quad (2.46)$$

oziroma splošno

$$\vec{p} = \underline{\sigma}^* \vec{n} = \underline{\sigma} \vec{n} \quad (2.47)$$

ali

$$\underline{\sigma} = \vec{p} \vec{n}^* \quad (2.48)$$

Z vstavitvijo enačb (2.9) v izraze (2.44) do (2.46) dobimo potrditev pravilnosti izpeljanih izrazov:

$$p_x = p_x n_x^2 + p_x n_y^2 + p_x n_z^2 = p_x(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = p_x \cdot 1, \text{ itd.}$$

## 2.4 Glavne napetosti

Iščemo lastne vrednosti simetričnega tenzorja napetosti, to je glavne napetosti v ravninah, katerih normale imenujemo glavne smeri. Lastne vrednosti in lastne smeri so definirane z enačbo

$$\underline{\sigma} \vec{x} = L \vec{x} \quad (2.49)$$

kjer prostorskemu tenzorju  $\underline{\sigma}$  pripadajo tri realne lastne vrednosti  $L_1, L_2, L_3$  v ravninah, katerih normale kažejo v smereh  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ , ki so med seboj ortogonalne.

Iskane lastne vrednosti dobimo z razrešitvijo pogojne enačbe

$$\text{Det} | \underline{\sigma} - L \underline{\delta} | = 0 \quad (2.50)$$

oziroma

$$\text{Det} \begin{bmatrix} \sigma_x - L, & \tau_{xy}, & \tau_{xz} \\ \tau_{yx}, & \sigma_y - L, & \tau_{yz} \\ \tau_{zx}, & \tau_{zy}, & \sigma_z - L \end{bmatrix} = 0 \quad (2.51)$$

iz česar takoj dobimo kubično enačbo (trinom)

$$\begin{aligned} L^3 &- (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)L^2 + (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)L - \\ &- (\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2) = 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

in z definiranjem "invariant" (izrazi v oklepajih zgornje enačbe, ki imajo podoben pomen kot Vietajeva pravila pri kvadratnih enačbah), dobimo poenostavljeno obliko enačbe (2.52)

$$L^3 - I_1 L^2 + I_2 L - I_3 = 0 \quad (2.53)$$

kjer so koeficienti invariante (katerih vrednosti se med rotacijo koordinatnega sistema ne spreminjajo), izražene z iskanimi lastnimi vrednostmi

$$I_1 = \sum_{n=1}^3 L_n \quad (2.54)$$

$$I_2 = \sum_{m=1}^3 \left( \prod_{n=m}^{m+1} L_n \right), \quad 4 \rightarrow 1, 5 \rightarrow 2 \quad (2.55)$$

$$I_3 = \prod_{n=1}^3 L_n \quad (2.56)$$

Z rešitvijo enačbe (2.53) dobimo tri realne korene  $L_1, L_2, L_3$ , ki jih lahko uredimo po velikosti, tako da je ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ )

$$\sigma_1 = \text{MAX}(L_1, L_2, L_3) \quad (2.57)$$

$$\sigma_3 = \text{MIN}(L_1, L_2, L_3) \quad (2.58)$$

Kubno enačbo lahko razrešimo algebraično (npr. Bronštejn - Semendjajev, TZS 88, str.155) ali pa numerično z uporabo tangentne Newton-Raphsonove metode  $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$  določimo enega od iskanih korenov, preostala dva pa potem dobimo iz enačbe znižanega reda, ki je kvadratna v obliki  $x^2 + ax + b = 0$  z rešitvijo  $x = -a/2 \pm \sqrt{a^2/4 - b}$ .

Kadar so vsi trije koreni med seboj različni (enojni), imamo "kubično" stanje napetosti. Če sta dva korena med seboj enaka (dvojna), imamo "cilindrično" stanje napetosti. Kolikor so vsi trije koreni med seboj enaki (trojni), imamo "sferično" stanje napetosti. Ako je en koren nič, govorimo o "ravninskem" stanju napetosti (tanke stene in tanke plošče), če pa sta kar dva korena nič, je to "enoosno" stanje napetosti (palice).

Posamezno lastno vrednost (glavno napetost) uporabimo za določitev pripadajoče lastne smeri (normala na glavno ravnino). Tako npr. za  $L_1$  sledijo tri enačbe, od katerih pa je ena nelinearna ter je zato reševanje tega sistema iterativno

$$(\sigma_x - L_1) n_x^1 + \tau_{xy} n_y^1 + \tau_{xz} n_z^1 = 0 \quad (2.59)$$

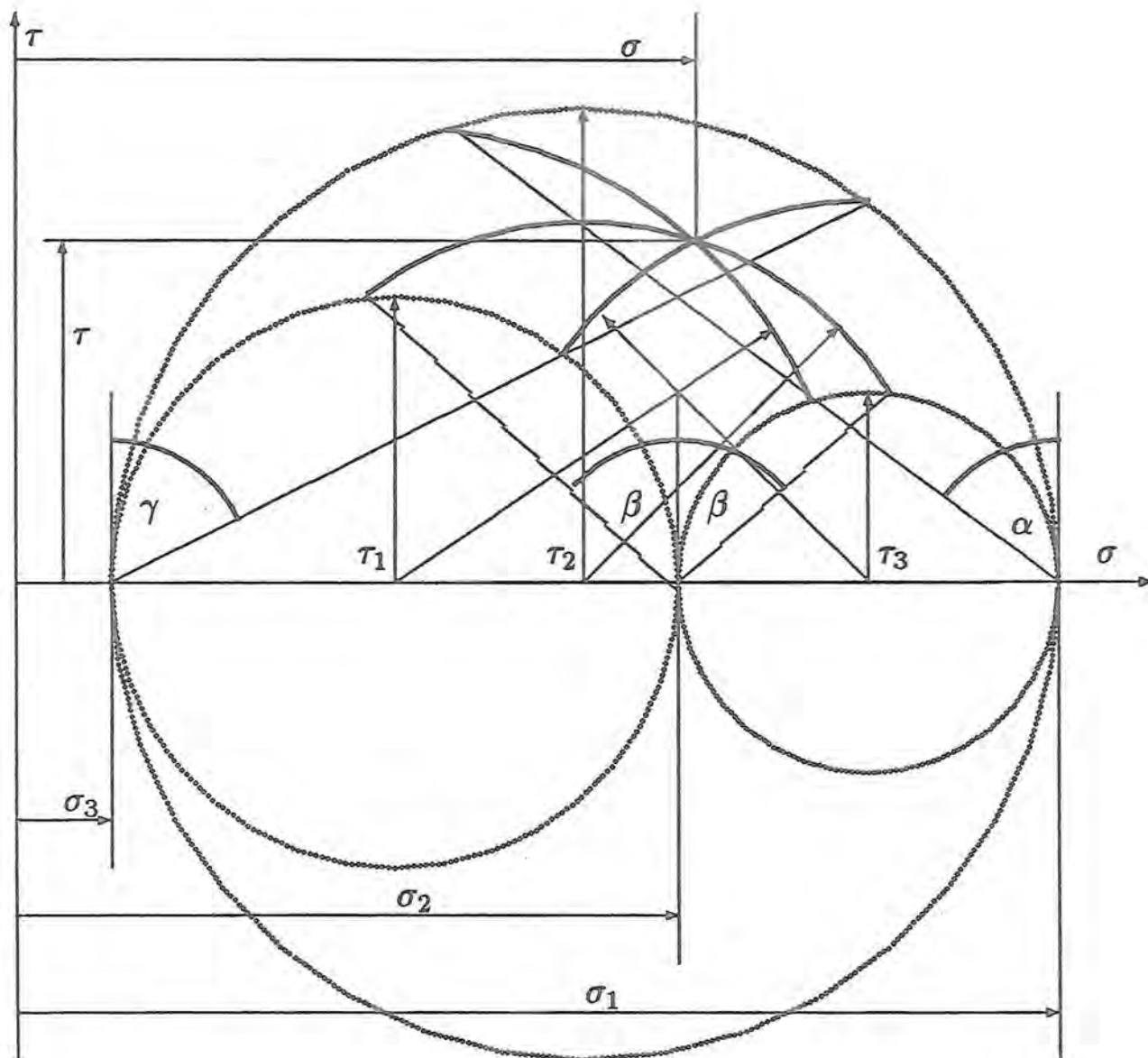
$$\tau_{xy} n_x^1 + (\sigma_y - L_1) n_y^1 + \tau_{yz} n_z^1 = 0 \quad (2.60)$$

$$(n_x^1)^2 + (n_y^1)^2 + (n_z^1)^2 = 1 \quad (2.61)$$

iz česar dobimo iskani vektor

$$\vec{n}_1 = n_x^1 \vec{i} + n_y^1 \vec{j} + n_z^1 \vec{k} \quad (2.62)$$

Podobno poiščemo  $\vec{n}_2$  s pomočjo  $L_2$  in  $\vec{n}_3$  s pomočjo  $L_3$ .



Slika 2.5: Mohrovi krogi

## 2.5 Napetostni grafi

Zelo enostavno določimo napetosti v neki ravnini, ki je podana s smernimi koti  $(\alpha, \beta, \gamma)$  v napetostni ravnini  $(\sigma, \tau)$  z Mohrovimi krogi (Slika 2.5).

V ravninskem primeru imamo opravka le z enim samim Mohrovim krogom (glej trdnost).

V dejanskem koordinatnem prostoru bi imeli opraviti z napetostnim elipsoidom, kar pa si oglejmo le v ravninskem primeru, ko imamo elipso za napetost  $p$ . Ta polarni diagram daje slikovito predstavo o spreminjanju napetosti  $\sigma$  in  $\tau$  ("piškot" in "deteljica"). Slika 2.6 prikazuje tak polarni diagram za primer nateznih napetosti  $\sigma_1 > \sigma_2 > 0, \sigma_3 = 0$ .

## 2.6 Največje strižne napetosti

Iz dosedanjih enačb, Mohrovih krogov in polarnega diagrama napetosti lahko dojamemo, da v položajih, kjer imajo normalne napetosti svoje ekstremne vrednosti  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , izginejo strižne napetosti, vmes nekje pa imajo strižne napetosti tudi svoj ekstrem. Ker je

$$\tau^2 = p^2 - \sigma^2 \quad (2.63)$$

ter

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \quad (2.64)$$

oziroma

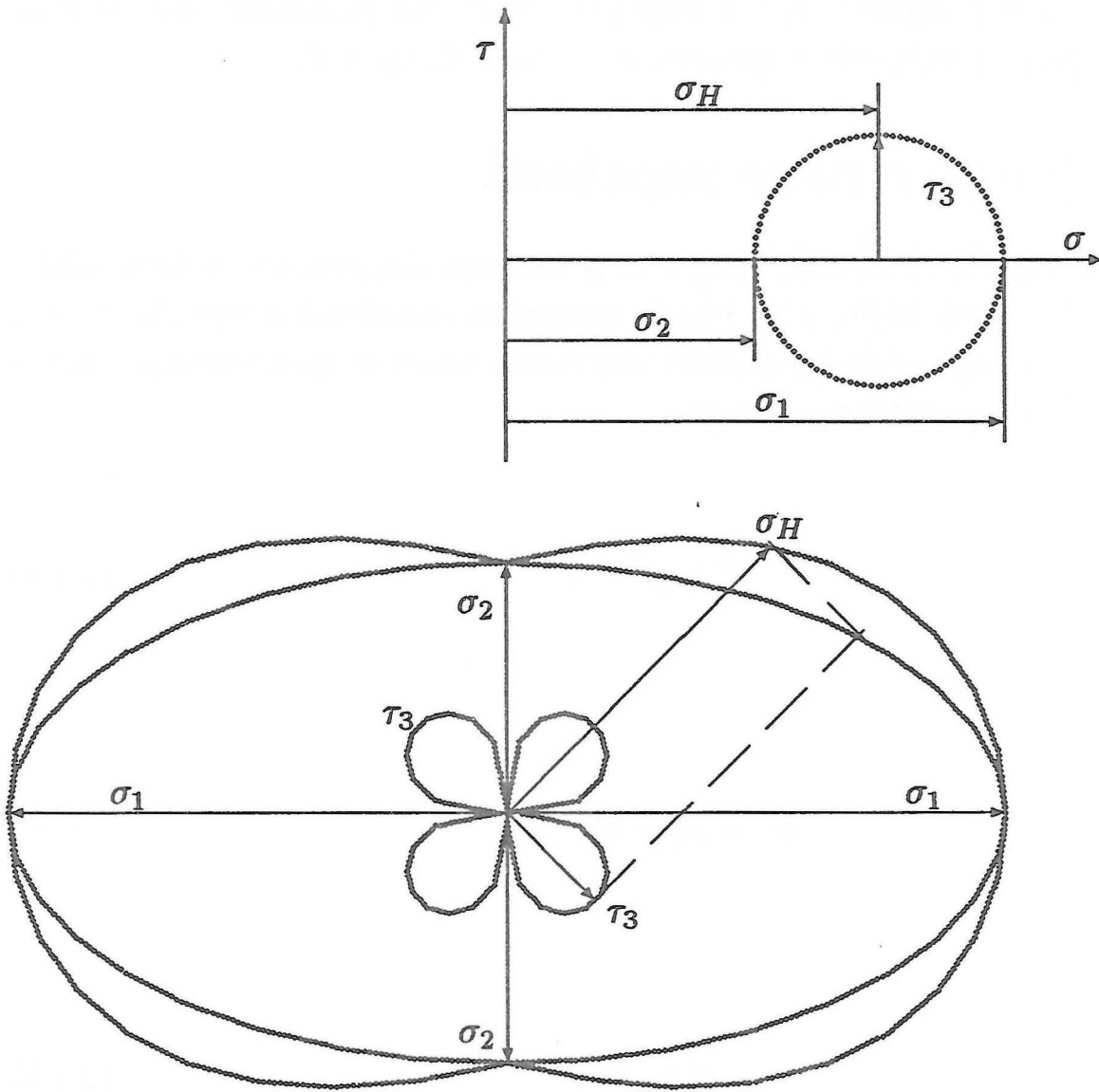
$$\vec{p} = \underline{\sigma} \vec{n} \quad (2.65)$$

dobimo z glavnimi napetostmi

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 n_x \\ \sigma_2 n_y \\ \sigma_3 n_z \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

in zato velja

$$p^2 = (\sigma_1 n_x)^2 + (\sigma_2 n_y)^2 + (\sigma_3 n_z)^2 \quad (2.67)$$



Slika 2.6: Polarni diagram napetosti



Podobno dobimo iznos ( $\underline{\sigma} = \vec{p} \vec{n}^*$ )

$$\sigma = \vec{p}^* \vec{n} \quad (2.68)$$

to je

$$\sigma = (\sigma_1 n_x, \sigma_2 n_y, \sigma_3 n_z) \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \sigma_1 n_x^2 + \sigma_2 n_y^2 + \sigma_3 n_z^2 \quad (2.69)$$

Tako sledi iz (2.63) ob upoštevanju (2.67) in (2.69) vrednost iznosa strižne napetosti

$$\tau^2 = (\sigma_1 n_x)^2 + (\sigma_2 n_y)^2 + (\sigma_3 n_z)^2 - (\sigma_1 n_x^2 + \sigma_2 n_y^2 + \sigma_3 n_z^2)^2 \quad (2.70)$$

Ob upoštevanju izraza (2.26), npr.

$$n_z^2 = 1 - n_x^2 - n_y^2 \quad (2.71)$$

dobimo

$$\tau^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2)n_x^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)n_y^2 + \sigma_3^2 - ((\sigma_1 - \sigma_3)n_x^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_y^2 + \sigma_3)^2 \quad (2.72)$$

Za določitev ekstrema sta potrebna dva pogoja, saj je  $\tau^2$  funkcija dveh neodvisnih spremenljivk

$$\frac{\partial(\tau^2)}{\partial n_x} = 0, \quad \frac{\partial(\tau^2)}{\partial n_y} = 0 \quad (2.73)$$

Z odvajanjem izraza (2.72) sledita dve enačbi

$$n_x(\sigma_1 - \sigma_3)(1 - 2n_x^2) = 2(\sigma_1 - \sigma_3) n_y^2 n_x \quad (2.74)$$

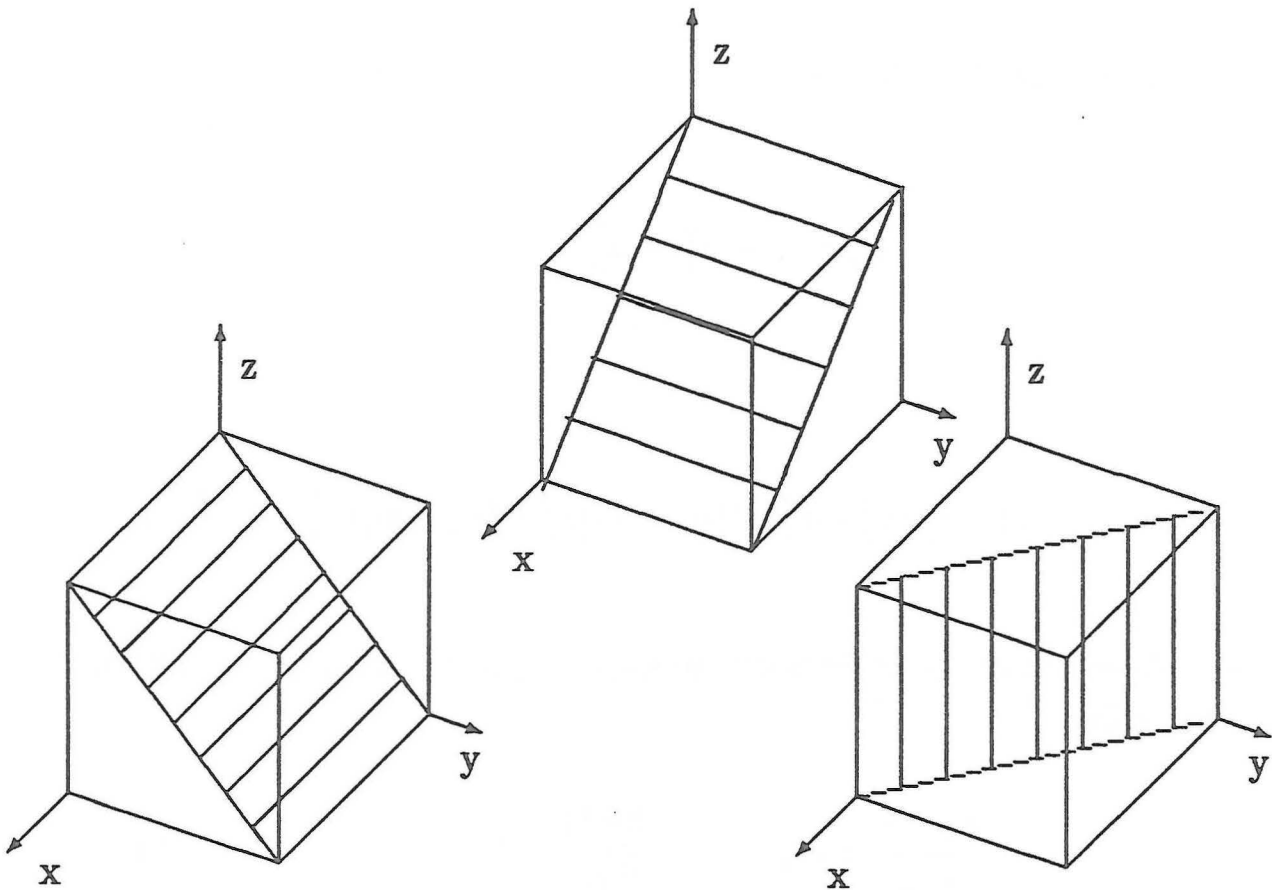
$$n_y(\sigma_2 - \sigma_3)(1 - 2n_y^2) = 2(\sigma_2 - \sigma_3) n_x^2 n_y \quad (2.75)$$

Na izbiro imamo tri možnosti

$$(a) \quad n_x = 0 \cdots n_y = n_z = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.76)$$

$$(b) \quad n_y = 0 \cdots n_z = n_x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.77)$$

$$(c) \quad n_z = 0 \cdots n_x = n_y = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.78)$$



Slika 2.7: Strižne napetostne ravnine

Tem trem ravninam ustrezajo tri vrednosti ekstrema strižne napetosti

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (2.79)$$

kar so polmeri Mohrovih krogov, dobljene strižne napetosti pa ležijo v ravninah, ki so za  $45^\circ$  nagnjene glede na glavne napetostne ravnine (Slika 2.7).

## 2.7 Oktaedrične napetosti

Predvsem v plastomehaniki imajo poseben pomen napetosti v ravninah, ki so definirane z enakimi koti  $\alpha = \beta = \gamma$  (Slika 2.8).

V tem primeru so

$$n_x = n_y = n_z = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2.80)$$

Zato velja zaradi (2.69) oktaedrična normalna (srednja, volumska, hidro-statična) napetost

$$\sigma_v = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (2.81)$$

Zaradi (2.72) je potem ustrezna oktaedrična strižna napetost

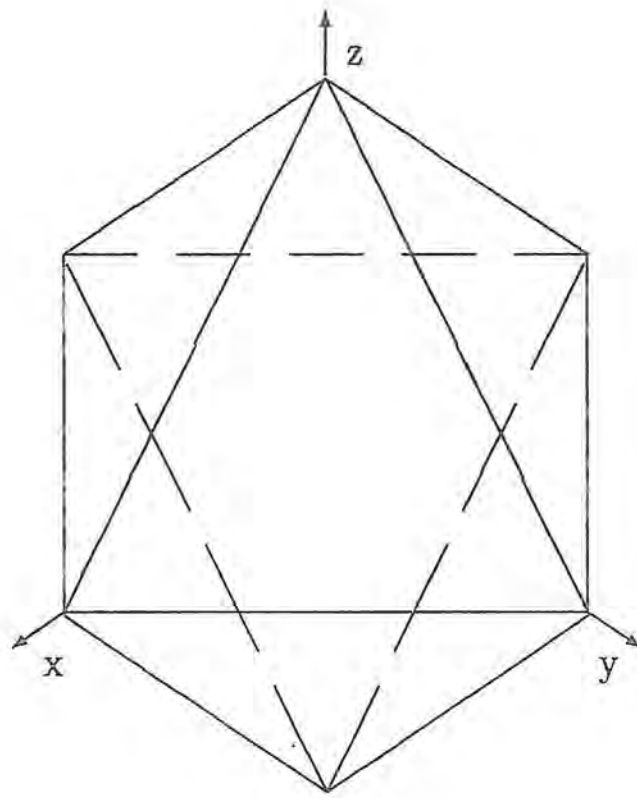
$$\tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2.82)$$

S pomočjo invariant napetostnega tenzorja tudi lahko zapišemo

$$\sigma_v = \frac{I_1}{3} \quad (2.83)$$

$$\tau_0 = \frac{2}{3} \sqrt{I_1^2 + 3I_2} \quad (2.84)$$

ter s koordinatnimi napetostmi še



Slika 2.8: Oktaedrične ravnine

$$\sigma_v = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (2.85)$$

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (2.86)$$

## 2.8 Odklonske napetosti

Večkrat s pridom uporabimo deviacijske (odklonske) napetosti glede na povprečne napetosti. Če definiramo povprečni (krogelni) tenzor napetosti

$$\underline{\sigma}_v = \sigma_v \underline{\delta} = \frac{I_1}{3} \underline{\delta} \quad (2.87)$$

dobimo deviatorične (odklonske) napetosti z odštetjem povprečnega od dejanskega tenzorja napetosti

$$\underline{S} = \underline{\sigma} - \underline{\sigma}_v = \underline{\sigma} - \frac{I_1}{3} \underline{\delta} \quad (2.88)$$

Tako dobimo v komponentni obliki, zapisano v matrični shemi, deviatorične napetosti

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \begin{bmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.89)$$

in urejeno

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{3}, & \tau_{xy}, & \tau_{xz} \\ \tau_{yx}, & \frac{2\sigma_y - \sigma_z - \sigma_x}{3}, & \tau_{yz} \\ \tau_{zx}, & \tau_{zy}, & \frac{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y}{3} \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Ta odklonski (deviatorični) tenzor napetosti ima zelo podobne lastnosti kot pravi tenzor napetosti  $\underline{\sigma}$ , npr. simetričnost, lastne vrednosti, invariante, itd. Invariante so tukaj lahko zapisane v obliki

$$J_1 = 0, \quad J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}, \quad J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki} \quad (2.91)$$

lastne vrednosti pa dobimo z enačbo (2.53)

$$L^3 - J_2 L - J_3 = 0 \quad (2.92)$$

S substitucijo

$$L = 2\sqrt{\frac{J_2}{3}} \cdot \sin\omega \quad (2.93)$$

dobimo

$$2\left(\frac{J_2}{3}\right)^{3/2} \cdot (4\sin^3\omega - 3\sin\omega) = J_3 \quad (2.94)$$

oziroma

$$\sin(3\omega) = -\frac{J_3}{2} \cdot \left(\frac{3}{J_2}\right)^{3/2} \quad (2.95)$$

$$\omega = \frac{1}{3} \arcsin\left(-\frac{J_3}{2} \cdot \left(\frac{3}{J_2}\right)^{3/2}\right) \quad (2.96)$$

Dobljene tri lastne vrednosti deviatorja (odklona) napetosti so torej

$$S_k = 2\sqrt{\frac{J_2}{3}} \cdot \sin\omega_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.97)$$

$$S_1 > S_2 > S_3, \quad \omega_1 = \omega + \frac{2}{3}\pi, \quad \omega_2 = \omega, \quad \omega_3 = \omega + \frac{4}{3}\pi \quad (2.98)$$

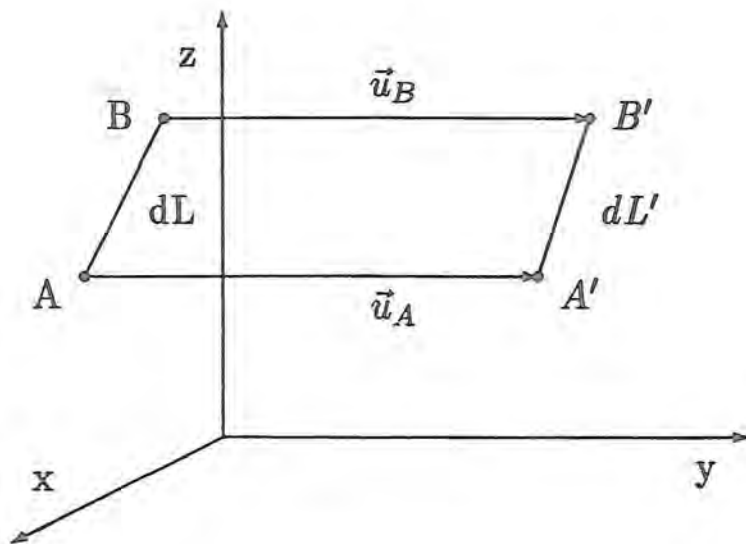
Seveda odtod dobimo tudi lastne vrednosti pravega tenzorja napetosti

$$\sigma_k = S_k + \frac{\sigma_v}{3}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.99)$$

česar z opisanim postopkom ne moremo neposredno izračunati, saj  $I_1 \neq 0$ .

### 3. Deformacijski tenzor

Pri obremenjevanju teles pride do spremembe razdalj (Slika 3.1).



Slika 3.1: Sprememba razdalj pri deformaciji

Ker je pomik točke:

$$\vec{u} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} \quad (3.1)$$

kjer so

$$u = x' - x, \quad v = y' - y, \quad w = z' - z \quad (3.2)$$

dobimo deformacijo

$$\varepsilon_L = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (3.3)$$

ki je v prostorskem primeru definirana tenzorsko z izrazom

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\underline{J}^* \underline{J} - \delta}{2} \quad (3.4)$$

kjer je Jacobijeva matrika

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial x'}{\partial z} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial z} \\ \frac{\partial z'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

tako da dobimo z izvrednotenjem

$$\underline{J}^* \underline{J} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

obrazec za tenzor deformacij, ki ni omejen samo na majhne vrednosti

$$2\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & 2\frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

kjer so

$$a = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \quad b = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$$



$$c = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad d = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

$$e = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad f = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$

Zadnji prispevek lahko zanemarimo, če imamo opravka z "malimi" deformacijami (npr. za jeklo ali beton, nikakor pa ne pri gumi ipd.).

### 3.1 Deformacijska enačba

Alternativno lahko izpeljemo obrazec (3.7) na klasičen način. V sliki 3.1 sta razdalji

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}, \quad dL' = \sqrt{(dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2} \quad (3.8)$$

Zaradi (3.2) velja

$$dx' = dx + du, \quad dy' = dy + dv, \quad dz' = dz + dw \quad (3.9)$$

in zato dobimo, da je (kvadriranje uporabimo, da se izognemo pisanju korena)

$$(dL')^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 + 2(dx du + dy dv + dz dw) + (du)^2 + (dv)^2 + (dw)^2 \quad (3.10)$$

oziroma

$$(dL')^2 - (dL)^2 = 2(dx du + dy dv + dz dw) + (du)^2 + (dv)^2 + (dw)^2 \quad (3.11)$$

Ker je totalni diferencial

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad (3.12)$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \quad (3.13)$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \quad (3.14)$$

dobimo iz (3.11)

$$\begin{aligned} (dL')^2 - (dL)^2 &= 2\frac{\partial u}{\partial x}(dx)^2 + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)(dx)^2 + \\ &+ 2\frac{\partial v}{\partial y}(dy)^2 + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right)(dy)^2 + \\ &+ 2\frac{\partial w}{\partial z}(dz)^2 + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right)(dz)^2 + \\ &+ 2\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}\right)dx dy + \\ &+ 2\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}\right)dx dz + \\ &+ 2\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}\right)dy dz \quad (3.15) \end{aligned}$$

kar lahko izrazimo v obliki

$$\begin{aligned} (dL')^2 - (dL)^2 &= 2(\varepsilon_x(dx)^2 + \varepsilon_y(dy)^2 + \varepsilon_z(dz)^2 + \\ &+ 2\gamma_{xy} dx dy + 2\gamma_{xz} dx dz + 2\gamma_{yz} dy dz) \quad (3.16) \end{aligned}$$

kjer so definicijski izrazi "specifičnih" deformacij

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) \quad (3.17)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right) \quad (3.18)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) \quad (3.19)$$

$$\varepsilon_{xy} = 2\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.20)$$

$$\varepsilon_{xz} = 2\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.21)$$

$$\varepsilon_{yz} = 2\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.22)$$

Tako dobimo tenzor deformacij. Z zanemaritvijo "višjih" členov dobimo "male" deformacije

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, & 2\frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & 2\frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

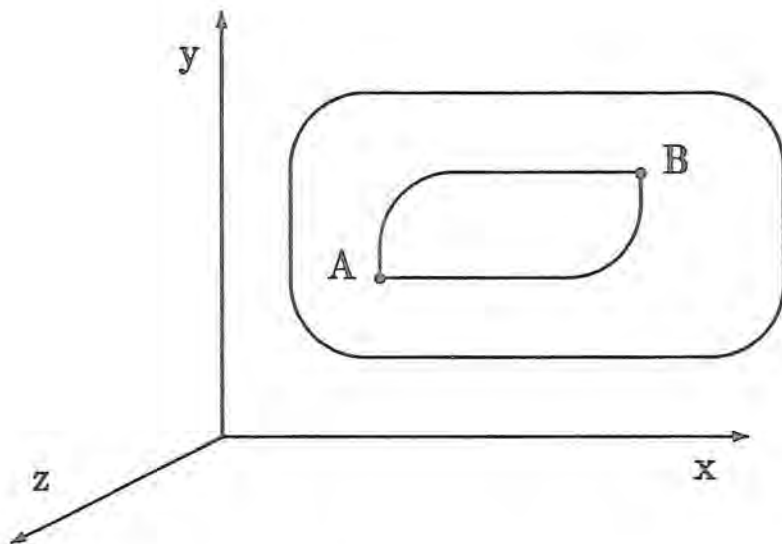
ki je simetričen ( $\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^*$ ). Diagonalni členi predstavljajo normalne deformacije, izvendiagonalni pa strižne (kotne) deformacije.

Tako kot že napetostni tenzor ima tudi tenzor deformacij podobne lastnosti, npr. tri realne glavne (lastne) vrednosti, invariante, največje strižne deformacije (premaknjene za kot  $45^\circ$  glede na glavne deformacijske ravnine, kjer so glavne normalne deformacije), oktaedrične in tudi deviatorične (odklonske) deformacije. Vse to lahko dobimo z analogno uporabo obrazcev (2.45) do (2.95). Seveda obstajajo tudi Mohrovi krogi deformacij in deformacijski elipsoid (polarni diagram). Pri izotropnih homogenih elastičnih gradivih se smeri glavnih deformacij ujema s smermi glavnih napetosti (posledica linearnega Hookovega konstitutivnega zakona - glej poglavje 4).

## 3.2 Združljivost

Deformacije  $\underline{\varepsilon}$  med seboj ne morejo biti povsem neodvisne, saj gre za šest parcialnih diferencialnih (Cauchyjevih) enačb, s katerimi določamo tri pomike

v smeri treh koordinatnih osi. Zato morajo obstajati zveze, ki zagotove integrabilnost enačb (potrebni in zadostni pogoji). Pri enkrat povezanih območjih so te zveze poznane kot St. Venantove (deformacijske) kompatibilnostne (združljivostne) enačbe, ki jih viri ponavadi izpeljejo z dvakratnim odvajanjem enačb (3.17) do (3.22) in njih povezovanjem, tukaj pa jih določimo s pomočjo pogojev za neodvisnost integracije od poti, po kateri računamo znotraj območja (Slika 3.2).



Slika 3.2: Neodvisnost integracije od poti

Izpeljavo izvedimo za komponento pomika  $u$

$$u_B = u_A + \int_A^B du \quad (3.24)$$

Pogoj za neodvisnost rezultata od poti med A in B je popolnost diferenciala

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \varepsilon_x dx + (2\gamma_{xy} - \frac{\partial v}{\partial x}) dy + (2\gamma_{xz} - \frac{\partial w}{\partial x}) dz \quad (3.25)$$

Z vstavitvijo v (3.24) dobimo

$$\begin{aligned} u_B = u_A &+ \int_A^B \varepsilon_x d(x - x_B) + \int_A^B (2\gamma_{xy} - \frac{\partial v}{\partial x}) d(y - y_B) + \\ &+ \int_A^B (2\gamma_{xz} - \frac{\partial w}{\partial x}) d(z - z_B) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Integrirajmo po delih ("per partes") in sledi

$$u_B = u_A - (x_B - x_A)\varepsilon_x^A + (y_B - y_A)\left(2\gamma_{xy} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)_A + \\ + (z_B - z_A)\left(2\gamma_{xz} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)_A + \int_A^B (F dx + G dy + H dz) \quad (3.27)$$

kjer so substituirane funkcije

$$F = (x - x_B)\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + (y - y_B)\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + (z - z_B)\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} \quad (3.28)$$

$$G = (x - x_B)\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + (y - y_B)\left(2\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x}\right) + (z - z_B)\left(2\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \quad (3.29)$$

$$H = (x - x_B)\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} + (y - y_B)\left(2\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}\right) + (z - z_B)\left(2\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x}\right) \quad (3.30)$$

Za popolnost diferenciala morajo biti izpolnjeni naslednji pogoji

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial y} \quad (3.31)$$

to je npr.

$$(x - x_B)\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + (y - y_B)\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + (z - z_B)\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \\ = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + (x - x_B)\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x \partial y} + (y - y_B)\left(\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}\right) + \\ + (z - z_B)\left(\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right) \quad (3.32)$$

kar mora veljati za poljubne vrednosti  $y$  in  $z$ . Zato razpade v dve enačbi

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$$

Slednji člen preračunajmo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

in tako dobimo drugo enačbo kompatibilnosti (združljivosti) deformacij

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (3.34)$$

Preostale štiri pogojne enačbe lahko dobimo na povsem analogen način

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (3.38)$$

Enačbe (3.33) do (3.38) lahko zapišemo formalno tudi povsem enovito, če uporabimo indekse  $(i, j, k, l) = (x, y, z)$ , medtem ko naj vejica pomeni odvode

$$\varepsilon_{il,jk} - \varepsilon_{jl,ik} + \varepsilon_{jk,il} - \varepsilon_{ik,jl} = 0 \quad (3.39)$$

ali pa v obliki

$$\text{rot} (\text{rot } \underline{\varepsilon})^* = 0 \quad (3.40)$$

Za večkrat povezana območja, v katerih poljubne sklenjene krivulje ne moremo skrčiti v točko, če pri tem ne zapustimo telo (npr. stena z luknjo, svitek ipd.), poleg navedenih potrebnih pogojev obstoje še dodatni zadostni pogoji v obliki integralov (D. Jurišič, Strojniški vestnik 14/66, str. 9-13)

$$\int du = \int \int (y df_z - z df_y) = 0 \quad (3.41)$$

$$\int dv = \int \int (z df_x - x df_z) = 0 \quad (3.42)$$

$$\int dw = \int \int (x df_y - y df_x) = 0 \quad (3.43)$$

$$\int d\omega_{xy} = \int \int df_z = 0 \quad (3.44)$$

$$\int d\omega_{yz} = \int \int df_x = 0 \quad (3.45)$$

$$\int d\omega_{zx} = \int \int df_y = 0 \quad (3.46)$$

kjer so "rotacije"

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\omega_{yx} \quad (3.47)$$

$$\omega_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\omega_{zy} \quad (3.48)$$

$$\omega_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\omega_{xz} \quad (3.49)$$

in "kompatibilnostne" sile

$$\begin{bmatrix} df_x \\ df_y \\ df_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a, & b, & c \\ b, & d, & e \\ c, & e, & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dy dz \\ dz dx \\ dx dy \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

ter so člani (deformacijski kompatibilnostni pogoji)

$$a = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$b = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}$$

$$c = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}$$

$$d = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}$$

$$e = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}$$

$$f = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Poleg navedenih (deformacijskih) kompatibilnostnih pogojev poznamo tudi alternativne (napetostne) kompatibilnostne (Beltrami-Mitchellove) enačbe, ki jih dobimo ob upoštevanju konstitutivnega Hookovega zakona in ravnovesne enačbe (2.14), kar bomo podali v 4. poglavju.

### 3.3 Neelastični raztezki

Poleg elastičnih deformacij moramo v strojništvu pogosto upoštevati tudi (aditivne) termične dilatacije (brez distorzije), medtem ko druge neelastične deformacije (npr. plastične ipd.) imajo tudi strižne prispevke. S podmeno aditivnosti je celotna deformacija

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^t + \underline{\varepsilon}^p \quad (3.51)$$

kjer je termični delež

$$\underline{\varepsilon}^t = \alpha \cdot \underline{\delta} \cdot (T - T_0) \quad (3.52)$$

in je količnik termične ekspanzije (CTE) homogenih izotropnih teles v vseh smereh enak. Pri jeklu je npr. njegova vrednost približno  $1.2 \cdot 10^{-5} K^{-1}$ . Določitev plastičnih deformacij bomo obravnavali v 9. poglavju.



## 4. Konstitutivni zakon

Medtem ko ravnovesne, deformacijske in kompatibilnostne enačbe veljajo povsem splošno, moramo pri konstitutivni zvezi med napetostmi in deformacijami razlikovati kakšno je stanje snovi. V elastičnem oziroma v plastičnem območju namreč veljajo različne enačbe.

### 4.1 Reologija in modeliranje

Kontinua delimo v trdna, kapljevita in plinasta. Medtem ko nas plini tu ne bodo zanimali, trdna in kapljevita telesa delimo na pet kategorij:

- a) toga telesa (Euklidova)
- b) elastična telesa (Hookova)
- c) plastična telesa (StVenantova)
- d) viskozne (židke) kapljevine (Newtonove)
- e) idealne kapljevine (Pascalove)

V elasto-plastomehaniki nastopajo kombinacije (b,c,d) teles, ki jih razmeroma enostavno lahko modeliramo s primernimi kombinacijami vzmeti in dušilk. Hookovo telo je idealna vzmet, Newtonovo dušilka, medtem ko so dejanska telesa kombinacija teh dveh prvin. Tako je Maxwellov model zaporedna vezava vzmeti in dušilke, medtem ko je Kelvinov model telesa vzporedna vezava obeh osnovnih prvin. Dostikrat upoštevamo tudi večkomponentne modele.

Matematični zapis reoloških modelov upošteva, da povprečna napetost povzroča le volumsko dilatacijo brez distorzije, medtem ko deviatorična napetost povzroča samo distorzijo (to je deviatorično deformacijo). Zato veljata dve diferencialni enačbi

$$P'' \sigma_v = Q'' \varepsilon_v, \quad P' S = Q' e \quad (4.1)$$

kjer so časovni linearni diferencialni operatorji

$$P = \sum_{n=0}^m p_n \frac{d^n}{dt^n} \quad (4.2)$$

in

$$Q = \sum_{n=0}^m q_n \frac{d^n}{dt^n} \quad (4.3)$$

oziroma izpisano dobimo namesto sistema enačb (4.1) s to definicijo

$$p_0'' \sigma_v + p_1'' \dot{\sigma}_v + p_2'' \ddot{\sigma}_v + \dots = q_0'' \epsilon_v + q_1'' \dot{\epsilon}_v + q_2'' \ddot{\epsilon}_v + \dots \quad (4.4)$$

in

$$p_0' S + p_1' \dot{S} + p_2' \ddot{S} + \dots = q_0' e + q_1' \dot{e} + q_2' \ddot{e} + \dots \quad (4.5)$$

Oznaki (") in (') sta indeksa, medtem ko pomenita (·) in (··) časovne odvode, to je hitrosti in pospeške napetosti oziroma deformacij. Konkretno velja za Hookovo elastično telo  $p_0'' = p_0' = 1$ ,  $p_n = 0$  ( $n > 0$ ),  $q_0'' = 3K$ ,  $q_0' = 2\mu$ ,  $q_n = 0$  ( $n > 0$ ), tako da dobimo ustrezni konstitutivni model elastomehanike

$$\sigma = \sigma_v + S = 3K \epsilon_v + 2\mu e \quad (4.6)$$

kjer sta kompresijski in strižni modul podana z obrazcem (1.23) in (1.22). Ustrezno velja za Kelvinov model enačba

$$S = q_0 e + q_1 \dot{e} \quad (4.7)$$

in pri Maxwellovem modelu obrazec

$$p_0 S + p_1 \dot{S} = q_1 \dot{e} \quad (4.8)$$

kjer je treba parametre  $p$  in  $q$  eksperimentalno določiti za konkretno snov. Pri obeh modelih je vzmetni del modeliran z izrazom  $\sigma_v = 3K \epsilon_v$  kot pri enostavnem Hookovem materialu.

## 4.2 Posplošeni Hookov zakon

Zveza med napetostmi in deformacijami se v linearnem elastičnem območju glasi (če od celotnih deformacij odštejemo termične ipd. deformacije)

$$\underline{\sigma}_{ij} = \underline{E}_{ijkl} \underline{\varepsilon}_{kl} \quad (4.9)$$

kjer je  $\underline{E}$  tenzor četrtega reda (1.20), ki pri izotropni snovi obsega Youngov modul in Poissonovo število. Ta dva parametra je namreč v praksi laboratorijsko najlažje izmeriti, ostale parametre, kot sta Lamé konstanti (1.21) in (1.22) oziroma kompresijski modul (1.23) pa izračunamo. Če upoštevamo tudi termične dilatacije (3.53), velja Duhamel-Neumann enačba

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \left( \underline{\sigma} - \frac{\nu}{1+\nu} 3 \sigma_v \underline{\delta} \right) + \alpha \underline{\delta} \Delta T \quad (4.10)$$

oziroma inverzno

$$\underline{\sigma} = 2\mu \left( \underline{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_v - \frac{1+\nu}{\nu} \alpha T) \underline{\delta} \right) \quad (4.11)$$

Tako definiriranemu Hookovemu zakonu se izognemo, če vpeljemo matrični zapis (6 neodvisnih komponent napetosti in 6 neodvisnih deformacij)

$$\{\sigma\} = \underline{D} \{\varepsilon\}, \quad \{\varepsilon\} = \underline{D}^{-1} \{\sigma\} = \underline{C} \{\sigma\} \quad (4.12)$$

kjer so napetosti

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\} \quad (4.13)$$

in deformacije

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, 2\gamma_{xy}, 2\gamma_{yz}, 2\gamma_{zx}\} \quad (4.14)$$

Konstitutivni matriki  $\underline{C}$  in  $\underline{D}$  lahko zapišemo neposredno iz izkustvenih enačb homogene izotropne elastične snovi (glej trdnost v 1.letniku)

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)}{E} \quad (4.15)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)}{E} \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)}{E} \quad (4.17)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2\mu} \quad (4.18)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2\mu} \quad (4.19)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{2\mu} \quad (4.20)$$

kjer so tipični parametri snovi (elastične "konstante") za konstrukcijsko jeklo  $E = 210.GPa$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\mu = 80.GPa$ , vendar je strižni modul odvisen od prejšnjih dveh, saj velja obrazec

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.21)$$

Matrika  $\underline{C}$  je zato neposredno podana v obliki

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \frac{+1}{E}, & \frac{-\nu}{E}, & \frac{-\nu}{E}, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{-\nu}{E}, & \frac{+1}{E}, & \frac{-\nu}{E}, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{-\nu}{E}, & \frac{-\nu}{E}, & \frac{+1}{E}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \frac{1}{\mu}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{1}{\mu}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

ali krajše zapisano

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} (\underline{\delta} - \nu(1 - \underline{\delta}))/E, & 0_3 \\ 0_3, & \underline{\delta}/\mu \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Inverzno matriko  $\underline{D} = \underline{C}^{-1}$  dobimo po Kramerjevem pravilu (glej numerične metode v 2.letniku)

$$\underline{C}^{-1} = \frac{(\underline{C} \circ \underline{C})^*}{|\underline{C}|}, \quad \underline{C} \circ \underline{C} = (-1)^{i+j} \text{Sub } \underline{C} \quad (4.24)$$

Ker je determinanta

$$|\underline{C}| = \frac{1 - 3\nu^2 - 2\nu^3}{E^3} = \frac{(1+\nu)^2(1-2\nu)}{E^3} \quad (4.25)$$

in poddeterminanta diagonalnih členov ( $i = j$ )

$$\text{Sub } C_{ii} = \frac{1 - \nu^2}{E^2} \quad (4.26)$$

oziroma pri izvendiagonalnih členih ( $i \neq j$ )

$$\text{Sub } C_{ij} = \frac{(1+\nu)\nu}{E^2} \quad (4.27)$$

dobimo

$$d_{ii} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda + 2\mu \quad (4.28)$$

$$d_{ij} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda \quad (4.29)$$

tako da je matrika simbolično

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu \underline{\delta}, & 0_3 \\ 0_3, & \mu \underline{\delta} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

oziroma izpisano

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu, & \lambda, & \lambda, & 0, & 0, & 0 \\ \lambda, & \lambda + 2\mu, & \lambda, & 0, & 0, & 0 \\ \lambda, & \lambda, & \lambda + 2\mu, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \mu, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \mu, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \mu \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Tako so iskane Hookove zveze (napetosti izražene z deformacijami)

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_y + \varepsilon_z) = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_x \quad (4.32)$$

$$\sigma_y = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_z) = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_y \quad (4.33)$$

$$\sigma_z = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z \quad (4.34)$$

$$\tau_{xy} = 2\mu\gamma_{xy} \quad (4.35)$$

$$\tau_{yz} = 2\mu\gamma_{yz} \quad (4.36)$$

$$\tau_{zx} = 2\mu\gamma_{zx} \quad (4.37)$$

Z uporabo "volumske dilatacije (prva invarianta tenzorja deformacij)

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (4.38)$$

lahko gornje enačbe kratko zapišemo za vsi tri normalne napetosti

$$\sigma_n = \lambda\varepsilon_v + 2\mu\varepsilon_n, \quad n = x, y, z \quad (4.39)$$

Velja si zabeležiti tudi celotno razpredelnico vseh petih elastičnih parametrov ("konstant"), od katerih sta dva neodvisna, ostale pa si preračunamo z obrazci

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = \frac{9K\mu}{3K + \mu} \quad (4.40)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \frac{3(K - 2\mu)}{2(3K + \mu)} \quad (4.41)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = K - \frac{2\mu}{3} \quad (4.42)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \lambda \left( \frac{1}{2\nu} - 1 \right) \quad (4.43)$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} = \lambda + \frac{2\mu}{3} \quad (4.44)$$

### 4.2.1 Ravninsko deformacijsko stanje

V dolgih vkleščenih prizmah, kjer ni možen vzdolžni pomik, velja

$$\varepsilon_z = 0, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (4.45)$$

Zato dobimo ustrezni Hookov zakon v tem primeru preprosto z brisanjem ustreznih vrstic in stolpcev v matrikah  $\underline{C}$  in  $\underline{D}$ . Tako veljata enačbi za ravninsko deformacijsko stanje (s termiko)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} +1, & -\nu, & 0 \\ -\nu, & +1, & 0 \\ 0, & 0, & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} + \alpha \Delta T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

oziroma inverzno

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu, & \lambda, & 0 \\ \lambda, & \lambda + 2\mu, & 0 \\ 0, & 0, & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\gamma_{xy} \end{bmatrix} - \frac{\alpha E \Delta T}{1 - 2\nu} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

||  
 $\alpha(3\lambda + 2\mu)\Delta T$

### 4.2.2 Ravninsko napetostno stanje

V razmeroma tankih stenah velja (ker ni stranske obtežbe kot je npr. v ploščah)

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (4.48)$$

Zato dobimo ustrezni konstitutivni zakon v obliki

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda' + 2\mu', & \lambda', & 0 \\ \lambda', & \lambda' + 2\mu', & 0 \\ 0, & 0, & \mu' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\gamma_{xy} \end{bmatrix} - \frac{\alpha' E' \Delta T}{1 - 2\nu'} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

kjer so (glej trdnost - 1.letnik)

$$\lambda' = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}, \quad \mu' = \mu \quad (4.50)$$

$$\lambda' + 2\mu' = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad \frac{\alpha' E'}{1 - 2\nu'} = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \quad (4.51)$$

kar pomeni, da so prilagojene vrednosti parametrov

$$E' = E \frac{1 + 2\nu}{(1 + \nu)^2}, \quad \nu' = \frac{\nu}{1 + \nu}, \quad \alpha' = \alpha \frac{1 + \nu}{1 + 2\nu} \quad (4.52)$$

oziroma obrnjeno

$$E = \frac{E'}{1 - (\nu')^2}, \quad \nu = \frac{\nu'}{1 - \nu'}, \quad \alpha = \alpha'(1 + \nu') \quad (4.53)$$

### 4.3 Navier - Laméjeve enačbe

Skupek ravnovesnih, deformacijskih in konstitutivnih (Hookovih) enačb omogoča določitev neposredne povezave med vektorjema sil in pomikov. Tako dobljene Navier-Laméjeve enačbe (1.27) se v komponentni obliki glasijo ob upoštevanju termičnih dilatacij

$$\mu(\nabla^2 u + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x}) - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} + f_x = 0 \quad (4.54)$$

$$\mu(\nabla^2 v + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y}) - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial y} + f_y = 0 \quad (4.55)$$

$$\mu(\nabla^2 w + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z}) - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial z} + f_z = 0 \quad (4.56)$$

kjer je Laplacov operator

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.57)$$

V ravninskem primeru veljata enačbi (4.54) in (4.55), medtem ko v (4.57) odpade vzdolžni (zadnji) člen.



Kot bomo videli v 5.poglavju o radialnih problemih, je postopek uporabe Navier-Laméjeve enačb za enoizmerne cilindrične in sferične probleme (cevi, palice, obroči, diski, krogle) zelo ugoden, saj zaradi oblike odpade azimutalna in vzdolžna spremenljivost, če tudi obremenitve niso odvisne od drugih soorednic razen polmera.

## 4.4 Beltrami-Mitchellove enačbe

Iz Navier-Laméjevih enačb z izražanjem pomikov z napetostmi preko Hookovega konstitutivnega zakona in deformacijskih enačb, dobimo Beltrami-Mitchellove enačbe. Lažja pot do istega cilja pa je, če v StVenantove (deformacijske) kompatibilnostne enačbe vpeljemo Hookov konstitutivni zakon in ravnovesne enačbe, ter dobimo tako (napetostne) kompatibilnostne Beltrami-Mitchellove enačbe, ki jih zapišimo z uporabo oznake

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3 \sigma_v \quad (4.58)$$

v obliki komponentnih obrazcev

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} \vec{f} + 2 \frac{\partial f_x}{\partial x} + \\ + \alpha E \left( \frac{1}{1-\nu} \nabla^2 T + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} \vec{f} + 2 \frac{\partial f_y}{\partial y} + \\ + \alpha E \left( \frac{1}{1-\nu} \nabla^2 T + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} \vec{f} + 2 \frac{\partial f_z}{\partial z} + \\ + \alpha E \left( \frac{1}{1-\nu} \nabla^2 T + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f_x}{\partial y} + \frac{\partial f_y}{\partial x} + \frac{\alpha E}{1+\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = 0 \quad (4.62)$$

$$\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} + \frac{\partial f_y}{\partial z} + \frac{\partial f_z}{\partial y} + \frac{\alpha E}{1+\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} = 0 \quad (4.63)$$

$$\nabla^2 \tau_{zx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} + \frac{\partial f_z}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial z} + \frac{\alpha E}{1+\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial x} = 0 \quad (4.64)$$

in je

$$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \quad (4.65)$$

Združeno lahko enačbe (4.59) do (4.64) zapišemo kot ( $m, n = x, y, z$ )

$$\begin{aligned} \nabla^2 \underline{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_m \partial x_n} + \frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} \vec{f} \delta_{mn} + \frac{\partial f_m}{\partial x_n} + \frac{\partial f_n}{\partial x_m} + \\ + \alpha E \left( \frac{1}{1-\nu} \nabla^2 T \delta_{mn} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial x_m \partial x_n} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.66)$$

#### 4.4.1 Beltrami-Mitchell za ravninsko napetostno stanje

V tem primeru sta v vzdolžni smeri

$$\sigma_z = 0, \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \quad (4.67)$$

Ker velja ena sama St Venantova deformacijska kompatibilnostna enačba

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (4.68)$$

oziroma dve ravnovesni enačbi

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \quad (4.69)$$

in tri Hookove konstitutivne enačbe

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu \sigma_y}{E}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu \sigma_x}{E}, \quad 2\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\mu} \quad (4.70)$$

lahko zapišemo posamezne člene iz enačbe (4.68)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Z vstavitvijo v enačbo (4.68) tako dobimo

$$\frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \left( \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right) \right) = 2 \frac{1 + \nu}{E} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

oziroma

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Z uporabo  $\Theta = \sigma_x + \sigma_y$  dobimo

$$\nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \nu \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \right) + 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Iz ravnovesne enačbe dobimo z odvajanjem

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = - \left( \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f_x}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = - \left( \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right),$$

oziroma sešteto

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = - \left( 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right)$$

Torej sledi po črtanju enakih členov

$$\nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = -\nu \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial f_x}{\partial x} \quad (4.71)$$

in po analogiji še za drugo pravokotno smer

$$\nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = -\nu \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial f_y}{\partial y} \quad (4.72)$$

S seštetjem obeh enačb (4.71) in (4.72) dobimo za ravninsko stanje napetosti Beltrami-Mitchellovo enačbo

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) + (1 + \nu) \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.73)$$

#### 4.4.2 Beltrami-Mitchell za ravninsko stanje deformacij

V tem primeru sta v vzdolžni smeri

$$\varepsilon_z = 0, \quad \sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y) \quad (4.74)$$

Ker je tukaj

$$\Theta = (1 + \nu) (\sigma_x + \sigma_y) \quad (4.75)$$

veljata Beltrami-Mitchellovi enačbi za posamični smeri

$$\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1 - \nu} \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial f_x}{\partial x} \quad (4.76)$$

$$\nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1 - \nu} \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial f_y}{\partial y} \quad (4.77)$$

in po seštetju obeh dobimo

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{1 - \nu} \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.78)$$

Dobljena enačba se za faktor  $(1 + \nu)/(1 - \nu)$  razlikuje od enačbe (4.73).

## 5. Ortogonalne krivočrtne koordinate

Doslej smo spoznali, da je elastostatski problem rešljiv, saj imamo opravka z 18 veličinami, od katerih je 15 neznank: 3 komponente vektorja sil, 6 komponent tenzorja napetosti, 6 komponent tenzorja deformacij ter 3 komponente vektorja pomikov. Ponavadi so podane obremenitve (sile), lahko pa v nekaterih točkah poznamo pomike - tam so tedaj neznane ustrezne reakcije. Zaradi obstoja 3 ravnovesnih enačb, 6 deformacijskih relacij in 6 konstitutivnih zvez (dodatne kompatibilnostne enačbe ne štejejo, saj samo zagotavljajo rešljivost), je problem določen ob upoštevanju ustreznih robnih pogojev ( $\underline{\sigma} \vec{n} = \vec{f}_s$  in/ali  $\vec{u} = \vec{u}_s$ ). Analitično reševanje danih enačb na definicijskem območju je seveda lahko zelo težavno ali pa sploh neuporabno, tako da se moramo pogosto zateči tudi k numeričnim (končne razlike, končni elementi, robni elementi) in eksperimentalnim (merilnim) postopkom. Izkaže se tudi, da v določenih primerih zaradi oblike definicijskega območja (telesa) uporaba kartezičnih koordinat (sorednic) ni dobra. Zato uvedimo krivočrtne koordinate, npr. valjne, krogelne, ipd.

Z omejitvijo na med seboj pravokotne (ortogonalne) koordinate bomo dane enačbe elastostatike predelali v splošnejšo obliko, nato pa poiskali nekaj preprostih rešitev za osnosimetrično obremenjene valje in središčno simetrično obremenjene krogle (v 6.poglavju).

Najprej moramo predvsem izraziti nastopajoče diferencialne operatorje (div, grad,  $\nabla^2$ ) s pomočjo ortogonalnih krivočrtnih (neodvisnih) koordinat.

Z ozirom na "stari" koordinatni sistem (kartezični)

$$\vec{x} = (x, y, z) \quad (5.1)$$

vedemo nov neodvisen koordinatni sistem (krivočrtni)

$$\vec{\chi} = (\xi, \eta, \zeta) \quad (5.2)$$

kjer vedno lahko oba sistema koordinat medsebojno izrazimo z enačbo

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{\chi}) = \vec{x}(\xi, \eta, \zeta) \quad (5.3)$$

in tudi

$$\vec{\chi} = \vec{\chi}(\vec{x}) = \vec{\chi}(x, y, z) \quad (5.4)$$

ob pogoju neodvisnosti, ki ga izraža Jacobi determinanta

$$|\underline{J}| = \text{Det} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (5.5)$$

Za odvajanje (5.1) velja pravilo

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \zeta} d\zeta \quad (5.6)$$

kar predstavlja matrični zapis (z Jacobi matriko)

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

ali

$$d\vec{x} = \underline{J} d\vec{\chi} \quad (5.8)$$

Podobno dobimo tudi iz (5.2)

$$d\vec{\chi} = \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} dz \quad (5.9)$$

oziroma matrično zapisano

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

ali

$$d\vec{\chi} = \underline{I} d\vec{x} \quad (5.11)$$

Lahko se prepričamo, da je zmnožek

$$\underline{J} \underline{I} = \underline{\delta} \quad (5.12)$$

enotska matrika in sta zato  $\underline{J} = \underline{I}^{-1}$  in  $\underline{I} = \underline{J}^{-1}$  med seboj inverzni.

Zaradi ortogonalnosti obojih koordinat tudi lahko ugotovimo, da sta obe matriki vsaka zase diagonalni, to je

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} H_1, & 0, & 0 \\ 0, & H_2, & 0 \\ 0, & 0, & H_3 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

in

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} 1/H_1, & 0, & 0 \\ 0, & 1/H_2, & 0 \\ 0, & 0, & 1/H_3 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

kjer so  $H_n$  "skalniki" (povečevalni ali pomanjševalni količniki), ki so izračunljivi z obrazcem

$$\frac{1}{H_n^2} = \sum_{m=1}^3 \left( \frac{\partial x_n}{\partial \chi_m} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3 \quad (5.15)$$

V razni literaturi (npr. E.Prelog, Elasto in plastomehanika) so ti količniki ponavadi označeni recipročno

$$h_n = \frac{1}{H_n} \quad n = 1, 2, 3 \quad (5.16)$$

Polarne (valjne) koordinate:

$$x = r \cos\phi, \quad y = r \sin\phi, \quad z = z \quad (5.17)$$

$$\xi = r, \quad \eta = \phi, \quad \zeta = z \quad (5.18)$$

Tu z odvajanjem dobimo

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \cos\phi, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sin\phi, \quad \frac{\partial z}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = -r \sin \phi, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = r \cos \phi, \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \zeta} = 1$$

in so ustrezni skalniki

$$h_1 = \frac{1}{H_1} = 1 \quad (5.19)$$

$$h_2 = \frac{1}{H_2} = r \quad (5.20)$$

$$h_3 = \frac{1}{H_3} = 1 \quad (5.21)$$

Polarne (krogelne) koordinate:

$$x = r \sin \phi \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \cos \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (5.22)$$

$$\xi = r, \quad \eta = \phi, \quad \zeta = \theta \quad (5.23)$$

ter so ustrezni skalniki

$$h_1 = \frac{1}{H_1} = 1 \quad (5.24)$$

$$h_2 = \frac{1}{H_2} = r \sin \theta \quad (5.25)$$

$$h_3 = \frac{1}{H_3} = r \quad (5.26)$$

## 5.1 Diferencialni operatorji

a) Gradient skalarja (vektor)

$$\text{grad } p = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \frac{\partial p}{\partial \xi} \\ H_2 \frac{\partial p}{\partial \eta} \\ H_3 \frac{\partial p}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$



b) Divergenca vektorja (skalar)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = H_1 H_2 H_3 \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{u}{H_2 H_3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{v}{H_3 H_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{w}{H_1 H_2} \right) \right) \end{aligned} \quad (5.28)$$

c) Laplace skalarja (skalar)

$$\begin{aligned} \nabla^2 p &= \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = H_1 H_2 H_3 \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{H_1}{H_2 H_3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{H_2}{H_3 H_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{H_3}{H_1 H_2} \right) \right) \end{aligned} \quad (5.29)$$

d) Divergenca tenzorja (vektor)

$$\operatorname{div} \underline{T} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{bmatrix} T_{\xi\xi} & T_{\xi\eta} & T_{\xi\zeta} \\ T_{\eta\xi} & T_{\eta\eta} & T_{\eta\zeta} \\ T_{\zeta\xi} & T_{\zeta\eta} & T_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

kjer so posamezne komponente tega vektorja

$$\begin{aligned} t_x &= \frac{\partial T_{\xi\xi}}{\partial x} + \frac{\partial T_{\eta\xi}}{\partial y} + \frac{\partial T_{\zeta\xi}}{\partial z} = H_1 H_2 H_3 \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{T_{\xi\xi}}{H_2 H_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{T_{\eta\xi}}{H_3 H_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{T_{\zeta\xi}}{H_1 H_2} \right) \right) + H_1 H_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{H_1} \right) T_{\xi\eta} + H_1 H_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{H_1} \right) T_{\xi\zeta} - \\ &\quad - H_1 H_2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{H_2} \right) T_{\eta\eta} - H_1 H_3 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{H_3} \right) T_{\zeta\zeta} \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} t_y &= \frac{\partial T_{\eta\eta}}{\partial y} + \frac{\partial T_{\zeta\eta}}{\partial z} + \frac{\partial T_{\xi\eta}}{\partial x} = H_1 H_2 H_3 \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{T_{\eta\eta}}{H_3 H_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{T_{\zeta\eta}}{H_1 H_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{T_{\xi\eta}}{H_2 H_3} \right) \right) + H_2 H_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{H_2} \right) T_{\eta\zeta} + H_2 H_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{H_2} \right) T_{\eta\xi} - \\ &\quad - H_2 H_3 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{H_3} \right) T_{\zeta\zeta} - H_2 H_1 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{H_1} \right) T_{\xi\xi} \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned}
t_z &= \frac{\partial T_{\zeta\zeta}}{\partial z} + \frac{\partial T_{\xi\xi}}{\partial x} + \frac{\partial T_{\eta\eta}}{\partial y} = H_1 H_2 H_3 \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{T_{\zeta\zeta}}{H_1 H_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{T_{\xi\xi}}{H_2 H_3} \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{T_{\eta\eta}}{H_3 H_1} \right) \right) + H_3 H_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{H_3} \right) T_{\zeta\xi} + H_3 H_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{H_3} \right) T_{\zeta\eta} - \\
&- H_3 H_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{H_1} \right) T_{\xi\xi} - H_3 H_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{H_2} \right) T_{\eta\eta}
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Analogno bi lahko izpeljali tudi gradient vektorja (tenzor), ki nastopa v deformacijskih enačbah. Dobimo ga s trikratno uporabo enačbe (5.27).

## 5.2 Osnovne enačbe

### (a) Ravnovesne enačbe

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\sigma_\xi}{H_2 H_3} \right) - \frac{\sigma_\eta}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \xi} - \frac{\sigma_\zeta}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \xi} + H_1 \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\tau_{\xi\eta}}{H_1^2 H_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\tau_{\xi\zeta}}{H_1^2 H_2} \right) \right) + \frac{f_\xi}{H_1 H_2 H_3} = 0 \tag{5.34}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\sigma_\eta}{H_3 H_1} \right) - \frac{\sigma_\zeta}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial \eta} - \frac{\sigma_\xi}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \eta} + H_2 \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\tau_{\eta\zeta}}{H_2^2 H_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\tau_{\eta\xi}}{H_2^2 H_3} \right) \right) + \frac{f_\eta}{H_1 H_2 H_3} = 0 \tag{5.35}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\sigma_\zeta}{H_1 H_2} \right) - \frac{\sigma_\xi}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \zeta} - \frac{\sigma_\eta}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \zeta} + H_3 \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\tau_{\zeta\xi}}{H_3^2 H_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\tau_{\zeta\eta}}{H_3^2 H_1} \right) \right) + \frac{f_\zeta}{H_1 H_2 H_3} = 0 \tag{5.36}$$

### (b) Deformacijske enačbe

$$\varepsilon_\xi = H_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + H_1 H_2 \frac{v}{\partial H_1} + H_1 H_3 \frac{w}{\partial H_1} \tag{5.37}$$

$$\varepsilon_\eta = H_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + H_2 H_3 \frac{w}{\partial H_2} + H_2 H_1 \frac{u}{\partial H_2} \tag{5.38}$$

$$\varepsilon_\zeta = H_3 \frac{\partial w}{\partial \zeta} + H_3 H_1 \frac{u}{\partial H_3} + H_3 H_2 \frac{v}{\partial H_3} \tag{5.39}$$

$$2\gamma_{\xi\eta} = \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \xi} (H_2 v) + \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \eta} (H_1 u) \quad (5.40)$$

$$2\gamma_{\eta\zeta} = \frac{H_2}{H_3} \frac{\partial}{\partial \eta} (H_3 w) + \frac{H_3}{H_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} (H_2 v) \quad (5.41)$$

$$2\gamma_{\zeta\xi} = \frac{H_3}{H_1} \frac{\partial}{\partial \zeta} (H_1 u) + \frac{H_1}{H_3} \frac{\partial}{\partial \xi} (H_3 w) \quad (5.42)$$

(c) Konstitutivne enačbe

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= 2\mu \left( \varepsilon_\xi + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_v \right) \\ \sigma_\eta &= 2\mu \left( \varepsilon_\eta + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_v \right) \\ \sigma_\zeta &= 2\mu \left( \varepsilon_\zeta + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_v \right) \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\xi\eta} &= 2\mu \gamma_{\xi\eta} \\ \tau_{\eta\zeta} &= 2\mu \gamma_{\eta\zeta} \\ \tau_{\zeta\xi} &= 2\mu \gamma_{\zeta\xi} \end{aligned} \quad (5.44)$$

kjer je od krivočrtnosti pravzaprav odvisen samo volumski raztezek

$$\varepsilon_v = H_1 H_2 H_3 \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{u}{H_2 H_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{v}{H_3 H_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{w}{H_1 H_2} \right) \right) = \varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta + \varepsilon_\zeta \quad (5.45)$$

(d) Navier-Laméjeve enačbe

$$(\lambda + 2\mu) H_1 \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \xi} - 2\mu H_2 H_3 \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\omega_\zeta}{H_3} \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\omega_\eta}{H_2} \right) \right) + f_\xi = 0 \quad (5.46)$$

$$(\lambda + 2\mu) H_2 \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \eta} - 2\mu H_3 H_1 \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\omega_\xi}{H_1} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\omega_\zeta}{H_2} \right) \right) + f_\eta = 0 \quad (5.47)$$

$$(\lambda + 2\mu) H_3 \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \zeta} - 2\mu H_1 H_2 \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\omega_\eta}{H_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\omega_\xi}{H_1} \right) \right) + f_\zeta = 0 \quad (5.48)$$

kjer pomenijo rotacije

$$\omega_\xi = \frac{1}{2} H_2 H_3 \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{w}{H_3} \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{v}{H_2} \right) \right) \quad (5.49)$$

$$\omega_\eta = \frac{1}{2} H_3 H_1 \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u}{H_1} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{w}{H_3} \right) \right) \quad (5.50)$$

$$\omega_\zeta = \frac{1}{2} H_1 H_2 \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{v}{H_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u}{H_1} \right) \right) \quad (5.51)$$

Po potrebi bi lahko zapisali tudi kompatibilnostne, to je St Venantove deformacijske oziroma Beltrami-Mitchellove napetostne (združljivostne) pogoje z uporabo ortogonalnega krivočrtnega koordinatnega sistema.

### 5.3 Valjni koordinatni sistem

Z uporabo že določenih skalnikov (5.19) do (5.21) valjne geometrije lahko takoj deduktivno določimo vse potrebne formule v cilindričnem koordinatnem sistemu  $(r, z, \phi)$ .

#### a) Splošen primer:

-Ravnovesje

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} + f_r = 0 \quad (5.52)$$

$$\frac{\partial \tau_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \tau_{\phi z}}{\partial z} + 2 \frac{\tau_{\phi r}}{r} + f_\phi = 0 \quad (5.53)$$

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} + f_z = 0 \quad (5.54)$$

- Deformacije

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (5.55)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{u}{r} \quad (5.56)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (5.57)$$

$$2\gamma_{r\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad (5.58)$$

$$2\gamma_{\phi z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \phi} \quad (5.59)$$

$$2\gamma_{zr} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (5.60)$$

- Konstitucija (Hooke)

$$\sigma_r = 2\mu \left( \varepsilon_r + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_v \right) \quad (5.61)$$

$$\sigma_\phi = 2\mu \left( \varepsilon_\phi + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_v \right) \quad (5.62)$$

$$\sigma_z = 2\mu \left( \varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_v \right) \quad (5.63)$$

$$\tau_{r\phi} = 2\mu \gamma_{r\phi} \quad (5.64)$$

$$\tau_{\phi z} = 2\mu \gamma_{\phi z} \quad (5.65)$$

$$\tau_{zr} = 2\mu \gamma_{zr} \quad (5.66)$$

in je

$$\varepsilon_v = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial r}}_{\varepsilon_r} + \underbrace{\frac{u}{r}}_{\varepsilon_\phi} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi}}_{\varepsilon_\phi} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{\varepsilon_z} \quad (5.67)$$

- Navier-Lamé (s termiko)

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial r} - 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_z}{\partial \phi} - \frac{\partial \omega_\phi}{\partial z} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial r} + f_r = 0 \quad (5.68)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \phi} - 2\mu \left( \frac{\partial \omega_r}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right) - (3\lambda + 2\mu) \frac{\alpha}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} + f_\phi = 0 \quad (5.69)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} - \frac{2\mu}{r} \left( \frac{\partial(r\omega_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial \omega_r}{\partial \phi} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial z} + f_z = 0 \quad (5.70)$$

kjer so

$$\omega_r = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \phi} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (5.71)$$

$$\omega_\phi = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (5.72)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial(r v)}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \quad (5.73)$$

b) Radialen (vzdolžno in azimutalno neodvisen) primer:

- Ravnovesje

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} + f_r = 0 \quad (5.74)$$

- Deformacije

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (5.75)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{u}{r} \quad (5.76)$$

- Navier-Lamé (s termiko)

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} + \frac{f_r}{\lambda + 2\mu} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha \frac{dT}{dr} \quad (5.77)$$

ali tudi drugače zapisano

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d(r u)}{dr} \right) + \frac{f_r}{\lambda + 2\mu} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha \frac{dT}{dr} \quad (5.78)$$

## 5.4 Krogelni koordinatni sistem

Z uporabo že določenih skalnikov (5.24) do (5.26) krogelne geometrije lahko takoj deduktivno določimo vse potrebne formule krogelnega sistema  $(r, \phi, \theta)$ .

a) Splošen primer:

- Ravnovesje

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_\phi - \sigma_\theta + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta) + f_r = 0 \quad (5.79)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r} (3\tau_{r\phi} + 2\tau_{\phi\theta} \operatorname{ctg} \theta) + f_\phi = 0 \quad (5.80)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} (3\tau_{r\theta} + (\sigma_\theta - \sigma_\phi) \operatorname{ctg} \theta) + f_\theta = 0 \quad (5.81)$$

- Deformacije

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (5.82)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{u}{r} + \frac{w}{r \operatorname{ctg} \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \phi} \quad (5.83)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (5.84)$$

$$2\gamma_{r\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad (5.85)$$

$$2\gamma_{\phi\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta \frac{v}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \phi} \quad (5.86)$$

$$2\gamma_{\theta r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad (5.87)$$

- Navier-Lamé (brez termike)

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial r} + \frac{2\mu}{r \sin\theta} \left( \frac{\partial(\omega_\phi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial \omega_\theta}{\partial \phi} \right) + f_r = 0 \quad (5.88)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \phi} + \frac{2\mu}{r} \left( \frac{\partial(r \omega_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} \right) + f_\phi = 0 \quad (5.89)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \theta} + \frac{2\mu}{r \sin\theta} \left( \frac{\partial \omega_r}{\partial \phi} - \sin\theta \frac{\partial(r \omega_\phi)}{\partial r} \right) + f_\theta = 0 \quad (5.90)$$

kjer so

$$\omega_r = \frac{1}{2r \sin\theta} \left( \frac{\partial w}{\partial \phi} - \frac{\partial(v \sin\theta)}{\partial \theta} \right) \quad (5.91)$$

$$\omega_\phi = \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial(r w)}{\partial r} \right) \quad (5.92)$$

$$\omega_\theta = \frac{1}{2r \sin\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial(r v)}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \quad (5.93)$$

b) Središčno simetričen (radialen) primer :

- Ravnovesje

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} + f_r = 0, \quad \sigma_\theta = \sigma_\phi \quad (5.94)$$

- Deformacije

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (5.95)$$

$$\varepsilon_\phi = \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (5.96)$$

- Navier-Lamé (s termiko)

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} \right) + \frac{f_r}{\lambda + 2\mu} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha \frac{dT}{dr} \quad (5.97)$$



## 6. Radialni problemi

### 6.1 Mehanske napetosti v cevi

Kot prvi zgled uporabe enačb v cilindričnih koordinatah si oglejmo napetosti zaradi delovanja notranjega in/ali zunanjšega tlaka v dolgem valju (ravninsko deformacijsko stanje) z območjem

$$a \leq r \leq b \quad (6.1)$$

in robnima pogojsma

$$\sigma_r(a) = -p_n, \quad \sigma_r(b) = -p_z \quad (6.2)$$

brez volumskih in termičnih sil.

Navier-Laméjeva enačba za ta primer je homogena (5.78)

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d(r u)}{dr} \right) = 0 \quad (6.3)$$

kar pomeni, da je po prvi integraciji

$$\frac{d(r u)}{dr} = 2 A r \quad (6.4)$$

in po drugi integraciji dobimo

$$u(r) = A r + \frac{B}{r} \quad (6.5)$$

Integracijski konstanti  $A$ ,  $B$  določimo z upoštevanjem navedenih robnih pogojev (6.2), če izrazimo napetosti preko deformacij s pomiki. Tako za dolgi valj ( $\varepsilon_z = 0$ ) dobimo

$$\sigma_r(r) = 2(\lambda + \mu) A - \frac{2 \mu B}{r^2} \quad (6.6)$$

in sta zato integracijski konstanti

$$B = \frac{1}{2\mu}(p_n - p_z) \frac{b^2 r^2}{b^2 - a^2} \quad (6.7)$$

$$A = \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \left( \frac{2\mu B}{a^2} - p_n \right) \quad (6.8)$$

tako da je radialna komponenta napetosti v odvisnosti od polmera

$$\sigma_r(r) = -p_n + (p_n - p_z) b^2 \frac{1 - \frac{a^2}{r^2}}{b^2 - a^2} \quad (6.9)$$

Iz ravnovesne enačbe (5.74) dobimo obročno komponento napetosti

$$\sigma_\phi(r) = \sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} \quad (6.10)$$

in je zato rezultat

$$\sigma_\phi(r) = -p_n + (p_n - p_z) b^2 \frac{1 + \frac{a^2}{r^2}}{b^2 - a^2} \quad (6.11)$$

Tretja komponenta napetosti v vzdolžni smeri je zaradi ravninskega deformacijskega stanja ( $\varepsilon_z = 0$ ) podana z izrazom

$$\sigma_z(r) = -\nu(\sigma_r + \sigma_\phi) = 2\nu \frac{p_z b^2 - p_n a^2}{b^2 - a^2} = konst. \quad (6.12)$$

Kadar je obremenitev samo notranja, je rešitev

$$\sigma_r(r) = p_n a^2 \frac{1 - \frac{b^2}{r^2}}{b^2 - a^2} \quad (6.13)$$

$$\sigma_\phi(r) = p_n a^2 \frac{1 + \frac{b^2}{r^2}}{b^2 - a^2} \quad (6.14)$$

$$\sigma_z(r) = -2\nu \frac{p_n a^2}{b^2 - a^2} = konst. \quad (6.15)$$

Največjo vrednost ima obročna napetost na notranjem robu cevi pri  $r = a$  in znaša ( $p_z = 0$ )

$$\sigma_\phi(a) = p_n \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} \quad (6.16)$$

Primerjalni rezultati po "kotelski" formuli (trdnost - 1.letnik) znašajo (zaprt valj z notranjim tlakom)

$$\sigma_{\phi} = \frac{p_n a}{b - a} \quad (6.17)$$

$$\sigma_z = \frac{p_n a^2}{b^2 - a^2} \quad (6.18)$$

Vidimo torej, da vrednost napetosti po obrazcu (6.16) z limitnim razvojem  $b/a \rightarrow 1$  (tankosteni valj) daje enako kot (6.17), sicer pa je kotelski rezultat samo povprečna vrednost. Na notranjem plašču so namreč napetosti večje, vendar je razlika bistvena le pri debelostenih ceveh.

## 6.2 Mehanske napetosti v krogli

Navier-Laméjeva enačba (5.97) je tudi tukaj samo homogena

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} \right) = 0 \quad (6.19)$$

z robnima pogoje

$$\sigma_r(a) = -p_n, \quad \sigma_r(b) = -p_z \quad (6.20)$$

Po prvi integraciji dobimo

$$\frac{d(r^2 u)}{dr} = 3 A r^2 \quad (6.21)$$

in po drugi integraciji

$$u(r) = A r + \frac{B}{r^2} \quad (6.22)$$

Alternativno pa lahko enačbo (6.19) zapišemo v razviti obliki

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + 2 \left( \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} \right) = 0 \quad (6.23)$$

katere rešitev (Eulerjeva enačba) poiščemo z nastavkom

$$u = r^n, \quad \frac{du}{dr} = n r^{n-1}, \quad \frac{d^2 u}{dr^2} = n(n-1)r^{n-2} \quad (6.24)$$

kar nas pripelje do karakterističnega polinoma

$$n(n-1) + 2(n-1) = n^2 + n - 2 = (n-1)(n+2) = 0 \quad (6.25)$$

in tako dobimo tudi po tej poti isto rešitev, že podano z obrazcem (6.22). Integracijski konstanti  $A$ ,  $B$  določimo z upoštevanjem podanih robnih pogojev (6.20), če izrazimo napetosti preko deformacij s pomikom. Tako dobimo

$$\sigma_r = 2\mu \left( A \frac{1+\nu}{1-2\nu} - \frac{2B}{r^3} \right) \quad (6.26)$$

in sta zato obe integracijski konstanti

$$B = \frac{p_n - p_z}{4\mu} \frac{b^3 a^3}{b^3 - a^3} \quad (6.27)$$

$$A = \frac{1-2\nu}{1+\nu} \left( \frac{2B}{a^3} - \frac{p_n}{2\mu} \right) \quad (6.28)$$

ter je radialna komponenta napetosti v odvisnosti od polmera

$$\sigma_r(r) = -p_n + (p_n - p_z) \frac{b^3}{b^3 - a^3} \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \quad (6.29)$$

Iz ravnovesne enačbe (5.94) dobimo obročno komponento napetosti

$$\sigma_\phi(r) = \sigma_r + \frac{r}{2} \frac{d\sigma_r}{dr} \quad (6.30)$$

in je zato rezultat

$$\sigma_\phi(r) = \sigma_\theta(r) = -p_n + (p_n - p_z) \frac{b^3}{b^3 - a^3} \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \quad (6.31)$$

Kadar pa je obremenitev samo notranja, je ustrezna rešitev

$$\sigma_r(r) = p_n \frac{a^3}{b^3 - a^3} \left( 1 - \frac{b^3}{r^3} \right) \quad (6.32)$$

$$\sigma_\phi(r) = \sigma_\theta(r) = p_n \frac{a^3}{b^3 - a^3} \left( 1 + \frac{b^3}{2r^3} \right) \quad (6.33)$$

Podane rešitve za valj in kroglo ne veljajo za polni telesi, ker je pri  $r = 0$  drugačen robni pogoj.

### 6.3 Napetosti v polnem valju in polni krogli

Na zunanjem robu naj bosta valj oziroma krogla obremenjena s tlakom, tako da je tam robni pogoj

$$\sigma_r(b) = -p_z \quad (6.34)$$

medtem ko v sredini velja preprost pogoj

$$u(a = 0) = 0 \quad (6.35)$$

kar lahko zaradi simetrije zapišemo tudi v obliki

$$\left. \frac{d\sigma_r}{dr} \right|_{a=0} = 0 \quad (6.36)$$

Rešitev diferencialnih enačb valja (6.3) in krogle (6.19) je za polni telesi (v izogib singularnosti rešitve mora biti  $B = 0$ )

$$u(r) = A r \quad (6.37)$$

tako da dobimo trivialno rešitev (6.6) oziroma (6.26) valja in krogle

$$\sigma_r(r) = \textit{konst.} = -p_z \quad (6.38)$$

Zaradi izraza (6.36) so tudi ostale napetosti glede na ravnovesni enačbi (5.74) in (5.94):

- v polnem valju

$$\sigma_\phi(r) = -p_z, \quad \sigma_z(r) = -2\nu p_z \quad (\text{dolgi valj}) \quad \text{ali} \quad \sigma_z = 0 \quad (\text{disk}) \quad (6.39)$$

- v polni krogli

$$\sigma_\phi(r) = \sigma_\theta(r) = -p_z \quad (6.40)$$

## 6.4 Termične napetosti v valju in krogli

Javier-Laméjeva enačba (5.78) oziroma (5.97) za ločeno termiko ( $f_r = 0$ ,  $N_n = p_z = 0$ ) se glasi enotno ( $n = 1 \dots$  valj,  $n = 2 \dots$  krogla)

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^n} \frac{d(r^n u)}{dr} \right) = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha \frac{dT}{dr} \quad (6.41)$$

li izpisano

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + n \left( \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} \right) = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha \frac{dT}{dr} \quad (6.42)$$

Rešitev te nehomogene (Eulerjeve) enačbe dobimo ali z variacijo konstant rešitev homogenega dela (6.5) oziroma (6.22) ali pa z dvojno integracijo. Tako po prvi integraciji enačbe (6.41) dobimo izraz

$$\frac{d(r^n u)}{dr} = (n + 1) A r^n + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha T(r) r^n \quad (6.43)$$

in po drugi integraciji pomik valja in krogle v radialni smeri

$$u(r) = A r + \frac{B}{r^n} + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\alpha}{r^n} \int T(r) r^n dr \quad (6.44)$$

Če uporabimo termične robne pogoje votlega telesa (tlačne rešitve so namreč preprosto aditivne)

$$\sigma_r(a) = 0, \quad \sigma_r(b) = 0 \quad (6.45)$$

oziroma polnega telesa

$$u(0) = 0, \quad \sigma_r(b) = 0 \quad (6.46)$$

Dobimo končne obrazce za napetosti v posameznih obravnavanih telesih

a) dolga cev ( $a \leq r \leq b$ ) *long tube.*

$$\sigma_r(r) = \frac{\alpha E}{(1 - \nu)r^2} \left( \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r) r dr - \int_a^r T(r) r dr \right) \quad (6.47)$$

$$\sigma_\phi(r) = \frac{\alpha E}{(1 - \nu)r^2} \left( \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r) r dr + \int_a^r T(r) r dr - T(r) r^2 \right) \quad (6.48)$$

$$\sigma_z(r) = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left( \frac{2\nu}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r) r dr - T(r) \right) \quad (6.49)$$

b) dolga palica ( $0 \leq r \leq b$ )

$$\sigma_r(r) = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left( \frac{1}{b^2} \int_0^b T(r) r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r) r dr \right) \quad (6.50)$$

$$\sigma_\phi(r) = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left( \frac{1}{b^2} \int_0^b T(r) r dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r) r dr - T(r) \right) \quad (6.51)$$

$$\sigma_z(r) = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left( \frac{2\nu}{b^2} \int_0^b T(r) r dr - T(r) \right) \quad (6.52)$$

c) tanek obroč ( $a \leq r \leq b$ ) *Thin ring*

$$\sigma_r(r) = \frac{\alpha E}{r^2} \left( \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r) r dr - \int_a^r T(r) r dr \right) \quad (6.53)$$

$$\sigma_\phi(r) = \frac{\alpha E}{r^2} \left( \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r) r dr + \int_a^r T(r) r dr - T(r) r^2 \right) \quad (6.54)$$

$$\sigma_z(r) = 0 \quad (6.55)$$

d) tanek disk ( $0 \leq r \leq b$ )

$$\sigma_r(r) = \alpha E \left( \frac{1}{b^2} \int_0^b T(r) r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r) r dr \right) \quad (6.56)$$

$$\sigma_\phi(r) = \alpha E \left( \frac{1}{b^2} \int_0^b T(r) r dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r) r dr - T(r) \right) \quad (6.57)$$

$$\sigma_z(r) = 0 \quad (6.58)$$

e) votla krogla ( $a \leq r \leq b$ )

$$\sigma_r(r) = \frac{2\alpha E}{(1-\nu)r^3} \left( \frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3} \int_a^b T(r) r^2 dr - \int_a^r T(r) r^2 dr \right) \quad (6.59)$$

$$\sigma_\phi(r) = \frac{\alpha E}{(1-\nu)r^3} \left( \frac{2r^3 + a^3}{b^3 - a^3} \int_a^b T(r) r^2 dr + \int_a^r T(r) r^2 dr - T(r) r^3 \right) \quad (6.60)$$

$$\sigma_\theta(r) = \sigma_\phi(r) \quad (6.61)$$

f) polna krogla ( $0 \leq r \leq b$ )

$$\sigma_r(r) = \frac{2\alpha E}{1-\nu} \left( \frac{1}{b^3} \int_0^b T(r) r^2 dr - \frac{1}{r^3} \int_0^r T(r) r^2 dr \right) \quad (6.62)$$

$$\sigma_\phi(r) = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left( \frac{2}{b^3} \int_0^b T(r) r^2 dr + \frac{1}{r^3} \int_0^r T(r) r^2 dr - T(r) \right) \quad (6.63)$$

$$\sigma_\theta(r) = \sigma_\phi(r) \quad (6.64)$$

Temperaturni poteki  $T(r)$  morajo biti seveda poznani (glej prenos toplote).

## 6.5 Centrifugalne napetosti v valju

Medtem ko vrtenje krogle ni radialen problem, lahko napetosti v rotirajočem valju (disku, obroču, cevi, palici) okoli geometrijske osi zaradi sredobežne sile določimo z upoštevanjem Newtonovega zakona (sila = masa · pospešek)

$$f_r = \rho \omega^2 r \quad (6.65)$$

kjer sta  $\rho$  gostota snovi in  $\omega$  vrtilna kotna hitrost.

Za reševanje zastavljenega problema lahko uporabimo bodisi Navier-Laméjevo enačbo (5.78) ali pa kar ravnovesno enačbo (5.74), iz katere izločimo obročno napetost preko deformacijskih in konstitutivnih enačb.

Ravnovesna enačba valja z upoštevanjem centrifugalne sile se glasi

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} + \rho \omega^2 r = 0 \quad (6.66)$$

Ker so deformacije (tanek obroč in disk,  $\sigma_z = 0$ )



$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu \sigma_\phi) \quad (6.67)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{u}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_\phi - \nu \sigma_r) \quad (6.68)$$

velja za radialni pomik

$$u = r \varepsilon_\phi = \frac{r}{E}(\sigma_\phi - \nu \sigma_r) \quad (6.69)$$

Tako dobimo iz (6.67) po krajšanju E modula

$$\frac{d}{dr}(r(\sigma_\phi - \nu \sigma_r)) = \sigma_r - \nu \sigma_\phi \quad (6.70)$$

ali urejeno in razrešeno

$$\nu r \frac{d\sigma_r}{dr} - r \frac{d\sigma_\phi}{dr} + (1 + \nu)(\sigma_r - \sigma_\phi) = 0 \quad (6.71)$$

Iz ravnovesne enačbe (6.66) sledi obročna napetost

$$\sigma_\phi = r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r + \rho \omega^2 r^2 \quad (6.72)$$

in po odvajanju

$$\frac{d\sigma_\phi}{dr} = r \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + 2 \frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \rho \omega^2 r \quad (6.73)$$

Če to vstavimo v (6.71) in po ureditvi dobimo diferencialno enačbo 2.reda za radialne napetosti

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\sigma_r}{dr} + (3 + \nu) \rho \omega^2 = 0 \quad (6.74)$$

Homogeni del te Eulerjeve enačbe lahko razrešimo z nastavkom v obliki

$$\sigma_r = r^m, \quad \frac{d\sigma_r}{dr} = m r^{m-1}, \quad \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} = m(m-1) r^{m-2} \quad (6.75)$$

tako da z vstavitvijo v (6.74) sledi karakteristični polinom

$$m(m-1) + 3m = m^2 + 2m = m(m+2) = 0 \quad (6.76)$$

katerega korena

$$m_1 = 0, \quad m_2 = -2 \quad (6.77)$$

sta med seboj neodvisna ter je rešitev homogenega dela enačbe (6.74)

$$\sigma_r^0 = C + \frac{D}{r^2} \quad (6.78)$$

kar že poznamo (6.6) z drugače zapisanima konstantama.

Partikularno rešitev nehomogene enačbe (6.74) dobimo s postopkom variacije integracijskih konstant, to je

$$C' \cdot 1 + \frac{D'}{r^2} = 0, \quad C' \cdot 0 - \frac{2D'}{r^3} = -(3 + \nu) \rho \omega^2 \quad (6.79)$$

iz česar po razrešitvi sledita odvoda iskanih funkcij

$$C' = -\frac{3 + \nu}{2} \rho \omega^2 r, \quad D' = \frac{3 + \nu}{2} \rho \omega^2 r^3 \quad (6.80)$$

in po njuni integraciji dobimo

$$C = -\frac{3 + \nu}{2} \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} + A, \quad D = \frac{3 + \nu}{2} \rho \omega^2 \frac{r^4}{4} + B \quad (6.81)$$

Skupna rešitev radialne napetosti v tankem obroču oziroma disku nespremenljive debeline s centrifugalno obremenitvijo (brez ostalih obremenitev) je torej

$$\sigma_r(r) = A + \frac{B}{r^2} - \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \quad (6.82)$$

medtem ko obročna napetost dobimo z uporabo (6.72) in je

$$\sigma_\phi(r) = A - \frac{B}{r^2} - \frac{3\nu + 1}{8} \rho \omega^2 r^2 \quad (6.83)$$

Pomik v radialni smeri je po enačbi (6.69) že izračunano podan z izrazom

$$\begin{aligned} u(r) &= \frac{r}{E} \left( A(1 - \nu) - \frac{B}{r^2}(1 + \nu) - \rho \omega^2 r^2 \frac{1 - \nu^2}{8} \right) = \\ &= \frac{1}{2\mu} \left( \frac{1 - \nu}{1 + \nu} A r - \frac{B}{r} - (1 - \nu) \frac{\rho}{8} r^3 \omega^2 \right) \end{aligned} \quad (6.84)$$

To rešitev uporabimo, kadar so robni pogoji "geometrijski".

Integracijski konstanti  $A, B$  izračunamo iz ustreznih robnih pogojev

$$(i) \text{ polni disk: } r = 0 \cdots u = 0 \quad (\text{ali } \sigma_r = \sigma_\phi) \quad (6.85)$$

$$r = b \cdots \sigma_r = 0 \quad (6.86)$$

$$(ii) \text{ votli obroč: } r = a \cdots \sigma_r = 0 \quad (6.87)$$

$$r = b \cdots \sigma_r = 0 \quad (6.88)$$

Morebitne zunanje in/ali notranje tlake upoštevamo s superpozicijo tlačne rešitve mirujočega valja (6.9) in (6.11).

Pri polnem disku sta iskani integracijski konstanti

$$A = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 b^2, \quad B = 0 \quad (6.89)$$

in zato veljata porazdelitvi napetosti

$$\sigma_r(r) = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 (b^2 - r^2) \quad (6.90)$$

$$\sigma_\phi(r) = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 \left( b^2 - \frac{3\nu + 1}{3 + \nu} r^2 \right) \quad (6.91)$$

ter so konkretne vrednosti obročne napetosti na zunanjem in notranjem robu

$$\sigma_\phi(b) = \frac{1 - \nu}{4} \rho \omega^2 b^2 \quad (6.92)$$

$$\sigma_\phi(a = 0) = \sigma_r(a = 0) = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 b^2 \quad (6.93)$$

Pri votlem obroču sta integracijski konstanti

$$A = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 (b^2 + a^2), \quad B = -\frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 b^2 a^2 \quad (6.94)$$

tako da dobimo porazdelitve napetosti

$$\sigma_r(r) = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 b^2 \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{r^2} - \frac{r^2}{b^2} \right) \quad (6.95)$$

$$\sigma_\phi(r) = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 b^2 \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{r^2} - \frac{3\nu + 1}{3 + \nu} \frac{r^2}{b^2} \right) \quad (6.96)$$

ter so vrednosti obročne napetosti na notranjem in zunanem robu

$$\sigma_{\phi}(a) = \frac{3 + \nu}{4} \rho \omega^2 b^2 \left( \frac{1 - \nu}{3 + \nu} \frac{a^2}{b^2} + 1 \right) \quad (6.97)$$

$$\sigma_{\phi}(b) = \frac{3 + \nu}{4} \rho \omega^2 b^2 \left( \frac{1 - \nu}{3 + \nu} + \frac{a^2}{b^2} \right) \quad (6.98)$$

Radialna napetost je nič na obeh robovih, ima pa vmes pri polmeru

$$r_{*} = \sqrt{a b} \quad (6.99)$$

svoj ekstrem

$$\sigma_r(r_{*}) = \frac{3 + \nu}{4} \rho \omega^2 b^2 \left( 1 - \frac{a}{b} \right) \quad (6.100)$$

Od vseh napetosti v votlem valju (obroču) je največja obročna napetost na notranjem robu.

Ustrezne obrazce za dolgo cev ( $\varepsilon_z = 0$ ) lahko dobimo kar z znano zamenjavo (4.53)

$$\nu \rightarrow \frac{\nu}{1 - \nu}$$

tako da zapišemo

$$\sigma_r(r) = A + \frac{B}{r^2} - \frac{3 - 2\nu}{1 - \nu} \frac{\rho}{8} r^2 \omega^2 \quad (6.101)$$

$$\sigma_{\phi}(r) = A - \frac{B}{r^2} - \frac{1 + 2\nu}{1 - \nu} \frac{\rho}{8} r^2 \omega^2 \quad (6.102)$$

$$\sigma_z(r) = \nu (\sigma_r(r) + \sigma_{\phi}(r)) \quad (6.103)$$

Nadaljnji postopek je za cev povsem analogen, kot je bil za obroč, to je določitev integracijskih konstant in končnih obrazcev.

## 6.6 Krčni nased dveh obročev

Pogost pojav v strojništvu je primer krčne nasaditve obroča na pesto, dvojne (topovske) cevi in podobno. Tu imamo opravka z mešanimi robnimi pogoji. Povsem znotraj in povsem zunaj poznamo npr. tlak, na meji med obema obročema pa je npr. omejen pomik (kompatibilnost deformacij).

Rešitve za mirujoč obroč (napetosti)

$$\sigma_r(r) = A + \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_\phi(r) = A - \frac{B}{r^2} \quad (6.104)$$

in pomik

$$u(r) = \frac{r}{E} \left( A(1 - \nu) - (1 + \nu) \frac{B}{r^2} \right) \quad (6.105)$$

uporabimo za vsak od tandemsko (sosredno) spojenih obročev, pri čemer so ustrezni robni pogoji

$$\sigma_r^n(a_1) = -p_n (= 0) \quad (6.106)$$

$$\sigma_r^n(r_m) = \sigma_r^z(r_m) = -p_m \quad (6.107)$$

$$\sigma_r^z(b_2) = -p_z (= 0) \quad (6.108)$$

Velja pa tudi še dodatni pogoj krčne nasajenosti zunanjega na notranji obroč (negativna zračnost)

$$t = u^z(r_m) - u^n(r_m) \quad (6.109)$$

Enačbeni sistem, s katerim računamo integracijske konstante (štiri) pri tako postavljenih robnih pogojih (vrednosti  $p_m$  niti ne rabimo), se glasi (če sta  $E_1 = E_2$ )

$$A_1 + \frac{B_1}{a_1^2} = -p_n (= 0) \quad (6.110)$$

$$A_1 + \frac{B_1}{r_m^2} = A_2 + \frac{B_2}{r_m^2} \quad (6.111)$$

$$A_2 + \frac{B_2}{b_2^2} = -p_z (= 0) \quad (6.112)$$

$$A_2(1 - \nu)r_m - B_2 \frac{1 + \nu}{r_m} - A_1(1 - \nu)r_m + B_1 \frac{1 + \nu}{r_m} = tE \quad (6.113)$$

Kolikor imamo številske podatke, je naprej najbolje računati numerično.

## 6.7 Napetosti v obročih spremenljive debeline

V strojniški praksi imamo pogosto opravka s krožnimi valji spremenljive debeline. Zato si moramo prirediti ravnovesno enačbo. Izpeljimo jo na elementaren način v radialni simetriji (brez upoštevanja prostorninskih sil), če je  $t$  debelina

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)(t + dt) d\phi - \sigma_r r t d\phi - \sigma_\phi dr(t + \frac{dt}{2}) 2 \sin \frac{d\phi}{2} = 0 \quad (6.114)$$

Ob upoštevanju, da je približno  $\sin \frac{d\phi}{2} = \frac{d\phi}{2}$  dobimo

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)(t + dt) - \sigma_r r t - \sigma_\phi dr(t + \frac{dt}{2}) = 0 \quad (6.115)$$

in po razvitju oklepajev in zanemaritvi zmnožkov več diferencialnih veličin

$$\sigma_r r t + \sigma_r r dt + \sigma_r t dr + d\sigma_r r t - \sigma_r r t - \sigma_\phi t dr = 0 \quad (6.116)$$

oziroma ( $t' = \frac{dt}{dr}$ ,  $t'' = \frac{d^2t}{dr^2}$ )

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r \frac{r t'}{t} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = 0 \quad (6.117)$$

ali

$$\sigma_\phi = r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r \left(1 + \frac{r t'}{t}\right) \quad (6.118)$$

Z odvajanjem dobimo

$$\frac{d\sigma_\phi}{dr} = r \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \frac{d\sigma_r}{dr} \left(2 + \frac{r t'}{t}\right) + \sigma_r \frac{r t'' + t t' - r (t')^2}{t^2} \quad (6.119)$$

kar vstavimo v enačbo (6.71) in sledi diferencialna enačba 2. reda za radialno napetost

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \left(\frac{3}{t} + \frac{t'}{t}\right) \frac{d\sigma_r}{dr} + \left(\frac{t''}{t} + \frac{t'}{r t} (2 + \nu) - \left(\frac{t'}{t}\right)^2\right) \sigma_r = 0 \quad (6.120)$$

Pri termičnih obremenitvah nastopa še dodatni člen

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \left(\frac{3}{t} + \frac{t'}{t}\right) \frac{d\sigma_r}{dr} + \left(\frac{t''}{t} + \frac{t'}{r t} (2 + \nu) - \left(\frac{t'}{t}\right)^2\right) \sigma_r + \frac{\alpha E}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \quad (6.121)$$

s centrifugalno silo ( $\rho\omega^2 r$ ) velja kot v enačbi (6.74) dodatni člen

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \left(\frac{3}{t} + \frac{t'}{t}\right) \frac{d\sigma_r}{dr} + \left(\frac{t''}{t} + \frac{t'}{r t}(2 + \nu) - \left(\frac{t'}{t}\right)^2\right) \sigma_r + (3 + \nu) \rho \omega^2 = 0 \quad (6.122)$$

Za  $t = \text{konst.}$  ( $t' = t'' = 0$ ) se dobljeni obrazci skrčijo v konvencionalno obliko. Pri poljubnem profilu (npr. trapeznem) je treba reševanje izvesti numerično, medtem ko za hiperboličen profil obstaja analitična pot.

Pri hiperboličnem profilu

$$t = t_a \left(\frac{a}{r}\right)^n, \quad t' = -n t_a \frac{a^n}{r^{n+1}}, \quad t'' = n(n+1) t_a \frac{a^n}{r^{n+2}} \quad (6.123)$$

dobimo iz enačbe (6.120)

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \frac{3-n}{r} \frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{n(1+\nu)}{r^2} \sigma_r = 0 \quad (6.124)$$

kar je Eulerjeva enačba, ki jo razrešimo z nastavkom

$$\sigma_r = r^m, \quad \frac{d\sigma_r}{dr} = m r^{m-1}, \quad \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} = n(m-1) r^{m-2} \quad (6.125)$$

tako da dobimo karakteristični polinom

$$m^2 + (2-n)m - n(1+\nu) = 0 \quad (6.126)$$

s korenoma

$$m = \frac{n-2 \pm \sqrt{n^2 + 4\nu n + 4}}{2} = (p, q) \quad (6.127)$$

in je splošna rešitev linearna kombinacija obeh neodvisnih možnosti

$$\sigma_r = C r^p + D r^q \quad (6.128)$$

Z  $n = 0$  sta ustrezni vrednosti  $p = 0$  in  $q = -2$  ( $\sigma_r = C + D/r^2$ ), pri  $n = 1$  in  $\nu = 0.3$  pa velja  $p = 0,745$  in  $q = -1,745$ .

Za reševanje enačb (6.121) oziroma (6.122) moramo uporabiti postopek variacije konstant, da izpolnimo še nehomogeni delež. Tako dobimo pri termiki sistem dveh enačb

$$C' r^p + D' r^q = 0, \quad C' p r^{p-1} + D' q r^{q-1} = -\frac{\alpha E}{r} \frac{dT}{dr} \quad (6.129)$$

kar nam daje po razrešitvi odvoda iskanih funkcij

$$C' = \frac{\alpha E}{q-p} \frac{dT}{dr} r^{-p}, \quad D' = \frac{\alpha E}{p-q} \frac{dT}{dr} r^{-q} \quad (6.130)$$

oziroma po izvedeni integraciji

$$C = \frac{\alpha E}{q-p} \int_a^r \frac{dT}{dr} r^{-p} dr, \quad D = \frac{\alpha E}{p-q} \int_a^r \frac{dT}{dr} r^{-q} dr \quad (6.131)$$

Dobljena izraza omogočata zapis radialne napetosti

$$\sigma_r(r) = r^p \left( \frac{\alpha E}{q-p} \int_a^r \frac{dT}{dr} r^{-p} dr + A \right) + r^q \left( \frac{\alpha E}{p-q} \int_a^r \frac{dT}{dr} r^{-q} dr + B \right) \quad (6.132)$$

kjer sta  $A$  in  $B$  integracijski konstanti, ki ju lahko določimo iz pogojev na notranji in zunanji meji obroča ( $\sigma_r(r=a) = 0$ ,  $\sigma_r(r=b) = 0$ )

$$A = \frac{a^q}{a^q b^p - a^p b^q} \frac{\alpha E}{q-p} \left( b^q \int_a^b \frac{dT}{dr} r^{-q} dr - b^p \int_a^b \frac{dT}{dr} r^{-p} dr \right) \quad (6.133)$$

$$B = \frac{a^p}{a^q b^p - a^p b^q} \frac{\alpha E}{p-q} \left( b^p \int_a^b \frac{dT}{dr} r^{-p} dr - b^q \int_a^b \frac{dT}{dr} r^{-q} dr \right) \quad (6.134)$$

Ker pa lahko z integracijo po delih npr. izračunamo

$$\int_a^b \frac{dT}{dr} r^{-p} dr = T(b) b^{-p} - T(a) a^{-p} + p \int_a^b T(r) r^{-p-1} dr \quad (6.135)$$

velja obrazec za radialno napetost v obliki

$$\begin{aligned} \sigma_r(r) = & \frac{\alpha E}{q-p} \left( r^p (T(r) r^{-p} - T(a) a^{-p} + p \int_a^r T(\tau) \tau^{-p-1} d\tau) - \right. \\ & - r^q (T(r) r^{-q} - T(a) a^{-q} + q \int_a^r T(\tau) \tau^{-q-1} d\tau) + \\ & + \frac{a^q r^p - a^p r^q}{a^q b^p - a^p b^q} (b^q (T(b) b^{-q} - T(a) a^{-q} + \\ & + q \int_a^b T(\tau) \tau^{-q-1} d\tau) - b^p (T(b) b^{-p} - T(a) a^{-p} + \\ & \left. + p \int_a^b T(\tau) \tau^{-p-1} d\tau) \right) \quad (6.136) \end{aligned}$$



in zaradi odvisnosti (6.118) in (6.123)

$$\sigma_\phi(r) = r \frac{d\sigma_r}{dr} + (1 - n) \sigma_r \quad (6.137)$$

dobimo še izraz za obročno napetost v hiperboličnem obroču

$$\begin{aligned} \sigma_\phi(r) = & \frac{\alpha E}{q - p} \left( (p + 1 - n) r^p (T(r) r^{-p} - T(a) a^{-p} + p \int_a^r T(r) r^{-p-1} dr) - \right. \\ & - (q + 1 - n) r^q (T(r) r^{-q} - T(a) a^{-q} + q \int_a^r T(r) r^{-q-1} dr) + \\ & + \frac{(p + 1 - n) a^q r^p - (q + 1 - n) a^p r^q}{a^q b^p - a^p b^q} (b^q (T(b) b^{-q} - T(a) a^{-q} + \\ & + q \int_a^b T(r) r^{-q-1} dr) - b^p (T(b) b^{-p} - T(a) a^{-p} + \\ & \left. + p \int_a^b T(r) r^{-p-1} dr) \right) \end{aligned} \quad (6.138)$$

Rešitvi za nasajeni obroč se seveda razlikujeta, ker sta robna pogoja  $\sigma'_r(r = a) = 0$ ,  $\sigma_r(r = b) = 0$ . Tako dobimo namesto (6.133) oziroma (6.134)

$$A = \frac{q a^q}{p a^p b^q - q a^q b^p} \quad (6.139)$$

$$B = \frac{p a^p}{p a^p b^q - q a^q b^p} \quad (6.140)$$

ter ustrezno tudi namesto (6.136) in (6.137)

$$\sigma_r(r) = \dots \frac{q a^q r^p - p a^p b^q}{q a^q b^p - p a^p b^q} \dots \quad (6.141)$$

$$\sigma_\phi(r) = \dots \frac{(p + 1 - n) q a^q r^p - (q + 1 - n) p a^p b^q}{q a^q b^p - p a^p b^q} \dots \quad (6.142)$$

Potrebna temperaturna porazdelitev (glej prenos toplote) je v obravnavanem hiperboličnem obroču

$$T(r) = T_a \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^n} \frac{I_N(M b^{1/N}) I_{1-N}(M r^{1/N}) - I_{-N}(M r^{1/N}) I_{N-1}(M r^{1/N})}{I_N(M b^{1/N}) I_{1-N}(M a^{1/N}) - I_{-N}(M r^{1/N}) I_{N-1}(M a^{1/N})} \quad (6.143)$$

kjer je  $M = N M_0$  in so  $N = 2/(n + 2)$ ,  $M_0^* = m/\sqrt{a^n}$ ,  $m = \sqrt{\alpha/\lambda t_a}$ , z robnima pogojema  $T(r = a) = T_a$ ,  $T'(r = b) = 0$ , medtem ko sta  $\alpha$  in  $\lambda$  toplotna prestopnost in prevodnost snovi.

Če vstavimo (6.143) v (6.136), (6.137) oziroma (6.141), (6.142) dobimo za izračun integral ( $n \neq 0$ )

$$\int_a^r r^{\pm\sqrt{(n/2)^2 + \nu n + 1}} I_{\pm \frac{n}{n+2}} \left( \frac{n}{n+2} M_0 r^{\frac{n+2}{n}} \right) dr$$

ki je v splošnem rešljiv le numerično. Pri obroču konstantne debeline ( $n = 0$ ,  $p = 0$ ,  $q = -2$ ,  $M_0 = m$ ) je ustrezna temperatura

$$T(r) = T_a \frac{K_0(m b) I_0(m r) + I_1(m b) K_0(m r)}{K_0(m b) I_0(m a) + I_1(m b) K_0(m a)} \quad (6.144)$$

kar pomeni, da imamo pri določitvi napetosti opraviti z integraloma, ki sta rešljiva analitično

$$\int_a^r r I_0(m r) dr = \frac{1}{m} (r I_1(m r) - a I_1(m a))$$

$$\int_a^r r K_0(m r) dr = \frac{1}{m} (a K_1(m a) - r K_1(m r))$$

## 6.8 Transverzno in polarno izotropni valji

Zaradi raznih tehnoloških postopkov izdelave (valjanje, vlečenje, iztiskanje, ipd.) so telesa pogosto neizotropna v posameznih smereh. Omejili se bomo na primera transverzne in polarne izotropije valjev. Ker sta napetost in deformacija povezana s konstitutivnim zakonom

$$\{\sigma\} = \underline{D}\{\varepsilon\}, \quad \{\varepsilon\} = \underline{C}\{\sigma\}, \quad \underline{C} = \underline{D}^{-1}, \quad \underline{D} = \underline{C}^{-1} \quad (6.145)$$

sta v splošnem primeru anizotropije (vendar vsled simetrije) matriki

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & D_3 \\ D_2 & D_4 & D_5 \\ D_3 & D_5 & D_6 \end{bmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_2 & C_4 & C_5 \\ C_3 & C_5 & C_6 \end{bmatrix}, \quad (6.146)$$

V polarnem primeru valja so elastični parametri

$$E_r \neq E_\phi = E_z \quad (6.147)$$

$$\mu_{r\phi} = \mu_{rz} \neq \mu_{\phi z} = \frac{E_z}{2(1 + \nu_{\phi z})} \quad (6.148)$$

$$\nu_{r\phi} = \nu_{rz} \neq \nu_{\phi z} \quad (6.149)$$

in zato

$$C_1 = \frac{1}{E_r} \quad (6.150)$$

$$C_2 = C_3 = -\frac{\nu_{rz}}{E_r} \quad (6.151)$$

$$C_4 = C_6 = \frac{1}{E_z} \quad (6.152)$$

$$C_5 = -\frac{\nu_{\phi z}}{E_z} \quad (6.153)$$

$$D_1 = \frac{E_r(1 - \nu_{\phi z})}{1 - \nu_{\phi z} - 2\nu_{rz}^2 \frac{E_z}{E_r}} \quad (6.154)$$

$$D_2 = D_3 = \frac{E_z \nu_{rz}}{1 - \nu_{\phi z} - 2\nu_{rz}^2 \frac{E_z}{E_r}} \quad (6.155)$$

$$D_4 = D_6 = \frac{E_z(1 - \nu_{rz}^2 \frac{E_z}{E_r})}{(1 + \nu_{\phi z})(1 - \nu_{\phi z} - 2\nu_{rz}^2 \frac{E_z}{E_r})} \quad (6.156)$$

$$D_5 = \frac{E_z(\nu_{\phi z} + \nu_{rz}^2 \frac{E_z}{E_r})}{(1 + \nu_{\phi z})(1 - \nu_{\phi z} - 2\nu_{rz}^2 \frac{E_z}{E_r})} \quad (6.157)$$

V transverznem primeru valja so elastični parametri

$$E_r = E_\phi \neq E_z \quad (6.158)$$

$$\mu_{rz} = \mu_{\phi z} \neq \mu_{r\phi} = \frac{E_r}{2(1 + \nu_{r\phi})} \quad (6.159)$$

$$\nu_{rz} = \nu_{\phi z} \neq \nu_{r\phi} \quad (6.160)$$

in zato

$$C_1 = C_4 = \frac{1}{E_r} \quad (6.161)$$

$$C_2 = -\frac{\nu_{r\phi}}{E_r} \quad (6.162)$$

$$C_3 = C_5 = -\frac{\nu_{rz}}{E_z} \quad (6.163)$$

$$C_6 = \frac{1}{E_z} \quad (6.164)$$

$$D_1 = D_4 = \frac{E_r (1 - \nu_{rz}^2 \frac{E_r}{E_z})}{(1 + \nu_{r\phi})(1 - \nu_{r\phi} - 2\nu_{rz}^2 \frac{E_r}{E_z})} \quad (6.165)$$

$$D_2 = \frac{E_r(\nu_{r\phi} + \nu_{rz}^2 \frac{E_r}{E_z})}{(1 + \nu_{r\phi})(1 - \nu_{r\phi} - 2\nu_{rz}^2 \frac{E_r}{E_z})} \quad (6.166)$$

$$D_3 = D_5 = \frac{E_r \nu_{r\phi}}{1 - \nu_{r\phi} - 2\nu_{rz}^2 \frac{E_r}{E_z}} \quad (6.167)$$

$$D_6 = \frac{E_z(1 - \nu_{r\phi})}{1 - \nu_{r\phi} - 2\nu_{rz}^2 \frac{E_r}{E_z}} \quad (6.168)$$

Ustrezna Navier-Laméjeva enačba se za obravnavani primer glasi

$$u'' + \frac{u'}{r} - \frac{m^2 u}{r^2} = \frac{dH}{dr} + \frac{K}{r} \quad (6.169)$$

kjer so za polarni primer

$$m = \sqrt{\frac{D_6}{D_1}} \quad (6.170)$$

$$H = (\alpha_r + (\alpha_\phi + \alpha_z) \frac{D_2}{D_1}) T \quad (6.171)$$

$$K = ((D_1 - D_2) \alpha_r - (D_4 - D_2) \alpha_\phi - (D_5 - D_2) \alpha_z) \frac{T}{D_1} \quad (6.172)$$

oziroma za transverzni primer

$$m = 1 \quad (6.173)$$

$$H = (\alpha_r + \frac{D_2 \alpha_\phi + D_3 \alpha_z}{D_1}) T \quad (6.174)$$

$$K = (D_1 - D_2)(\alpha_r - \alpha_\phi) \frac{T}{D_1} \quad (6.175)$$

Splošno rešitev enačbe (6.169) lahko izrazimo v obliki

$$u(r) = r^{-m} \int_a^r H r^m dr + Q(r^m \int_a^r K r^{-m} dr - r^{-m} \int_a^r K r^m dr) + A r^{-m} + B r^m \quad (6.176)$$

kjer je

$$Q = \frac{K - H(1 - m)}{2mK} \quad (6.177)$$

medtem ko sta  $A$  in  $B$  integracijski konstanti.

### (a) Napetosti zaradi notranjega in/ali zunanega tlaka

Z upoštevanjem  $T = \text{konst.}$  dobimo napetosti v cevi

$$\sigma_r(r) = X r^{m-1} - \frac{Y}{r^{m+1}} \quad (6.178)$$

$$\sigma_\phi(r) = m \left( X r^{m-1} + \frac{Y}{r^{m+1}} \right) \quad (6.179)$$

kjer sta

$$X = \frac{p_a a^{1+m} - p_b b^{1+m}}{b^{2m} - a^{2m}} \quad (6.180)$$

$$Y = \frac{(p_a a^{1-m} - p_b b^{1-m})(ab)^{2m}}{b^{2m} - a^{2m}} \quad (6.181)$$

medtem ko sta v palici ( $a = 0$ )

$$\sigma_r(r) = -p_b \left( \frac{r}{b} \right)^{m-1} \quad (6.182)$$

$$\sigma_\phi(r) = -m p_b \left( \frac{r}{b} \right)^{m-1} \quad (6.183)$$

### (b) Termične napetosti

Z upoštevanjem  $p_a = p_b = 0$  dobimo napetosti v cevi

$$\begin{aligned} \sigma_r(r) = & r^{-m-1} (A(D_2 - mD_1) + I \int_a^r (H - K)r^m dr) + \\ & + r^{m-1} (B(D_2 + mD_1) + J \int_a^r K r^{-m} dr) \end{aligned} \quad (6.184)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\phi(r) = & -mr^{-m-1}(A(D_2 - m D_1) + I \int_a^r (H - K) r^m dr) + \\
& + m r^{m-1}(B(D_2 + m D_1) + J \int_a^r K r^{-m} dr) + \\
& + I(H - K) + J K
\end{aligned} \tag{6.185}$$

kjer so

$$I = (Q + 1)(D_2 - m D_1) \tag{6.186}$$

$$J = Q(D_2 + m D_1) \tag{6.187}$$

$$A = -\frac{I b^{-m-1} \int_a^b (H - K) r^m dr + J b^{m+1} \int_a^b K r^{-m} dr}{(m D_1 - D_2)\left(\frac{b^{m-1}}{a^{2m}} - \frac{1}{b^{m+1}}\right)} \tag{6.188}$$

$$B = -\frac{I b^{-m-1} \int_a^b (H - K) r^m dr + J b^{m-1} \int_a^b K r^{-m} dr}{(m D_1 + D_2)\left(b^{m+1} - \frac{a^{2m}}{b^{m+1}}\right)} \tag{6.189}$$

oziroma v palici ( $a = 0$ )

$$\sigma_r(r) = r^{-m-1} I \int_0^r (H - K) r^m dr + r^{m-1} (B_0 (D_2 + m D_1) + J \int_0^r K r^{-m} dr) \tag{6.190}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\phi(r) = & -m r^{-m-1} I \int_0^r (H - K) r^m dr + m r^{m-1} (B_0 (D_2 + m D_1) + \\
& + J \int_0^r K r^{-m} dr) + I(H - K) + J K
\end{aligned} \tag{6.191}$$

kjer sta  $I$  in  $J$  že podana s (6.186) in (6.187), medtem ko sta

$$B_0 = -\frac{I b^{-m-1} \int_0^b (H - K) r^m dr + J b^{m-1} \int_0^b K r^m dr}{(m D_1 + D_2) b^{m-1}} \tag{6.192}$$

in  $A_0 = 0$ .

### (c) Centrifugalne napetosti

V polarnem primeru moramo razrešiti enačbo

$$\frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\sigma_r}{dr} - (m^2 - 1) \frac{\sigma_r}{r^2} + \rho \omega^2 L = 0 \quad (6.193)$$

kjer sta v tankem valju

$$m = \sqrt{\frac{C_1}{C_6}} \quad (6.194)$$

$$L = \frac{3C_6 - C_2}{C_6} \quad (6.195)$$

oziroma v dolgem valju

$$m = \sqrt{\frac{C_1 + \frac{C_2^2}{C_6}}{C_6 - \frac{C_5^2}{C_6}}} \quad (6.196)$$

$$L = \frac{3C_6 - 3\frac{C_5^2}{C_6} - C_2 + \frac{C_2 C_5}{C_6}}{C_6 - \frac{C_5^2}{C_6}} \quad (6.197)$$

Na ta način dobimo napetosti ( $p_a = p_b = 0$ ) v posameznih primerih:

- obroč

$$\sigma_r(r) = \rho \omega^2 (3C_6 - C_2) \frac{\frac{(b^{3+m} - a^{3+m}) r^{m-1} - (b^{3-m} - a^{3-m}) \frac{(a b)^{2m}}{r^{m+1}}}{b^{2m} - a^{2m}}}{9C_6 - C_1} - r^2 \quad (6.198)$$

$$\sigma_\phi(r) = \rho \omega^2 (3C_6 - C_2) \frac{\frac{(b^{3+m} - a^{3+m}) r^{m-1} + (b^{3-m} - a^{3-m}) \frac{(a b)^{2m}}{r^{m+1}}}{b^{2m} - a^{2m}} m + \frac{r^2 (3C_2 - C_1)}{3C_6 - C_2}}{9C_6 - C_1} \quad (6.199)$$

- disk ( $a = 0$ )

$$\sigma_r(r) = \rho \omega^2 (3C_6 - C_2) r^2 \frac{\left(\frac{b}{r}\right)^{3-m} - 1}{9C_6 - C_1} \quad (6.200)$$

$$\sigma_{\phi}(r) = \rho \omega^2 (3C_6 - C_2) r^2 \frac{m \left(\frac{b}{r}\right)^{3-m} + \frac{3C_2 - C_1}{3C_6 - C_2}}{9C_6 - C_1} \quad (6.201)$$

- cev

$$\sigma_r(r) = M r^{m-1} + N r^{-m-1} + \frac{\rho \omega^2 L r^2}{9 - m^2} \quad (6.202)$$

$$\sigma_{\phi}(r) = m (M r^{m-1} - N r^{-m-1}) + \rho \omega^2 \left(1 - \frac{3L}{9 - m^2}\right) r^2 \quad (6.203)$$

kjer sta

$$M = \rho \omega^2 L \frac{b^{3+m} - a^{3+m}}{(9 - m^2)(b^{2m} - a^{2m})} \quad (6.204)$$

in

$$N = \rho \omega^2 L \frac{(b^{3-m} - a^{3-m})(ab)^{2m}}{(9 - m^2)(b^{2m} - a^{2m})} \quad (6.205)$$

- palica ( $a = 0$ )

$$\sigma_r(r) = \rho \omega^2 L r^2 \frac{\left(\frac{b}{r}\right)^{3-m} - 1}{9 - m^2} \quad (6.206)$$

$$\sigma_{\phi}(r) = \rho \omega^2 L r^2 \frac{m \left(\frac{b}{r}\right)^{3-m} - 3}{9 - m^2} + \rho \omega^2 r^2 \quad (6.207)$$

Za transverzni primer je izračun centrifugalnih napetosti povsem podoben, vendar ga ne bomo podali.

Pravtako ne bomo obravnavali krogle, saj pri njej niti transverzni primer in tudi ne rotacija nista radialna problema.

Omenimo še, da pri polnem valju oziroma polni krogli polarni problem v središču ( $r = 0$ ) ni korektno definiran, saj mora biti tam  $m = 0$ , kajti sicer ni izpolnjena ravnovesna enačba. To podmeno potrjuje tudi dejstvo, da v središču vrtenine radialna in obročna smer nista ločljivi (podoben primer poznamo na zemeljskem tečaju, kjer se sekajo vsi poldnevnik).



## 7. Airyjev postopek

Za ravninski napetostni problem tankih ravnih sten brez zgornje in spodnje obremenitve ( $\sigma_z = 0$ ) lahko uporabimo posebno skalarno funkcijo  $F(x, y)$ , ki je definirana posredno z obrazci za napetosti v obliki

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - x f_y - y f_x \quad (7.1)$$

S to Airyjevo funkcijo se da vse enačbe ravninske elastostatike prevesti na eno samo "biharmonsko" diferencialno enačbo 4.reda (z upoštevanjem termičnih obremenitev)

$$\nabla^4 F + \alpha E \nabla^2 T = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \alpha E \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (7.2)$$

oziroma če ni toplotnih izvorov v telesu (glej prenos toplote)

$$\nabla^4 F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (7.3)$$

Da to res velja lahko dokažemo npr. iz deformacijske kompatibilnosti (kar je v ravninskem primeru ena sama enačba)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (7.4)$$

in ob upoštevanju konstitutivnega (Hookovega) zakona dobimo ( $\sigma_z = 0$ )

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\sigma_x - \nu \sigma_y}{E} + \alpha T \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\sigma_y - \nu \sigma_x}{E} + \alpha T \right) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\tau_{xy}}{2\mu} \right) \quad (7.5)$$

oziroma z upoštevanjem definicij (7.1) in (1.22)

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2\nu \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \alpha E \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = -2(1 + \nu) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (7.6)$$

n po krajšanju točno izide enačba (7.2), ki pa je s tem le delno dokazana. Izpolnjene morajo biti tudi vse ostale enačbe ravninske elastostatike, npr. ravnovesni enačbi

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + f_y = 0 \quad (7.7)$$

Iz prve od njiju npr. sledi z uporabo definicije napetostne funkcije (7.2), da velja

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + x f_y + y f_x \right) + f_x = 0 \quad (7.8)$$

ali

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} - 0 - f_x + f_x = 0 \quad (7.9)$$

kar je seveda identiteta. Podobno ugotovimo tudi pri drugi od obeh ravnovesnih enačb.

Na tak način smo se prepričali, da so izpolnjene vse enačbe ravninske elastostatike, oziroma da enačba (7.2) podaja zastavljeni problem v celoti ter ga rešimo skupaj z ustreznimi robnimi pogoji.

Robne vrednosti funkcije  $F$  ter njene odvode določimo iz obremenitev po naslednjem postopku. V ravnini velja ravnovesje na obrisu telesa (npr. na premici, ki od koordinatnih osi odreže  $dx$  in  $dy$  odsek)

$$p_x = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \beta, \quad p_y = \sigma_y \cos \beta + \tau_{yx} \cos \alpha \quad (7.10)$$

vendar je zaradi

$$\gamma = \frac{\pi}{2}, \quad \cos \gamma = 0 \quad (7.11)$$

$$\cos \beta = \sin \alpha \quad (7.12)$$

Napetosti  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  in  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  nadomestimo z Airyjevo funkcijo (7.1), medtem ko izrazimo

$$\cos \alpha = \frac{dy}{ds}, \quad \sin \alpha = -\frac{dx}{ds} \quad (7.13)$$

kjer je hipotenuza elementarnega trikotnika

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (7.14)$$

Tako dobimo napetosti na poševni ravnini

$$p_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right) \quad (7.15)$$

$$p_y = -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \frac{dy}{ds} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right) \quad (7.16)$$

Z integracijo teh dveh enačb sledi

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_0^S p_x ds = Q_x, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -\int_0^S p_y ds = -Q_y \quad (7.17)$$

kjer je

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} \quad (7.18)$$

rezultanta vseh zunanjih obremenitev na robu med 0 in  $S$ . Zato je odvod v smeri normale na ravnino zunanjšega roba

$$\frac{\partial F}{\partial n} = Q_x \frac{\partial y}{\partial n} - Q_y \frac{\partial x}{\partial n} = Q_x \sin \alpha - Q_y \cos \alpha \quad (7.19)$$

Vrednost Airyjeve funkcije na robu dobimo s ponovno integracijo. Ker je

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \quad (7.20)$$

velja izraz

$$F = \int_0^S \frac{\partial F}{\partial x} dx + \int_0^S \frac{\partial F}{\partial y} dy = \int_0^S Q_x dy - \int_0^S Q_y dx \quad (7.21)$$

Z integracijo po delih ( $\int v du = uv - \int u dv$ ) sledi

$$F = (Q_x y - Q_y x)_0^S - \int_0^S y dQ_x + \int_0^S x dQ_y \quad (7.22)$$

in z vstavitvijo pomena  $Q_x$  in  $Q_y$  iz (7.17) končno dobimo

$$F = y \int_0^S p_x ds - x \int_0^S p_y ds + \int_0^S x p_y ds - \int_0^S y p_x ds \quad (7.23)$$

vrednost Airyjeve funkcije na robu. V notranjosti območja pa rešujemo biharmonsko enačbo ob upoštevanju zapisanih robnih vrednosti.

## 7.1 Reševanje s polinomi

Razmeroma enostavno je razreševanje enačbe (7.2) s polinomi dveh neodvisnih spremenljivk, npr.

$$F = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 x y + \dots \quad (7.24)$$

kjer je za vsak primer oblike in obremenitve stene treba poznati primeren (optimalen) polinom. Prav pri izbiri dobrih polinomov je težava, saj jih morda niti ne poznamo za vsak možen primer (čeprav obstajajo katalogi znanih primerov). Za primer uporabe si bomo ogledali dva zgleda.

(a) Stena, obremenjena z navorom - "čisti" upogib

Definicijsko območje pravokotne stene s konstantno debelino  $h$  naj predstavlja intervala obeh neodvisnih spremenljivk

$$0 \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq +b \quad (7.25)$$

Obremenitev: zgornji in spodnji rob - neobremenjeno ( $y = \pm b$ )  
levi in desni rob - linearna porazdelitev sil pri  $x = 0$  in  $x = a$

$$\sigma_x(y) = \sigma_0 \frac{y}{b} \quad (7.26)$$

kjer je navor

$$M_z = 2 \frac{\sigma_0 b}{2} \frac{2}{3} b h = \frac{2}{3} \sigma_0 b^2 h = \frac{2}{3} \frac{\sigma_x(y)}{y} b^3 h \quad (7.27)$$

Z uvedbo težiščnega vztrajnostnega momenta ortogonalnega prereza stene

$$I_t = \frac{h (2b)^3}{12} = \frac{2}{3} b^3 h \quad (7.28)$$

dobimo znano formulo (glej trdnost) za "čisto" upogibno napetost v zgornjem in spodnjem vlaknu stene (nosilca)

$$\sigma_x(y) = \frac{M_z y}{I_t} \quad (7.29)$$

Linearna porazdelitev napetosti po višini stene (7.26) pomeni, da je bila izbrana kubična Airyjeva napetostna funkcija, npr.

$$F = c y^3 \quad (7.30)$$

ki izpolnjuje vse zahteve danega primera. Zlahka se prepričamo, da je zadovoljena tako biharmonska enačba kot tudi robni pogoji (obremenitev stranskih robov stene). Dobljeni rezultat je povsem pravilen le za dolge nosilce brez zgornje in spodnje obremenitve (npr. lastna teža).

**(b) Stena obremenjena na zgornjem robu s konstantnim tlakom**

Definicijsko območje stene konstantne debeline naj bo interval

$$-a \leq x \leq +a, \quad -b \leq y \leq +b \quad (7.31)$$

Akcije :

- zgornji rob obremenjen s

$$p_y(x) = -p_0, \quad p_x(x) = 0 \quad (7.32)$$

- spodnji rob neobremenjen

$$p_y(x) = 0, \quad p_x(x) = 0 \quad (7.33)$$

Reakcije :

- levi rob oprt strižno s

$$p_y(-a) = p_0 a, \quad p_x(y) = 0 \quad (7.34)$$

- desni rob enako oprt s

$$p_y(+a) = p_0 a, \quad p_x(y) = 0 \quad (7.35)$$

Za Airyjevo napetostno funkcijo podaja literatura (npr. E.Prelog, Mehanika konstrukcij) polinom v obliki

$$F = \frac{p_0}{4 h b^3} \cdot \left( \frac{x^2}{2} (y^3 - 3y b^2 - 2b^3) - \frac{y^3}{10} (y^2 - 2b^2 + 5a^2) \right) \quad (7.36)$$

ki zadošča biharmonski enačbi, od robnih pogojev pa ustreza samo tako imenovanim bistvenim robnim pogojem (zgornji in spodnji v celoti, levi in desni pa samo delno). Napetosti dobimo z odvajanjem (7.36) in so

$$\sigma_x(x, y) = \frac{p_0}{4 h b^3} (3x^2 y - 2y^3 + \frac{12}{10} y b^2 - 3y a^2) \quad (7.37)$$

$$\sigma_y(x, y) = \frac{p_0}{4 h b^3} (y^3 - 3y b^2 - 2b^3) \quad (7.38)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{3p_0 x}{4h b^3} (b^2 - y^2) \quad (7.39)$$

Na zgornjem robu ( $y = b$ ) vlada pogoj

$$\sigma_y(x, +b) = -\frac{p_0}{h} \quad (7.40)$$

$$\tau_{xy}(x, +b) = 0 \quad (7.41)$$

Na spodnjem robu ( $y = -b$ ) vlada pogoj

$$\sigma_y(x, -b) = 0 \quad (7.42)$$

$$\tau_{xy}(x, -b) = 0 \quad (7.43)$$

Na desnem in levem robu ( $x = \pm a$ ) sta

$$\int_{-b}^{+b} \tau_{xy} dy = \frac{p_0 a}{h} \quad (7.44)$$

in

$$\sigma_x(\pm a, y) = 0 \quad (7.45)$$

Zahtevam (7.40) in (7.46) je z napetostmi (7.37) do (7.39) zadoščeno, o čemer se lahko prepričamo z vstavljanjem, medtem ko pogoj (7.45) ni izpolnjen, saj dobimo z uporabo (7.37) vrednost pri  $x = \pm a$

$$\sigma_x(\pm a, y) = \frac{p_0}{2h} \left( \frac{6y}{5b} - \left(\frac{y}{b}\right)^3 \right) \neq 0 \quad (7.46)$$

Pri razmeroma daljših stenah je ta prispevek zanemarljiv, pri tem pa sta še rezultanti sil in navorov nični, to je

$$\int_{-b}^{+b} \sigma_x(\pm a, y) dy = 0 \quad (7.47)$$

in

$$\int_{-b}^{+b} \sigma_x(\pm a, y) y dy = 0 \quad (7.48)$$

S pomočjo obrazcev (7.37) do (7.39) lahko določimo napetosti v katerikoli točki definicijskega območja (7.31) pravokotne stene z zgornjim konstantnim obremenilnim tlakom. Na sredini razpona pri  $x = 0$  dobimo

$$\sigma_x(0, y) = \frac{p_0}{4hb^3} y \left( \frac{12}{10} b^2 - 3a^2 - 2y^2 \right) \quad (7.49)$$

$$\sigma_y(0, y) = \frac{p_0}{4h b^3} (y^3 - 3y b^2 - 2b^3) \quad (7.50)$$

$$\tau_{xy}(0, y) = 0 \quad (7.51)$$

Največjo vrednost dosežejo vzdolžne napetosti  $\sigma_x$  pri  $y = \pm b$ , kjer je

$$\sigma_x(0, \pm b) = \pm \left( \frac{3}{4} \frac{p_0 a^2}{h b^2} + \frac{p_0}{5h} \right) \quad (7.52)$$

Medtem ko je prvi člen znan (glej trdnost) in znaša

$$\sigma_x(0, \pm b) = \frac{M_z b}{I_t} = \frac{p_0 a^2}{2} \frac{b}{\frac{h}{12}(2b)^3} = \frac{3}{4} \frac{p_0 a^2}{h b^2} \quad (7.53)$$

pa drugi prispevek moramo upoštevati, če ni  $a \gg b$ . Kadar je :

a/b	oblika stene	razmernik	napaka
4	dolga stena	12 : 0,2 = 60,00	1,6 %
2	nizka stena	3 : 0,2 = 15,00	6,6 %
1	kvadrat	3/4 : 0,2 = 3,75	26,6 %
1/2	visoka stena	1/4 : 0,2 = 1,25	80,0 %

Porazdelitev napetosti  $\sigma_x$  z višino (7.37) je kubična in ne linearna, kot predpostavlja osnovni nauk o trdnosti (hipoteza čistega upogiba).

## 7.2 Fourierova metoda reševanja

Polinomske napetostne funkcije so razmeroma zelo nerodne, saj jih je treba poznati za vsak primer posebej. Boljša je uporaba periodičnih funkcij, ko Airyjevo napetostno funkcijo predpostavimo, razcepljeno v zmnožek

$$F(x, y) = Y(y) \cdot X(x) \quad (7.54)$$

V abscisni smeri lahko izberemo trigonometrični funkciji  $\sin(x)$  ali  $\cos(x)$ , tako da je

$$F = Y \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sin(\alpha x) \\ \cos(\alpha x) \end{array} \right\} \quad (7.55)$$

kjer je treba potem po ordinati določiti  $Y$ , količnik  $\alpha$  pa dobimo iz periode (dolžina stene). Seveda bi lahko vlogi razcepnih funkcij (smeri) tudi zamenjali.

Z uporabo nastavka (7.55) za reševanje enačbe (7.2) brez termičnega deleža dobimo

$$Y'''' - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y = 0 \quad (7.56)$$

ki je homogena navadna diferencialna enačba 4. reda s konstantnimi koeficienti. Njeno rešitev poiščemo s podmeno

$$Y = e^{\beta y} \quad (7.57)$$

kar nam da "karakteristični" polinom

$$\beta^4 - 2\alpha^2 \beta^2 + \alpha^4 = 0 \quad (7.58)$$

s koreni

$$\beta_1 = \beta_2 = \alpha, \quad \beta_3 = \beta_4 = -\alpha \quad (7.59)$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe (7.56) je linearna kombinacija medsebojno neodvisnih posamičnih rešitev (zaradi dveh dvojnih korenov karakterističnega polinoma so potrebni standardni popravki). Dobimo

$$Y = \bar{A} e^{\alpha y} + \bar{B} y e^{\alpha y} + \bar{C} e^{-\alpha y} + \bar{D} y e^{-\alpha y} \quad (7.60)$$

oziroma z uporabo hiperboličnih funkcij

$$sh(y) = \frac{e^{+y} - e^{-y}}{2}, \quad ch(y) = \frac{e^{+y} + e^{-y}}{2} \quad (7.61)$$

ali obratno

$$e^{+y} = sh(y) + ch(y), \quad e^{-y} = ch(y) - sh(y) \quad (7.62)$$



dobimo (če označimo  $A = \bar{A} + \bar{C}$ ,  $B = \bar{A} - \bar{C}$ ,  $C = \bar{B} + \bar{D}$ ,  $D = \bar{B} - \bar{D}$ ) rešitev iskane funkcije

$$Y = A \operatorname{ch}(\alpha y) + B \operatorname{sh}(\alpha y) + C y \operatorname{ch}(\alpha y) + D y \operatorname{sh}(\alpha y) \quad (7.63)$$

in je Airyjeva napetostna funkcija zaradi (7.55)

$$F = (A \operatorname{ch}(\alpha y) + B \operatorname{sh}(\alpha y) + C y \operatorname{ch}(\alpha y) + D y \operatorname{sh}(\alpha y)) \begin{Bmatrix} \sin(\alpha x) \\ \cos(\alpha x) \end{Bmatrix} \quad (7.64)$$

Integracijske konstante A, B, C, D poiščemo iz vsakokratnih robnih pogojev (obremenitev). Pri tem lahko upoštevamo spet samo tako imenovane "bistvene" robove, saj imamo na razpolago samo štiri konstante. Ostale pogoje po prikazanem postopku moramo zanemariti (oziroma upoštevati na kakšen drugačen način).

Napetosti določimo z odvajanjem obrazca za Airyjevo funkcijo (7.64)

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = ((A + 2D) \operatorname{ch}(\alpha y) + (B + 2C) \operatorname{sh}(\alpha y) + y (C \operatorname{ch}(\alpha y) + D \operatorname{sh}(\alpha y))) \begin{Bmatrix} \sin(\alpha x) \\ \cos(\alpha x) \end{Bmatrix} \alpha^2 \quad (7.65)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -(A \operatorname{ch}(\alpha y) + B \operatorname{sh}(\alpha y) + y (C \operatorname{ch}(\alpha y) + D \operatorname{sh}(\alpha y))) \begin{Bmatrix} \sin(\alpha x) \\ \cos(\alpha x) \end{Bmatrix} \alpha^2 \quad (7.66)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -(A \operatorname{sh}(\alpha y) + B \operatorname{ch}(\alpha y) + C (\frac{1}{\alpha} \operatorname{ch}(\alpha y) + y \operatorname{sh}(\alpha y)) + D (\frac{1}{\alpha} \operatorname{sh}(\alpha y) + y \operatorname{ch}(\alpha y))) \begin{Bmatrix} \cos(\alpha x) \\ -\sin(\alpha x) \end{Bmatrix} \alpha^2 \quad (7.67)$$

Kot primer uporabe si pogledjmo naslednji zgled:

Pravokotna stena, obremenjena zgoraj in spodaj s sinusnim tlakom (prvi val) in konstantne debeline  $h$ , naj bo definirana z območjem intervalov

$$0 \leq x \leq 2a, \quad -b \leq y \leq +b \quad (7.68)$$

z zgornjo obremenitvijo, ki je na koncih nič in največja v sredini razpona

$$p_y(x) = -p_0 \sin(\alpha x), \quad \alpha = \frac{\pi}{2a}, \quad p_x(x) = 0 \quad (7.69)$$

ter z enako, nasproti usmerjeno spodnjo reakcijo, zvezno porazdeljeno po spodnjem robu stene.

Rešitev zastavljenega primera je izpeljana v literaturi (E.Prelog, Mehanika konstrukcij) in so dobljene napetosti

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) = & \frac{2 p_0 \sin(\alpha x)}{\operatorname{sh}(2 \alpha b) + 2 \alpha b} ((\operatorname{sh}(\alpha b) + \alpha b \cdot \operatorname{ch}(\alpha b)) \cdot \operatorname{ch}(\alpha y) - \\ & - \operatorname{sh}(\alpha b) \cdot (2 \operatorname{ch}(\alpha y) + \alpha y \cdot \operatorname{sh}(\alpha y))) \end{aligned} \quad (7.70)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, y) = & \frac{2 p_0 \sin(\alpha x)}{\operatorname{sh}(2 \alpha b) + 2 \alpha b} (-(\operatorname{sh}(\alpha b) + \alpha b \cdot \operatorname{ch}(\alpha b)) \cdot \operatorname{ch}(\alpha y) + \\ & + \alpha y \operatorname{sh}(\alpha b) \cdot \operatorname{sh}(\alpha y)) \end{aligned} \quad (7.71)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, y) = & \frac{2 p_0 \cos(\alpha x)}{\operatorname{sh}(2 \alpha b) + 2 \alpha b} (-(\operatorname{sh}(\alpha b) + \alpha b \cdot \operatorname{ch}(\alpha b)) \cdot \operatorname{sh}(\alpha y) + \\ & + \operatorname{sh}(\alpha b) \cdot (\operatorname{sh}(\alpha y) + \alpha y \cdot \operatorname{ch}(\alpha y))) \end{aligned} \quad (7.72)$$

S podatki ( $a = 2b$ ) dobimo v točki  $x = a$  in  $y = 0$  (težišče stene) napetosti

$$\sigma_x(a, 0) = -0,39 p_0, \quad \sigma_y(a, 0) = -0,53 p_0, \quad \tau_{xy}(a, 0) = 0 \quad (7.73)$$

Za obremenitve s poljubno porazdelitvijo je potrebna kompletna Fourierova analiza, s katero razstavimo tako obremenitev kot tudi iskane napetosti v ustrezno vrsto.

### 7.3 Reševanje s Fourierovo vrsto

Poljubno (periodično) obremenitev lahko razvijemo v Fourierovo vrsto ( $L =$  dolžina intervala oziroma perioda)

$$p(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=0}^m (a_n \cos(\frac{2n \pi x}{L}) + b_n \sin(\frac{2n \pi x}{L})) \quad (7.74)$$

kjer so koeficienti

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L p_y dx \quad (7.75)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L p_y \cos(\frac{2n \pi x}{L}) dx \quad (7.76)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L p_y \sin(\frac{2n \pi x}{L}) dx \quad (7.77)$$

Ker je obremenitev vsota posamičnih valov, lahko tudi iskano rešitev, to je Airyjevo funkcijo in porazdelitev napetosti, iščemo kot vsoto delnih rešitev. Z oznako

$$\alpha_n = \frac{2n \pi}{L} \quad (7.78)$$

dobimo iz (7.64) prirejen izraz za Airyjevo napetostno funkcijo

$$F = F_0 + \sum_{n=1}^m \frac{1}{\alpha_n^2} (A_n \operatorname{ch}(\alpha_n y) + \alpha_n y B_n \operatorname{sh}(\alpha_n y) + C_n \operatorname{sh}(\alpha_n y) + \alpha_n y D_n \operatorname{ch}(\alpha_n y)) \left\{ \begin{array}{l} \sin(\alpha_n x) \\ \cos(\alpha_n x) \end{array} \right\} \quad (7.79)$$

Manjkajoči člen  $F_0$  izberemo tako, da upošteva tudi konstantno obremenitev, npr.

$$F_0 = A_0 x^2 \quad (7.80)$$

Napetosti dobimo z odvajanjem, kot določajo enačbe (7.1). Zato so

$$\sigma_x(x, y) = \sum_{n=1}^m ((A_n + 2B_n) \operatorname{ch}(\alpha_n y) + \alpha_n y B_n \operatorname{sh}(\alpha_n y) + (C_n + 2D_n) \operatorname{sh}(\alpha_n y) + \alpha_n y D_n \operatorname{ch}(\alpha_n y)) \begin{Bmatrix} \sin(\alpha_n x) \\ \cos(\alpha_n x) \end{Bmatrix} \quad (7.81)$$

$$\sigma_y(x, y) = 2A_0 - \sum_{n=1}^m (A_n \operatorname{ch}(\alpha_n y) + \alpha_n y B_n \operatorname{sh}(\alpha_n y) + C_n \operatorname{sh}(\alpha_n y) + \alpha_n y D_n \operatorname{ch}(\alpha_n y)) \begin{Bmatrix} \sin(\alpha_n x) \\ \cos(\alpha_n x) \end{Bmatrix} \quad (7.82)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \sum_{n=1}^m ((A_n + B_n) \operatorname{sh}(\alpha_n y) + \alpha_n y B_n \operatorname{ch}(\alpha_n y) + (C_n + D_n) \operatorname{ch}(\alpha_n y) + \alpha_n y D_n \operatorname{sh}(\alpha_n y)) \begin{Bmatrix} \cos(\alpha_n x) \\ \sin(\alpha_n x) \end{Bmatrix} \quad (7.83)$$

Kot primer uporabe si oglejmo naslednji zgled:

Stena s stopničastim zgornjim in spodnjim tlakom.

Definicijsko območje naj bo kot že (7.68), obremenitve pa ( $c < a$ ,  $d < a$ ):

- zgoraj ( $y = +b$ ):

$$\begin{aligned} p &= 0 & (0 < x < a - c, a + c < x < 2a) \\ p &= p_z & (a - c < x < a + c) \end{aligned} \quad (7.84)$$

- spodaj ( $y = -b$ ):

$$\begin{aligned} p &= p_s & (0 < x < d, 2a - d < x < 2a) \\ p &= 0 & (d < x < 2a - d) \end{aligned} \quad (7.85)$$

Fourierova vrsta zgornje obremenitve (simetrična funkcija) je

$$p_y^z = \frac{1}{2} a_0^z + \sum_{n=1}^m a_n^z \cos(\alpha_n x) \quad (7.86)$$

in spodnje obremenitve (pravtako simetrična funkcija)

$$p_y^s = \frac{1}{2} a_0^s + \sum_{n=1}^m a_n^s \cos(\alpha_n x) \quad (7.87)$$

in so dobljeni koeficienti (s podatki  $d = c/4$ ,  $p_s = 4p_z$ )

$$a_0^z = a_0^s = \frac{2 p_z c}{a} \quad (7.88)$$

$$a_n^z = \frac{2 p_z}{n \pi} \cdot (-1)^n \sin\left(\frac{n \pi c}{a}\right) \quad (7.89)$$

$$a_n^s = \frac{8 p_z}{n \pi} \cdot \sin\left(\frac{n \pi c}{4a}\right) \quad (7.90)$$

Zaradi simetričnosti obremenitve, tudi pri Airyjevi funkciji upoštevamo samo drugo varianto (cos pri  $F$ ,  $\sigma_x$  in  $\sigma_y$  oziroma sin pri  $\tau_{xy}$ ) enačb (7.79) do (7.83). Ustrezne integracijske konstante, dobljene iz danih robnih pogojev obremenitev, pa so

$$A_0 = \frac{a_0^z}{2h} = \frac{a_0^s}{2h} \quad (7.91)$$

$$A_n = -\frac{a_0^z + a_0^s}{h} \frac{sh(\alpha_n b) + \alpha_n b \cdot ch(\alpha_n b)}{sh(2 \alpha_n b) + 2 \alpha_n b} \quad (7.92)$$

$$B_n = \frac{a_0^z + a_0^s}{h} \frac{sh(\alpha_n b)}{sh(2 \alpha_n b) + 2 \alpha_n b} \quad (7.93)$$

$$C_n = -\frac{a_0^z - a_0^s}{h} \frac{ch(\alpha_n b) + \alpha_n b \cdot sh(\alpha_n b)}{sh(2 \alpha_n b) - 2 \alpha_n b} \quad (7.94)$$

$$D_n = \frac{a_0^z - a_0^s}{h} \frac{ch(\alpha_n b)}{sh(2 \alpha_n b) + 2 \alpha_n b} \quad (7.95)$$

S temi vrednostmi dobimo napetosti v katerikoli točki obravnavane stene. V literaturi (E.Prelog, Mehanika konstrukcij) so za izbrane podatke ( $c = a/4$ ,  $d = a/16$ ) izračunane napetosti  $\sigma_y$  pri  $y = b/4$ :

$$\begin{aligned} \sigma_y = \frac{p_z}{4h} & - \frac{2 p_z}{\pi h} \cdot (0,439 \cos(\frac{\pi x}{a}) + 0,373 \cos(\frac{2 \pi x}{a}) - \\ & - 0,097 \cos(\frac{3 \pi x}{a}) + 0,0012 \cos(\frac{4 \pi x}{a}) + \\ & + 0,1198 \cos(\frac{5 \pi x}{a}) + 0,0735 \cos(\frac{6 \pi x}{a}) + \dots) \end{aligned} \quad (7.96)$$

in ob prekinitvi vrste z  $n = 6$  dobimo v točki  $x = 0$  rezultat

$$\sigma_y = 0,168 \frac{p_z}{h} \quad (7.97)$$

Na opisani način lahko računamo predvsem pravokotne stene, medtem ko pri krožnih oblikah sten uporabimo polarne koordinate.

## 7.4 Airyjejev postopek v polarnih koordinatah

Če hočemo biharmonični operator izraziti v polarnih koordinatah, najprej zapišimo Laplacov operator

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (7.98)$$

in ga še dvakrat odvajajmo

$$\begin{aligned} \nabla^4 = \nabla^2(\nabla^2) & = \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4}{\partial r^2 \partial \phi^2} - \\ & - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3}{\partial r \partial \phi^2} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4}{\partial \phi^4} \end{aligned} \quad (7.99)$$

Zvezo med Airyjevo funkcijo in polarnimi napetostmi dobimo iz relacij pri  $\phi = 0$

$$\sigma_r = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_{\phi=0} \quad (7.100)$$

$$\sigma_\phi = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{\phi=0} \quad (7.101)$$

$$\tau_{r\phi} = -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_{\phi=0} \quad (7.102)$$

Zaradi

$$x = r \cdot \cos\phi, \quad y = r \cdot \sin\phi, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \phi = \operatorname{atg} \frac{y}{x} \quad (7.103)$$

oziroma

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\phi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\phi, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\sin\phi}{r}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos\phi}{r} \quad (7.104)$$

dobimo

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial r} \sin\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \cos\phi\right) \left(\frac{\partial F}{\partial r} \sin\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \phi} \cos\phi\right) \quad (7.105)$$

in izračunano

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \sin^2\phi + \frac{1}{r} \sin\phi \cos\phi \frac{\partial^2 F}{\partial \phi \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \phi} \sin\phi \cos\phi + \\ &+ \frac{1}{r} \sin\phi \cos\phi \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \phi} + \frac{1}{r} \cos^2\phi \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \cos^2\phi - \\ &- \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \phi} \cos\phi \sin\phi \end{aligned} \quad (7.106)$$

oziroma pri  $\phi = 0$

$$\sigma_r = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{\phi=0} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \quad (7.107)$$

Podobno dobimo tudi še

$$\sigma_\phi = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{\phi=0} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \quad (7.108)$$

$$\tau_{r\phi} = -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_{\phi=0} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \phi} \quad (7.109)$$

Kot primer uporabe si oglejmo obroč konstantne debeline, obremenjen s poljubnimi silami, posebej pa zgled natezne pločevine z okroglo luknjo.

Radialno-azimutalno odvisen primer enačbe (7.2), kjer sta operatorja v polarnih koordinatah (7.98) in (7.99), poiščemo s separacijo

$$F(r, \phi) = P(r) \cdot Q(\phi) \quad (7.110)$$

kjer lahko izberemo eno od ločenih funkcij, npr

$$Q(\phi) = \left\{ \begin{array}{l} \sin(n \phi) \\ \cos(n \phi) \end{array} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (7.111)$$

Tako dobimo navadno diferencialno enačbo 4. reda Eulerjevega tipa

$$P'''' + \frac{2}{r} P'''' - \frac{1 + 2n^2}{r^2} P'' + \frac{1 + 2n^2}{r^3} P' + \frac{n^2(n^2 - 4)}{r^4} P = 0 \quad (7.112)$$

Substitucija predpostavljene standardne rešitve  $P = r^\alpha$  daje karakteristični polinom

$$\alpha^4 - 4\alpha^3 + 2\alpha^2(2 - n^2) + 4\alpha n^2 + n^2(n^2 - 4) = 0 \quad (7.113)$$

katerega koreni so

$$\alpha_1 = +n, \quad \alpha_2 = -n, \quad \alpha_3 = 2 + n, \quad \alpha_4 = 2 - n \quad (7.114)$$

V splošnem so rešitve enojne, le pri  $n = 0$  sta dve dvojni, za  $n = 1$  pa dve enojni in ena dvojna rešitev. Iskana Airyjeva funkcija je torej

$$F = F_0 + F_1 + \sum_{n=2}^{\infty} F_n \quad (7.115)$$

kjer so

$$F_0 = (A_0 + B_0 \ln(r) + C_0 r^2 + D_0 r^2 \ln(r)) \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right\} \quad (7.116)$$

$$F_1 = \left( \frac{A_1}{r} + B_1 r + C_1 r \cdot \ln(r) + D_1 r^3 \right) \left\{ \begin{array}{l} \sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{array} \right\} \quad (7.117)$$

in za  $n > 1$

$$F_n = \left( \frac{A_n}{r^n} + B_n r^n + \frac{C_n}{r^{n-2}} + D_n r^{n+2} \ln(r) \right) \left\{ \begin{array}{l} \sin(n \phi) \\ \cos(n \phi) \end{array} \right\} \quad (7.118)$$

Ustrezno dobimo napetosti z uporabo obrazcev (7.107) do (7.109)



$$\sigma_r^0 = A_0 + \frac{B_0}{r^2} + C_0 (\ln(r) + 1) \quad (7.119)$$

$$\sigma_\phi^0 = A_0 - \frac{B_0}{r^2} + C_0 (\ln(r) + 3) \quad (7.120)$$

$$\tau_r^0 = 0 \quad (7.121)$$

$$\sigma_r^1 = \left(-\frac{2B_1}{r^3} + 2C_1 r + \frac{D_1}{r}\right) \begin{Bmatrix} \sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{Bmatrix} \quad (7.122)$$

$$\sigma_\phi^1 = \left(+\frac{2B_1}{r^3} + 6C_1 r + \frac{D_1}{r}\right) \begin{Bmatrix} \sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{Bmatrix} \quad (7.123)$$

$$\tau_r^1 = \left(-\frac{2B_1}{r^3} + 2C_1 r + \frac{D_1}{r}\right) \begin{Bmatrix} -\cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{Bmatrix} \quad (7.124)$$

in za  $n > 1$

$$\begin{aligned} \sigma_r^n &= (-n(n+1)\frac{A_n}{r^{n+2}} - n(n-1)B_n r^{n-2} - (n-1)(n+2)\frac{C_n}{r^n} - \\ &- (n-2)(n+1)D_n r^n) \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (7.125)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\phi^n &= (n(n+1)\frac{A_n}{r^{n+2}} + n(n-1)B_n r^{n-2} + (n-2)(n-1)\frac{C_n}{r^n} + \\ &+ (n+1)(n+2)D_n r^n) \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (7.126)$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\phi}^n &= (-n(n+1)\frac{A_n}{r^{n+2}} + n(n-1)B_n r^{n-2} - n(n-1)\frac{C_n}{r^n} + \\ &+ n(n+1)D_n r^n) \cdot \begin{Bmatrix} \sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (7.127)$$

## Pločevina z luknjo:

Dolga stena v obliki traku, širine  $2b$  in konstantne debeline, naj bo obremenjena z natezno obremenitvijo  $\sigma_x^0$ . Na sredini je v pločevini okrogla odprtina s polmerom  $a$ . Zaradi zmanjšanja prereza je pričakovati povečanje napetosti, vendar se izkaže, da velja

$$\bar{\sigma}_x(x=0, y) = \frac{\sigma_x^0 b}{b-a} \quad (7.128)$$

samo v poprečju. Dejansko se pojavijo precej večje napetosti na robu odprtine. Napetostno stanje precej dobro opišeta primera  $n=0$  in  $n=2$  prej obravnavanih obročev. Rešitev je podana v literaturi (E. Prelog, Elasto in plastomehanika)  $a \leq r \leq b$  in je ob pogoju  $b \gg a$  (torej majhna luknja v veliki steni) podana kot

$$\sigma_r(r) = \frac{\sigma_x^0}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} + \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cdot \cos(2\phi) \right) \quad (7.129)$$

$$\sigma_\phi(r) = \frac{\sigma_x^0}{2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} - \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cdot \cos(2\phi) \right) \quad (7.130)$$

$$\tau_{r\phi}(r) = -\frac{\sigma_x^0}{2} \left( 1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \cdot \sin(2\phi) \quad (7.131)$$

Na robu odprtine ( $r=a$ ) dobimo vrednosti cirkularne (obročne) napetosti

$$\sigma_\phi = \sigma_x^0 \cdot (1 - 2 \cos(2\phi)) \quad (7.132)$$

medtem ko sta tam  $\sigma_r = \tau_{r\phi} = 0$ . Največje vrednosti so pri  $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$  in sicer

$$\sigma_{\phi max} = 3 \sigma_x^0 \quad (7.133)$$

V ostalih točkah najšibkejšega prereza je obročna napetost

$$\sigma_\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma_x^0 \cdot \left( 1 + \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^4}{2r^4} \right) \quad (7.134)$$

kar daje pri:

$$r = 2 a \cdots \sigma_\phi = 1.220 \sigma_x^0 \quad (7.135)$$

$$r = 4 a \cdots \sigma_\phi = 1.035 \sigma_x^0 \quad (7.136)$$

$$r \rightarrow \infty \cdots \sigma_\phi = 1.000 \sigma_x^0 \quad (7.137)$$

medtem ko je poprečna vrednost napetosti v prerezu že podana z izrazom (7.128).

**Poljubna obremenitev obroča konstantne debeline:**

S Fourierovo razvrstitvijo obremenitve, kjer upoštevamo tako normalne kot tudi tangencialne sile na robovih, določene z vrstami, dobimo rešitve podobno kot v poglavju 7.3, vendar se s tem podrobneje ne bomo ukvarjali. Omeniti velja le, da pri obremenitvah moramo paziti na statično ravnovesje sil ( $n = 1$  pri normalnih obremenitvah) oziroma ravnovesje navorov ( $n = 0$  pri tangencialnih bremenih), kjer morata biti ustrezna valova na zunanem in na notranjem robu obroča vzajemno uravnovešena. V ostalih primerih je ta pogoj samodejno izpolnjen!

## 7.5 Postopek končnih razlik

Biharmonsko enačbo (7.2) lahko alternativno rešujemo tudi numerično. V ta namen izdelamo modele odvodov s pomočjo interpolacijskih polinomov (npr. s Stirlingovo centralno diferenčno formulo - glej numerične metode). Prvi odvod v smeri  $x$  znaša

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{ij} = \frac{F(x_{i+1}, y_j) - F(x_{i-1}, y_j)}{2h} \quad (7.138)$$

kjer je korak ekvidistantnega razdeljevanja definicijskega območja

$$h = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} \quad (7.139)$$

Drugi odvod v smeri  $x$  dobimo po obrazcu

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{ij} = \frac{F(x_{i+1}, y_j) - 2F(x_i, y_j) + F(x_{i-1}, y_j)}{h^2} \quad (7.140)$$

Podobno velja za smer  $y$ , kjer je prvi odvod

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{ij} = \frac{F(x_i, y_{j+1}) - F(x_i, y_j)}{2k} \quad (7.141)$$

in je korak ekvidistantne delitve mreže definicijskega območja

$$k = y_{j+1} - y_j = y_j - y_{j-1} \quad (7.142)$$

ter znaša drugi odvod

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{ij} = \frac{F(x_i, y_{j+1}) - 2F(x_i, y_j) + F(x_i, y_{j-1}))}{k^2} \quad (7.143)$$

Ustrezno dobimo tudi mešani odvod drugega reda

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_{ij} = \frac{F(x_{i+1}, y_{j+1}) - F(x_{i+1}, y_{j-1}) + F(x_{i-1}, y_{j-1}) - F(x_{i-1}, y_{j+1}))}{4hk} \quad (7.144)$$

Četrtni odvodi pa so podani z izrazi

$$\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}\right)_{ij} = \frac{\sum F(x_{i\pm 2}, y_j) - 4 \sum F(x_{i\pm 1}, y_j) + 6 F(x_i, y_j)}{h^4} \quad (7.145)$$

$$\left(\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\right)_{ij} = \frac{\sum F(x_i, y_{j\pm 2}) - 4 \sum F(x_i, y_{j\pm 1}) + 6 F(x_i, y_j)}{k^4} \quad (7.146)$$

$$\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{ij} = \frac{\sum F(x_{i\pm 1}, y_{j\pm 1}) - 2 \sum (F(x_{i\pm 1}, y_j) + F(x_i, y_{j\pm 1})) + 4 F(x_i, y_j)}{h^2 k^2} \quad (7.147)$$

Na tak način dobimo model biharmonične enačbe v obliki ( $h \neq k$ )

$$\begin{aligned}
& 6F(x_i, y_j) \cdot \left(1 + \frac{h^2}{k^2} \cdot \left(\frac{4}{3} + \frac{h^2}{k^2}\right)\right) - 4 \left(\sum_1^2 F(x_{i\pm 1}, y_j)\right) \cdot \left(1 + \frac{h^2}{k^2}\right) + \\
& + \left(\sum_1^2 F(x_i, y_{j\pm 1})\right) \cdot \frac{h^2}{k^2} \cdot \left(1 + \frac{h^2}{k^2}\right) + 2 \left(\sum_1^4 F(x_{i\pm 1}, y_{j\pm 1})\right) \cdot \frac{h^2}{k^2} + \\
& + \sum_1^2 F(x_{i\pm 2}, y_j) + \left(\sum_1^2 F(x_i, y_{j\pm 2})\right) \cdot \frac{h^4}{k^4} = 0 \tag{7.148}
\end{aligned}$$

ter v primeru  $h = k$  še enostavneje

$$\begin{aligned}
20 F(x_i, y_j) - 8 \sum_1^2 (F(x_{i\pm 1}, y_j) + F(x_i, y_{j\pm 1})) + 2 \sum_1^4 F(x_{i\pm 1}, y_{j\pm 1}) + \\
+ \sum_1^2 (F(x_{i\pm 2}, y_j) + F(x_i, y_{j\pm 2})) = 0 \tag{7.149}
\end{aligned}$$

Modeli porazdelitve napetosti v posameznih točkah pa so

$$\sigma_x(x_i, y_j) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{ij} = \frac{\sum F(x_i, y_{j\pm 1}) - 2 F(x_i, y_j)}{k^2} \tag{7.150}$$

$$\sigma_y(x_i, y_j) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{ij} = \frac{\sum F(x_{i\pm 1}, y_j) - 2 F(x_i, y_j)}{h^2} \tag{7.151}$$

$$\tau_{xy}(x_i, y_j) = \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - x f_y - y f_x\right)_{ij} \tag{7.152}$$

kjer je iz (7.144)

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_{ij} = \frac{F(x_{i+1}, y_{j+1}) - F(x_{i+1}, y_{j-1}) + F(x_{i-1}, y_{j-1}) - F(x_{i-1}, y_{j+1})}{4 h k}$$

Model (7.148) oziroma (7.149) uporabimo za poljubno točko znotraj stene, kolikor je oddaljenost točk od roba stene najmanj dva koraka v vsaki smeri. Točke, ki so le en korak od enega ali obeh robov, računamo s pomočjo pomožnih ekstrapoliranih točk (te so na konkavnih vogalih lahko tudi dvojne), medtem ko točke na robu (funkcijske vrednosti v njih) izračunamo iz robnih pogojev z integracijo obremenitev (7.23).

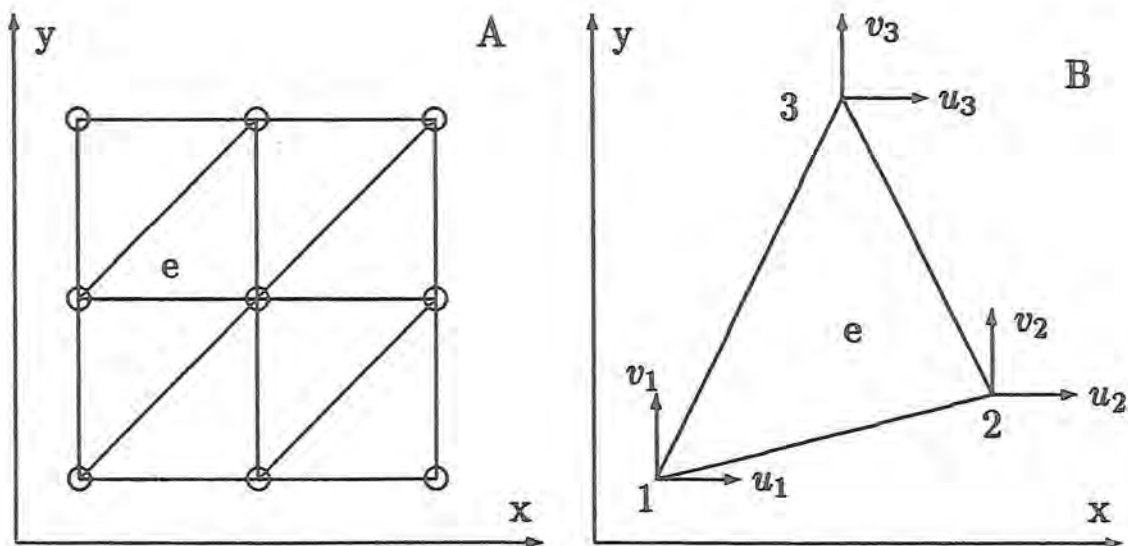
V celoti dobimo npr. pri pravokotnih stenah, ki so definirane z mrežo  $(x_i, y_j)$ ,  $i = 0, 1, 2$  do  $M$ ,  $j = 0, 1, 2$  do  $N$  predvidoma  $(M - 2)(N - 2)$  neznanih Airyjevih funkcijskih vrednosti  $F$ , vendar je to število zaradi simetrij oblik in obremenitev sten ponavadi manjše. Ustrezna je tudi velikost izhodnega sistema algebraičnih enačb, ki jih potem razrešimo z računalnikom, da dobimo iskane vrednosti  $F$ .

Težave postopka končnih razlik nastanejo pri poševnih in oblih robovih. Znane so preureditve za obračun lokalnih podrobnosti, vendar sta se po letu 1954 (MKE) in 1974 (MRE) pojavili dve alternativni numerični metodi končnih in robnih elementov, ki imata prilagodljivo mrežo in sta tudi zato bistveno presegli danes že zastarele končne razlike za potrebe elastomehanike.

## 8. Novejše numerične metode

### 8.1 Končni elementi

Zaradi enostavnosti obravnavajmo kar ravninski primer stanja napetosti. Če telo stene razdelimo na končne elemente, npr. trikotnike (Slika 7.1A), so v njihovih vozliščih pomiki (Slika 7.1B)  $u$  in  $v$ .



Slika 8.1: Trikotni elementi

Predpostavimo linearno razporeditev pomikov

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \quad v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \quad (8.1)$$

kjer šest interpolacijskih konstant določimo iz vozliščnih vrednosti

$$u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1, \quad v_1 = \alpha_4 + \alpha_5 x_1 + \alpha_6 y_1 \quad (8.2)$$

$$u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2, \quad v_2 = \alpha_4 + \alpha_5 x_2 + \alpha_6 y_2 \quad (8.3)$$

$$u_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3, \quad v_3 = \alpha_4 + \alpha_5 x_3 + \alpha_6 y_3 \quad (8.4)$$

Teh šest enačb nam daje vrednosti iskanih konstant

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 a_i u_i, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 b_i u_i, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 c_i u_i \quad (8.5)$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 a_i v_i, \quad \alpha_5 = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 b_i v_i, \quad \alpha_6 = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 c_i v_i \quad (8.6)$$

kjer so

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad b_1 = y_2 - y_3, \quad c_1 = x_3 - x_2 \quad (8.7)$$

$$a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \quad b_2 = y_3 - y_1, \quad c_2 = x_1 - x_3 \quad (8.8)$$

$$a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad b_3 = y_1 - y_2, \quad c_3 = x_2 - x_1 \quad (8.9)$$

in površina trikotnika

$$A = \frac{1}{2}(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)) \quad (8.10)$$

Z izraženimi konstantami določimo pomike v elementu s pomočjo vozliščnih vrednosti

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \{q\} = [N] \{q\} \quad (8.11)$$

kjer so

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (8.12)$$

$$\{q\}^T = [u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3] \quad (8.13)$$

Ker so deformacije



$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha_6, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_3 + \alpha_5 \quad (8.14)$$

dobimo matrični izraz

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}\} = [B] \{q\} \quad (8.15)$$

kjer pomeni

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

Napetosti so zaradi konstitutivnega zakona

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\} = [C] \{\varepsilon\} = [C][B] \{q\} \quad (8.17)$$

kjer je matrika  $[C]$  znana (Hookov zakon v elastičnosti, v plastičnosti pa je konstitutivnost treba obravnavati inkrementalno).

Notranja energija je podana z izrazom

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV = \frac{1}{2} \int \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \\ &= \frac{1}{2} \int \{\varepsilon\}^T [c] \{\varepsilon\} dV \end{aligned} \quad (8.18)$$

medtem ko je delo sil

$$W = \int \{u\}^T \{f\} dS \quad (8.19)$$

Za ravnovesje mora biti variacija notranje energije in zunanjih sil enaka

$$\delta U = \delta W \quad (8.20)$$

tako da velja

$$\delta \left( \int \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dV - 2 \int \{u\}^T \{f\} dS \right) = 0 \quad (8.21)$$

oziroma

$$\{\delta q\}^T \left( \int [B]^T [C] [B] \{q\} dV - \int [N]^T \{f\} dS \right) = 0 \quad (8.22)$$

Ker pa je variacija vozliščnih pomikov poljubna, mora biti oklepaj nič

$$\int [B]^T [C] [B] \{q\} dV = \int [N]^T \{f\} dS \quad (8.23)$$

ali

$$[K] \{q\} = \{R\} \quad (8.24)$$

kjer je togost

$$[K] = \int [B]^T [C] [B] dV \quad (8.25)$$

in sila

$$\{R\} = \int [N]^T \{f\} dS \quad (8.26)$$

Zapisane integrale zlahka določimo za vsak linearni končni element posebej

$$[K_e] = [B]^T [C] [B] \int dV = [B]^T [C] [B] h A \quad (8.27)$$

kjer je  $h$  debelina elementa (stene). Za celotno strukturo elementov pa dobimo s seštevanjem prispevkov (upoštevajoč porazdelitvene odnose):

$$\left( \sum_{e=1}^n [K_e] \right) \{U\} = \sum_{e=1}^n R_e \quad \text{ozioroma} \quad \underline{K} \{U\} = \{R\} \quad (8.28)$$

kar razrešimo z računalnikom (sistem linearnih algebraičnih enačb). Ker je sistemska matrika pasovna, lahko uporabimo iterativne postopke. Kadar je telo vrtenina (ki je osnosimetrično obremenjena), uporabimo

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 z, \quad w = \alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 z \quad (8.29)$$

Deformacije so tukaj

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\phi = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (8.30)$$

tako da je matrični izraz

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\} \quad (8.31)$$

in pomeni

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1, & 0, & b_2, & 0, & b_3, & 0 \\ d_1, & 0, & d_2, & 0, & d_3, & 0 \\ 0, & c_1, & 0, & c_2, & 0, & c_3 \\ c_1, & b_1, & c_2, & b_2, & c_3, & b_3 \end{bmatrix} \quad (8.32)$$

povsem analogen matričnemu izrazu (8.16), dodatni člen pa je

$$d_i = b_i + (a_i + c_i z)/r$$

V vrtenini so štiri napetosti (obročna komponenta je pravokotna na  $rz$  ravnino)

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{rz}\} = [C]\{\varepsilon\} = [C][B]\{q\} \quad (8.33)$$

Pri integraciji togosti in vozliščnih sil moramo upoštevati  $dV = 2\pi r dr dz$ ,  $dS = 2\pi r ds$ , tako da ponavadi uporabljamo numerično integracijo tudi v linearnih končnih elementih (trikotnikih), razen če se zadovoljimo s težiščnimi vrednostmi  $\bar{r} = (r_1 + r_2 + r_3)/3$ . Opisani postopek končnih elementov seveda lahko razširimo tudi v 3D (s tetraedri). Uporabljamo še elemente višjega reda (četverokotniki oziroma heksaedri) z ustreznim številom vozlišč v vogalih in morda še na robovih elementov.

## 8.2 Robni elementi

Postopek robnih elementov v elastomehaniki sloni na zapisu ravnovesne enačbe in ustreznih robnih pogojev v obliki integralske enačbe

$$\int \left( \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_j} + f_k \right) u_k^* dV = \int (p_k - \bar{p}_k) u_k^* dS_2 + \int (\bar{u}_k - u_k) p_k^* dS_1 \quad (8.34)$$

kjer sta  $u_k^*$  in  $p_k^* = n_j \sigma_{jk}^*$  utežni jedri za pomike in sile.

Gornjo enačbo integriramo po delih in dobimo

$$\begin{aligned} - \int \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^* dV + \int f_k u_k^* dV = & - \int \bar{p}_k u_k^* dS_2 - \int p_k u_k^* dS_1 + \\ & + \int (\bar{u}_k - u_k) p_k^* dS_1 \end{aligned} \quad (8.35)$$

S ponovno integracijo prvega člena v tej enačbi in zaradi konstitutivnega zakona elastičnosti (v plastičnosti bi morali računati inkrementalno) dobimo

$$\int \sigma_{jk,j}^* u_k dV + \int f_k u_k^* dV = - \int \bar{p}_k u_k^* dS_2 - \int p_k u_k^* dS_1 + \\ + \int \bar{u}_k p_k^* dS_1 + \int u_k p_k^* dS_2 \quad (8.36)$$

Fundamentalno rešitev poiščemo iz Laplacove enačbe

$$\sigma_{jk,j}^* + \Delta_l^i = 0 \quad (8.37)$$

kjer je  $\Delta_l^i$  Diracova impulzna funkcija, ki predstavlja enotsko obremenitev v točki  $i$  v izbrani smeri  $x_l$ . Tako dobimo za vsako  $l$  smer enačbo

$$u_l^i + \int \bar{u}_k p_k^* dS_1 + \int u_k p_k^* dS_2 = \int f_k u_k^* dV + \int p_k u_k^* dS_1 + \\ + \int \bar{p}_k u_k^* dS_2 \quad (8.38)$$

kjer je  $u_l^i$  pomik točke  $i$  v smeri  $l$ , medtem ko sta  $u_k^*$  in  $p_k^*$  pomik oziroma sila zaradi obremenitve v točki  $i$ , ki deluje v  $l$  smeri. Če upoštevamo enotsko obremenitev vseh treh smereh, lahko gornjo enačbo zapišemo

$$u_l^i + \int \bar{u}_k p_{lk}^* dS_1 + \int u_k p_{lk}^* dS_2 = \int f_k u_{lk}^* dV + \int p_k u_{lk}^* dS_1 + \\ + \int \bar{p}_k u_{lk}^* dS_2 \quad (8.39)$$

kjer sta  $u_{lk}^*$  in  $p_{lk}^*$  pomik oziroma sila v smeri  $k$ , zaradi enotske obremenitve, ki deluje v  $l$  smeri.

V 3D primeru poznamo Kelvinovo rešitev, ki velja za pomike zaradi delovanja enotske diskretne sile v neskončnem elastičnem prostoru

$$u_{lk}^* = \frac{1}{16 \pi \mu (1 - \nu)} \left( \frac{3 - 4\nu}{r} \Delta_{lk} + \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) \quad (8.40)$$

kjer so odvodi  $\partial r / \partial x_k = r_k / r$  itd.,  $r_k$  pa pomeni projekcijo vektorja  $\vec{r}$  na izbrano smer.

Ustrezna Kelvinova rešitev za sile je

$$p_{ik}^* = \frac{-1}{8\pi(1-\nu^2)r^2} \left( \frac{\partial r}{\partial n} ((1-2\nu) \Delta_{ik} + 3 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_k}) + (1-2\nu) \left( \frac{\partial r}{\partial x_i} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_i \right) \right) \quad (8.41)$$

pri čemer je  $n$  zunanja normala s površine telesa.

Prejšno integralno enačbo lahko zapišemo za robne točke kot

$$c_i u_i + \int \bar{u}_k p_{ik}^* dS_1 + \int u_k p_{ik}^* dS_2 = \int f_k u_{ik}^* dV + \int p_k u_{ik}^* dS_1 + \int \bar{p}_k u_{ik}^* dS_2 \quad (8.42)$$

kjer je količnik  $c_i = \frac{1}{2}$  v točkah na gladkem robu (sicer pa se izrazi z razmerjem notranjega in polnega kota površine, če je ta konveksna ali konkavna). Z uporabo vektorskega zapisa

$$\underline{u} = \{u_1, u_2, u_3\}, \quad \underline{p} = \{p_1, p_2, p_3\}, \quad \underline{f} = \{f_1, f_2, f_3\} \quad (8.43)$$

oziroma matrik

$$\underline{U}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix}, \quad \underline{P}^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* \\ p_{13}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{bmatrix} \quad (8.44)$$

lahko gornjo integralno enačbo podamo v obliki

$$c_i u_i + \int \underline{P}^* \underline{u} dS = \int \underline{U}^* \underline{p} dS + \int \underline{U}^* \underline{f} dV \quad (8.45)$$

Z razdelitvijo površine na robne elemente in notranjosti na celice porazdelitve pomikov in sil zapišemo z interpolacijskimi funkcijami

$$\underline{u} = \underline{\Phi}^T \underline{u}^n = \{\Phi^T, \Phi^T, \Phi^T\} \underline{u}^n \quad (8.46)$$

$$\underline{p} = \underline{\Psi}^T \underline{p}^n = \{\Psi^T, \Psi^T, \Psi^T\} \underline{p}^n \quad (8.47)$$

tako da dobimo po prispevkih posameznih elementov (1 do N) in celic (1 do M)

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \left( \int \underline{P}^* \underline{\Phi}^T dS_j \right) \underline{u}^n = \sum_{j=1}^N \left( \int \underline{U}^* \underline{\Psi}^T dS_j \right) \underline{p}^n + \sum_{j=1}^M \int \underline{U}^* \underline{f} dV_j \quad (8.48)$$

Kadar imamo opraviti z ravninskimi telesi, je ustrezna diskretizacija robnih elementov na obrisu, integracijske celice pa so v prerezu.

Za razliko od končnih elementov, kjer je sistemska matrika pasovna, je pri robnih elementih polna, število vozlišč pa je bistveno manjše, kar odtehta omenjeno polnost matrike.

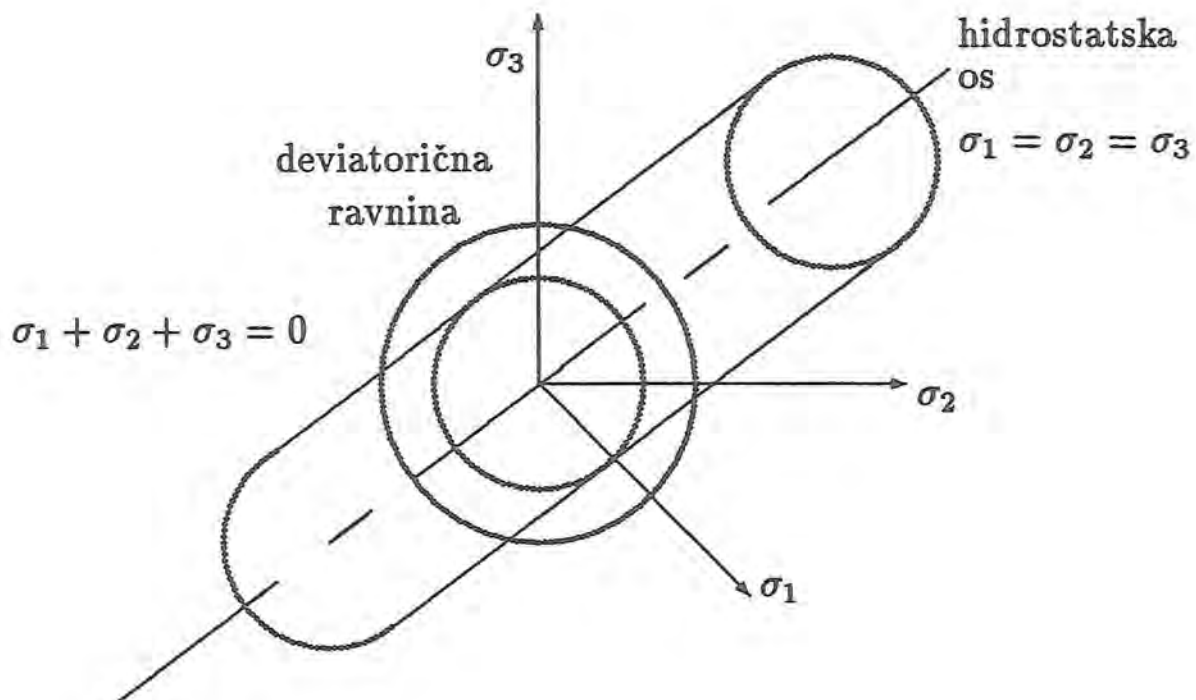
V ravninskih in vrteninskih primerih dobimo Kelvinovi rešitvi z integracijo po prečni oziroma obročni smeri, vendar rezultatov tukaj ne podajamo.

Potrebni interpolacijski funkciji robnih elementov tukaj pravtako ne bi pisali, saj so podane v učbeniku o numeričnih metodah.

## 9. Plastomehanika

### 9.1 Kriterij tečenja

Če se obremenitev nekega telesa povečuje, bo nekje v njem ob določeni kombinaciji napetosti prišlo do plastifikacije. Pri izbiri kriterija tečenja bomo zanemarili hitrost deformiranja, termične vplive, Bauschingerjev efekt ipd.

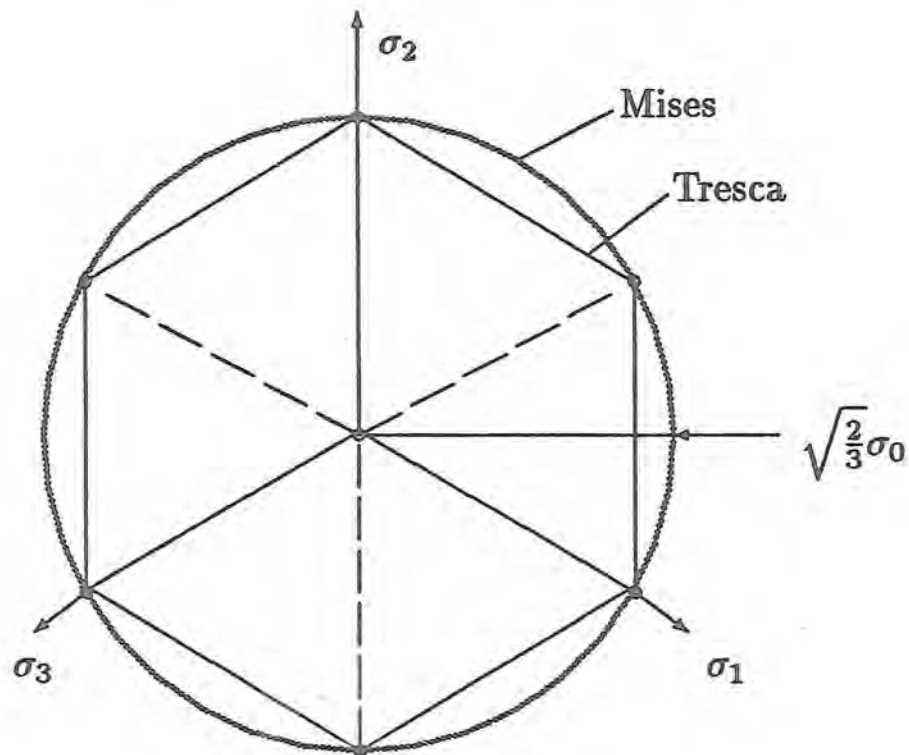


Slika 9.1: Misesov valj

Pravtako bomo predpostavili izotropijo materiala. Če problem obravnavamo v napetostnem prostoru, kjer so na ortogonalnih oseh glavne napetosti  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  (Slika 9.1), lahko narišemo pod oktaedričnimi smermi ( $n_1 = n_2 = n_3 = 1/\sqrt{3}$ ) Misesov valj, katerega polmer znaša

$$\sqrt{2} J_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sigma_0 \quad (9.1)$$

Oktaedrična strižna napetost mora ležati znotraj kroga (po Misesu), medtem ko povprečna napetost nič ne vpliva na pričetek plastifikacije. Nekoliko bolj omejevalen je Trescov kriterij, ki zahteva, da leži oktaedrična strižna napetost znotraj kroga včrtanega šestkotnika (Slika 9.2).



Slika 9.2: Deviatorična ravnina



Z enačbo zapišemo Trescov kriterij najpreprosteje z glavnimi napetostmi

$$MAX(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) = \sigma_0 \quad (9.2)$$

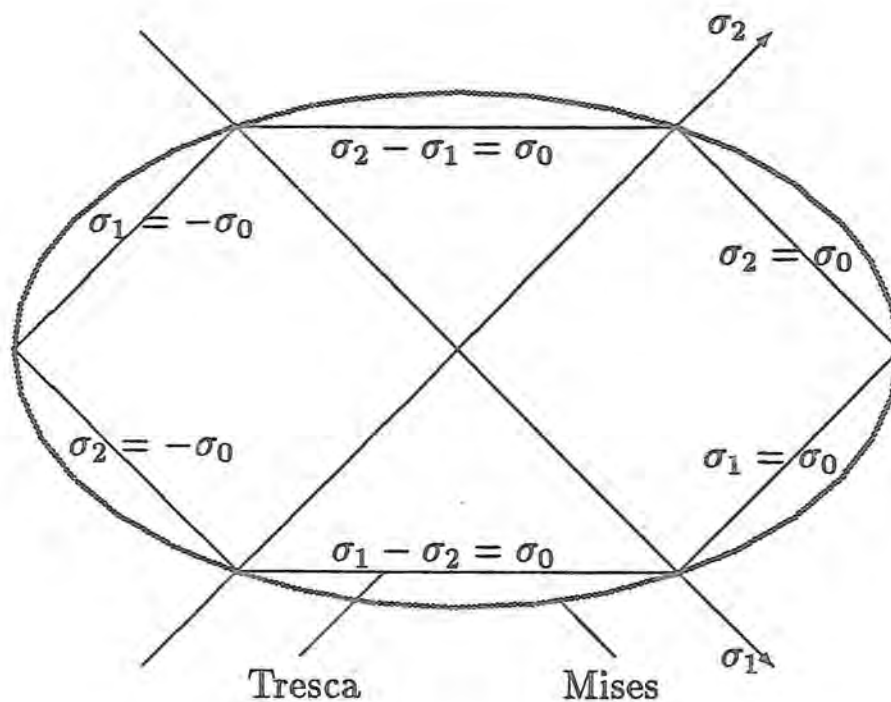
V ravninskem primeru (n.pr.  $\sigma_3 = 0$ ) dobimo po Trescovem kriteriju

$$MAX(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2|) = \sigma_0 \quad (9.3)$$

oziroma s koordinatnimi napetostmi

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sigma_0^2, \quad \sigma_x \sigma_y \leq \tau_{xy}^2 \quad (9.4)$$

$$\tau_{xy}^2 - \sigma_x \sigma_y \pm \sigma_0(\sigma_x + \sigma_y) = \sigma_0^2, \quad \sigma_x \sigma_y \geq \tau_{xy}^2 \quad (9.5)$$



Slika 9.3: Misesova elipsa in Tresca šesterokotnik

Misesova enačba se v prostoru glasi

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 =$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2 \sigma_0^2 \quad (9.6)$$

oziroma v ravnini ( $\sigma_3 = 0$ )

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_0^2 \quad (9.7)$$

Ravninski primer kaže Slika 9.3 (Misesov krog postane v tem primeru elipsa, znotraj katere leži elastično območje). Izkušnje kažejo, da je Misesov kriterij ustrežnejši, vendar ga je računsko težje upoštevati, medtem ko je Trescov kriterij konzervativnejši.

Za enoosno stanje napetosti dajeta oba kriterija iste vrednosti (točke na oseh), najbolj pa se razlikujeta pri čistem strigu in to za  $2/\sqrt{3} = 1,1547$ .

Poleg obeh omenjenih kriterijev obstajajo še druge oblike (npr. Mohr-Coulomb, Drucker-Prager), vendar jih ne bomo obravnavali.

Z anizotropijo snovi se oblika plastifikacijske površine spremeni, z utrjevanjem med plastifikacijo pa razširi predvsem v tlačno območje.

## 9.2 Potek plastifikacije

Med plastifikacijo (prekoračenje meje tečenja) upoštevamo ekvivalentno napetost, da lahko troosno stanje napetosti primerjamo z enoosnimi podatki.

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2} (S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 + 2(S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{zx}^2))} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} ((\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2))} \quad (9.8)$$

Podobno definiramo tudi prirastek ekvivalentne deformacije (inkrement)

$$\begin{aligned}
d\bar{\varepsilon}_p &= \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p} = \\
&= \sqrt{\frac{2}{3} ((d\varepsilon_x^p)^2 + (d\varepsilon_y^p)^2 + (d\varepsilon_z^p)^2 + 2((d\gamma_{xy}^p)^2 + (d\gamma_{yz}^p)^2 + (d\gamma_{zx}^p)^2))}
\end{aligned} \tag{9.9}$$

Če je razmerje (glej Sliko 1.1 -  $\sigma\varepsilon$  diagram )

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}_p} = E_t \tag{9.10}$$

tangentni modul, lahko zapišemo konstitutivno enačbo elasto-plastičnosti v obliki

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} (d\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} \delta_{ij} d\sigma_v) + \frac{3}{2E_t} n_{ij} n_{kl} d\sigma_{kl} \tag{9.11}$$

ozirom obratno

$$d\sigma_{ij} = 2\mu (d\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} d\varepsilon_v - \frac{3\mu}{3\mu + E_t} n_{ij} n_{kl} d\varepsilon_{kl}) \tag{9.12}$$

Če je  $E_t = 0$  (idealna plastičnost brez utrjevanja) pa velja enostavneje

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} (d\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} \delta_{ij} d\sigma_v) + d\lambda n_{ij} \tag{9.13}$$

Ker je preobrazno delo

$$dW_p = \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}_p = \frac{2}{3} \bar{\sigma}^2 d\lambda \tag{9.14}$$

dobimo

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}_p}{\bar{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\sigma}}{E_t \bar{\sigma}} \tag{9.15}$$

tako, da velja Prandtl-Reussova enačba

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} ((1+\nu) d\sigma_{ij} - 3\nu \delta_{ij} d\sigma_v) + (\sigma_{ij} - \sigma_v \delta_{ij}) d\lambda \tag{9.16}$$

ki se po komponentah glasi

$$d\varepsilon_x = \frac{1}{E}(d\sigma_x - \nu(d\sigma_y + d\sigma_z)) + \frac{2}{3}(\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)) d\lambda \quad (9.17)$$

$$d\varepsilon_y = \frac{1}{E}(d\sigma_y - \nu(d\sigma_x + d\sigma_z)) + \frac{2}{3}(\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)) d\lambda \quad (9.18)$$

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{E}(d\sigma_z - \nu(d\sigma_x + d\sigma_y)) + \frac{2}{3}(\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)) d\lambda \quad (9.19)$$

$$d\gamma_{xy} = \frac{1}{2\mu} d\tau_{xy} + \tau_{xy} d\lambda \quad (9.20)$$

$$d\gamma_{yz} = \frac{1}{2\mu} d\tau_{yz} + \tau_{yz} d\lambda \quad (9.21)$$

$$d\gamma_{zx} = \frac{1}{2\mu} d\tau_{zx} + \tau_{zx} d\lambda \quad (9.22)$$

Ker je

$$n_{ij} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{S_{ij}}{\bar{\sigma}} \quad (9.23)$$

dobimo matrično obliko konstitutivnega zakona plastičnosti

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad (9.24)$$

kjer je matrika

$$C_{ijkl} = 2\mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} - \frac{1}{\alpha \bar{\sigma}^2} S_{ij} S_{kl}) \quad (9.25)$$

in pomeni

$$\alpha = \frac{2}{3} (1 + \frac{E_t}{3\mu}) \quad (9.26)$$

V ravninskem deformacijskem stanju ( $d\varepsilon_z = 0$ ) dobimo v izpisani obliki

$$\begin{bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{bmatrix} = 2\mu \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{S_x^2}{\alpha\sigma^2}, & \frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{S_x S_y}{\alpha\sigma^2}, & -\frac{S_x S_{xy}}{\alpha\sigma^2} \\ \frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{S_x S_y}{\alpha\sigma^2}, & \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{S_y^2}{\alpha\sigma^2}, & -\frac{S_y S_{xy}}{\alpha\sigma^2} \\ -\frac{S_x S_{xy}}{\alpha\sigma^2}, & -\frac{S_y S_{xy}}{\alpha\sigma^2}, & \frac{1}{2} - \frac{S_{xy}}{\alpha\sigma^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d(2\gamma_{xy}) \end{bmatrix} \quad (9.27)$$

V ravninskem napetostnem stanju ( $d\sigma_z = 0$ ) pa velja prirejena oblika enačbe

$$\begin{bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{2\mu}{N} [Q] \begin{bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d(2\gamma_{xy}) \end{bmatrix} \quad (9.28)$$

in je matrika

$$[Q] = \begin{bmatrix} (1+\nu)\frac{S_y^2}{\sigma^2} + 2M, & -(1+\nu)\frac{S_x S_y}{\sigma^2} + 2\nu M, & -\frac{(S_x + \nu S_y)S_{xy}}{\sigma^2} \\ -(1+\nu)\frac{S_x S_y}{\sigma^2} + 2\nu M, & (1+\nu)\frac{S_x^2}{\sigma^2} + 2M, & -\frac{(S_y + \nu S_x)S_{xy}}{\sigma^2} \\ -\frac{(S_x + \nu S_y)S_{xy}}{\sigma^2}, & -\frac{(S_y + \nu S_x)S_{xy}}{\sigma^2}, & \frac{N}{2} - (1-\nu)\frac{S_{xy}}{\sigma^2} \end{bmatrix}$$

ter sta

$$M = \frac{E_t}{9\mu} + \frac{S_{xy}^2}{\sigma^2}, \quad N = \frac{2}{3}(1-\nu)\left(1 + \frac{E_t}{3\mu}\right) - (1-2\nu)\frac{S_z^2}{\sigma^2} \quad (9.29)$$

Alternativno obstajajo tudi drugačne enačbe plastifikacije. Če npr. zane-marimo elastični delež (kar je običaj pri tehnološkem preoblikovanju, saj so tam začetne elastične deformacije zelo majhne v primerjavi z velikimi plas-tifikacijami - npr. vlečenje, iztiskanje ipd.), dobimo StVenantove enačbe, ki jih posebej ne bomo zapisali, saj so podobne Prandtl-Reussovim, le da manjka elastični delež.

S predpostavko o neposredni odvisnosti komponent plastične deformacije od ustrezne komponente deviatorične napetosti dobimo Henckyjeve enačbe, ki so nekoliko enostavnejše za uporabo, ker niso inkrementalne

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda S_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} S_{ij} = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{S} - \frac{1}{E} \right) S_{ij} \quad (9.30)$$

kjer je  $S$  sekantni modul na  $\sigma\varepsilon$  diagramu pri  $\sigma = \bar{\sigma}$ . Inkrementalna oblika Henckyjevega zakona je

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2\bar{\sigma}} \left( (d\bar{\varepsilon}_p - \bar{\varepsilon}_p \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}}) S_{ij} + \bar{\varepsilon}_p dS_{ij} \right) \quad (9.31)$$

Henckyjeve enačbe ustrezajo Prandtl-Reussovim, kadar so razmerja komponent deviatoričnih napetosti konstantna (monotona obremenitev).

### 9.3 Raztezanje debelostene krogle

V centralno simetrično obremenjeni krogli velja ravnovesna enačba ( $\sigma_\phi = \sigma_\theta$ )

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2}{r} (\sigma_\theta - \sigma_r) \quad (9.32)$$

Pri nizkih obremenitvah je telo krogle elastično, tako da so deformacije

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{1}{E} (\sigma_r - 2\nu \sigma_\theta) \quad (9.33)$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi = \frac{u}{r} = \frac{1}{E} ((1 - \nu)\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \quad (9.34)$$

torej velja kompatibilnostna enačba, izražena z napetostmi

$$\frac{d}{dr} (\sigma_r + 2\sigma_\theta) = 0 \quad (9.35)$$

in po integraciji

$$\sigma_r + 2\sigma_\theta = 3A \quad (9.36)$$

kar skupaj z ravnovesno enačbo (9.32) daje splošno rešitev napetosti v elastičnem območju krogle

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^3}, \quad \sigma_\theta = \sigma_\phi = A - \frac{B}{2r^3} \quad (9.37)$$

Zaradi robnih pogojev  $\sigma_r(r = a) = -p$ ,  $\sigma_r(r = b) = 0$  dobimo v območju  $a \leq r \leq b$  napetosti

$$\sigma_r = -p \cdot \frac{\frac{b^3}{r^3} - 1}{\frac{b^3}{a^3} - 1} \quad (9.38)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\phi = p \cdot \frac{\frac{b^3}{2r^3} + 1}{\frac{b^3}{a^3} - 1} \quad (9.39)$$

medtem ko je pomik

$$u = \frac{p}{E} \frac{(1 - 2\nu)r + (1 + \nu)\frac{b^3}{2r^3}}{\frac{b^3}{a^3} - 1} \quad (9.40)$$

Trescov in Misesov kriterij sta v danem primeru enaka, to je

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_0 \quad (9.41)$$

kar ima največjo vrednost pri  $r = a$ . Pričetek plastifikacije bo, ko je notranji tlak

$$p_0 = \frac{2\sigma_0}{3} \left(1 - \frac{a^3}{b^3}\right) \quad (9.42)$$

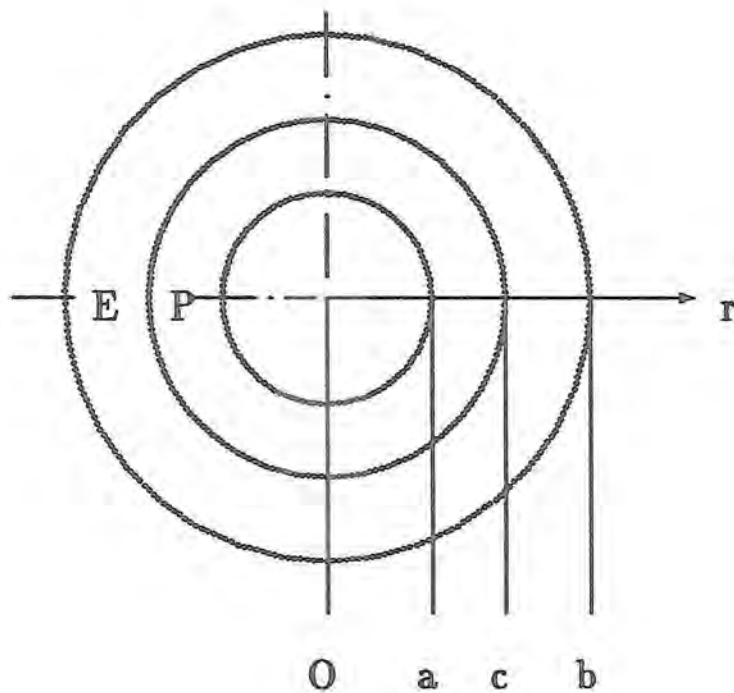
in je pomik

$$u_a = \frac{\sigma_0 a}{3E} \left(1 + \nu + 2(1 - 2\nu)\frac{a^3}{b^3}\right), \quad u_b = (1 - \nu) \frac{\sigma_0 a^3}{E b^2} \quad (9.43)$$

S povečanjem notranjega tlaka preko  $p_0$  ( $p \geq p_0$ ) se prične od znotraj v telo krogle širiti plastično območje (Slika 9.4).

V zunanjem elastičnem delu veljata tedaj obrazca za napetosti ( $c \leq r \leq b$ )

$$\sigma_r(r) = -\frac{2\sigma_0 c^3}{3b^3} \left(\frac{b^3}{r^3} - 1\right) \quad (9.44)$$



Slika 9.4: Plastifikacija votle krogle

$$\sigma_{\phi}(r) = \sigma_{\theta}(r) = \frac{2 \sigma_0 c^3}{3b^3} \left( \frac{b^3}{2r^3} + 1 \right) \quad (9.45)$$

in pomik

$$u(r) = \frac{2 \sigma_0 c^3}{3 E b^3} \left( (1 - 2\nu)r + (1 + \nu) \frac{b^3}{2r^3} \right) \quad (9.46)$$

V notranjem plastičnem delu ( $a \leq r \leq c$ ) veljata obrazca za napetosti, ki ju dobimo z integracijo enačbe (9.32) ob upoštevanju, da je desna stran zaradi enačbe (9.41) enaka  $2\sigma_0/r$ , kar daje logaritemsko rešitev

$$\sigma_r(r) = -\frac{2 \sigma_0}{3} \left( 1 - \frac{c^3}{b^3} + \ln\left(\frac{c^3}{r^3}\right) \right) \quad (9.47)$$

$$\sigma_{\theta}(r) = \sigma_{\phi}(r) = \frac{2 \sigma_0}{3} \left( \frac{1}{2} + \frac{c^3}{b^3} - \ln\left(\frac{c^3}{r^3}\right) \right) \quad (9.48)$$

Radialna napetost je največja na notranji površini krogle, obročna napetost pa na meji med plastičnim in elastičnim delom telesa krogle. Notranji tlak dobimo iz enačbe (9.47) z  $r = a$



$$p = \frac{2 \sigma_0}{3} \left(1 - \frac{c^3}{b^3} + \ln\left(\frac{c^3}{a^3}\right)\right) \quad (9.49)$$

Volumski raztezek pa je

$$\varepsilon_v = \frac{du}{dr} + 2\frac{u}{r} = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_r + 2\sigma_\phi) \quad (9.50)$$

Z vstavitvijo (9.47) in (9.48) dobimo v plastičnem območju

$$\frac{d}{dr}(r^2 u) = 2(1 - 2\nu) \frac{r^2 \sigma_0}{E} \left(\frac{c^3}{b^3} - \ln\left(\frac{c^3}{r^3}\right)\right) \quad (9.51)$$

Ker je pomik pri  $r = c$  znan iz enačbe (9.46), dobimo z integracijo (9.51) v območju  $a \leq r \leq c$

$$\frac{u}{r} = \frac{\sigma_0}{E} \left( (1 - \nu) \frac{c^3}{r^3} - \frac{2}{3} (1 - 2\nu) \left(1 - \frac{c^3}{b^3} + \ln\left(\frac{c^3}{r^3}\right)\right) \right) \quad (9.52)$$

Popolna plastifikacija krogle je pri  $c = b$ , tako da je končni tlak, ki to stanje povzroča

$$p_k = 2 \sigma_0 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (9.53)$$

in ustrejni pomik notranje površine

$$u_a = \frac{\sigma_0 a}{E} \left( (1 - \nu) \frac{b^3}{a^3} - 2(1 - 2\nu) \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right) \quad (9.54)$$

## 9.4 Raztezanje debelostene cevi

V osnosimetrično obremenjeni cevi velja ravnovesna enačba

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{1}{r} (\sigma_\phi - \sigma_r) \quad (9.55)$$

Pri nizkih obremenitvah je telo valja elastično, tako da so deformacije

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{1 + \nu}{E} ((1 - \nu)\sigma_r - \nu\sigma_\phi) - \nu\varepsilon_z \quad (9.56)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{u}{r} = \frac{1 + \nu}{E} ((1 - \nu)\sigma_\phi - \nu\sigma_r) - \nu\varepsilon_z \quad (9.57)$$

in dobimo kompatibilnostno enačbo, izraženo z napetostmi

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r + \sigma_\phi) = 0 \quad (9.58)$$

ter po integraciji

$$\sigma_r + \sigma_\phi = 2A \quad (9.59)$$

V zvezi z ravnovesno enačbo (9.55) je splošna rešitev za napetosti

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_\phi = A - \frac{B}{r^2} \quad (9.60)$$

Zaradi robnih pogojev  $\sigma_r(r = a) = -p$  in  $\sigma_r(r = b) = 0$  dobimo v območju  $a \leq r \leq b$  elastične napetosti

$$\sigma_r = -p \frac{\frac{b^2}{r^2} - 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} \quad (9.61)$$

$$\sigma_\phi = p \frac{\frac{b^2}{r^2} + 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} \quad (9.62)$$

medtem ko so vzdolžne napetosti v ravninskem deformacijskem stanju

$$\sigma_z = \nu (\sigma_r + \sigma_\phi) = \frac{2\nu p}{\frac{b^2}{a^2} - 1} \quad (9.63)$$

S Trescovim kriterijem dobimo iz (9.61) in (9.62)

$$\sigma_\phi - \sigma_r = 2p \frac{\frac{b^2}{r^2}}{\frac{b^2}{a^2} - 1} = \sigma_0 \quad (9.64)$$

in je ustrežni notranji tlak za pričetek plastifikacije

$$p_0 = \sigma_0 \cdot \frac{1 - \frac{a^2}{b^2}}{2} \quad (9.65)$$

Po Misesu pa velja

$$(\sigma_r - \sigma_\phi)^2 + (\sigma_\phi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 = 2\sigma_0^2 \quad (9.66)$$

tako da po vstavitvi (9.61), (9.62) in (9.63) dobimo, če je  $\nu = 1/2$

$$p_0 = \sigma_0 \cdot \frac{1 - \frac{a^2}{b^2}}{\sqrt{3}} \quad (9.67)$$

kar je 15,47 % več kot po Trescovem kriteriju.

S povečanjem notranjega tlaka preko  $p_0$  ( $p \geq p_0$ ) se prične od znotraj v telo cevi širiti plastično področje (Slika 9.5). Ker je po Misesu

$$\sigma_\phi - \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_0 \quad (9.68)$$

dobimo iz ravnovesne enačbe (9.55) v plastičnem območju

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_0}{r} = 0 \quad (9.69)$$

ki ima rešitev ( $a \leq r \leq c$ )

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \cdot \left( \ln\left(\frac{r^2}{c^2}\right) - 1 + \frac{c^2}{b^2} \right) \quad (9.70)$$

ter je obročna napetost

$$\sigma_\phi = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \cdot \left( \ln\left(\frac{r^2}{c^2}\right) + 1 + \frac{c^2}{b^2} \right) \quad (9.71)$$

in vzdolžna napetost zaradi (9.63)

$$\sigma_z = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \cdot \left( \ln\left(\frac{r^2}{c^2}\right) + \frac{c^2}{b^2} \right) \quad (9.72)$$

V zunanem elastičnem območju ( $c \leq r \leq b$ ) so tedaj napetosti

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \cdot \left( \frac{c^2}{b^2} - \frac{c^2}{r^2} \right) \quad (9.73)$$

$$\sigma_\phi = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \cdot \left( \frac{c^2}{b^2} + \frac{c^2}{r^2} \right) \quad (9.74)$$

$$\sigma_z = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{b^2} \quad (9.75)$$

Popolna plastifikacija ( $c = b$ ) nastopi pri tlaku na notranjem plašču valja ( $r = a$ )

$$p_k = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \cdot \ln\left(\frac{a}{b}\right) \quad (9.76)$$

Primerjava s kroglo (9.53) kaže, da je valj šibkejši, kar vemo že iz trdnosti, čeprav smo se tam omejevali na elastično območje.

## 9.5 Plastifikacija obroča spremenljive debeline

V tankem obroču ( $\sigma_z = 0$ ) spremenljive debeline ob zanemaritvi telesnih sil (težnost, vrtenje, termika) je ravnovesje podano z naslednjim razmerjem ( $t = d/dr$ ) med radialnimi in obročnimi napetostmi (6.118)

$$\sigma_R \left(1 + \frac{r t'}{t}\right) + r \sigma_R' = \sigma_\phi \quad (9.77)$$

Za hiperbolično obliko  $t = t_0 (a/r)^n$ ,  $a \leq r \leq b$  dobimo enačbo

$$\sigma_R (1 - n) + r \sigma_R' = \sigma_\phi \quad (9.78)$$

V elastičnem območju ( $c \leq r \leq b$ ,  $c \geq a$ ), ko velja Hookov zakon, dobimo znano diferencialno enačbo 2.reda (6.124)

$$\sigma_R'' + \frac{3-n}{r} \sigma_R' - \frac{n(1+\nu)}{r^2} \sigma_R = 0 \quad (9.79)$$

ki ima splošno rešitev

$$\sigma_R = C_1 r^p + C_2 r^q \quad (9.80)$$

kjer  $p$  in  $q$  dobimo kot korena karakterističnega polinoma

$$w^2 + (2-n)w - n(1+\nu) = 0 \quad (9.81)$$

to je

$$w = \frac{n}{2} - 1 \pm \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \nu n + 1} = (p, q) \quad (9.82)$$

Z uporabo robnih pogojev ( $\sigma_R(r=a) = -p_a$ ,  $\sigma_R(r=b) = -p_b$ ) sta ustrezni integracijski konstanti

$$C_1 = \frac{p_b a^q - p_a b^q}{a^p b^q - a^q b^p} \quad (9.83)$$

$$C_2 = \frac{p_b a^p - p_a b^p}{a^q b^p - a^p b^q} \quad (9.84)$$

Ob upoštevanju samo notranje obremenitve ( $p_b = 0$ ) so napetosti v elastičnem območju podane kot

$$\sigma_R = p_a \frac{b^p r^q - b^q r^p}{a^p b^q - a^q b^p} \quad (9.85)$$

$$\sigma_{\phi} = p_a \frac{(1 - n + q) b^p r^q - (1 - n + p) b^q r^p}{a^p b^q - a^q b^p} \quad (9.86)$$

Če notranji tlak naraste, se pojavi plastično območje v notranjem delu obroča. Pojav tečenja lahko upoštevamo bodisi po Trescovem oziroma Misesovem kriteriju.

$$\sigma_{\phi} - \sigma_R = 2k \quad (9.87)$$

$$\sigma_{\phi}^2 - \sigma_{\phi} \sigma_R + \sigma_R^2 = 3k^2 \quad (9.88)$$

kjer je  $k$  strižna meja tečenja.

### (a) Trescov postopek

Z enačbama (9.78) in (9.87) dobimo naslednjo diferencialno enačbo 1.reda

$$r \sigma'_R - n \sigma_R = 2k \quad (9.89)$$

Njeno homogeno levo stran lahko integriramo z ločitvijo spremenljivk in dobimo

$$\sigma_R = A r^n \quad (9.90)$$

Z variacijo konstante  $A$  tako dobimo popolno rešitev

$$\sigma_R = B r^n - \frac{2k}{n} \quad (9.91)$$

kjer je  $B$  integracijska konstanta, ki jo določimo iz robnih pogojev. Pri  $n = 0$  velja ustrezno popravljena rešitev (zaradi singularnosti)

$$\sigma_R = B + 2k \ln(r) \quad (9.92)$$

Če uporabimo robni pogoj  $\sigma_R(a) = -p_a$  pri  $n = 0$  dobimo

$$\sigma_R = -p_a + 2k \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad (9.93)$$

in pri  $n \neq 0$

$$\sigma_R = -p_a \left(\frac{r}{a}\right)^n + \frac{2k}{n} \left(\left(\frac{r}{a}\right)^n - 1\right) = \left(-p_a + \frac{2k}{n}\right) \left(\frac{r}{a}\right)^n - \frac{2k}{n} \quad (9.94)$$

Na meji med plastičnim in elastičnim območjem pri  $r = c$ , z uporabo Trescovega kriterija (9.87) vlada vmesni tlak

$$p_c = 2k \frac{c^p b^q - c^q b^p}{(q-n)b^p c^q - (p-n)b^q c^p} \quad (9.95)$$

tako da so napetosti v zunanjem elastičnem območju

$$\sigma_R = 2k \frac{b^p r^q - b^q r^p}{(q-n)b^p c^q - (p-n)b^q c^p} \quad (9.96)$$

$$\sigma_\phi = 2k \frac{(1-n+q)b^p r^q - (1-n+p)b^q r^p}{(q-n)b^p c^q - (p-n)b^q c^p} \quad (9.97)$$

Zveznost  $\sigma_R$  pri  $r = c$  daje s pomočjo enačb (9.94) in (9.96) vrednost

$$p_a = \frac{2k}{n} \left( 1 + a^n \frac{p b^q c^{p-n} - q b^p c^{q-n}}{(q-n)b^p c^q - (p-n)b^q c^p} \right) \quad (9.98)$$

tako da pride do pričetka tečenja ( $c = a$ ), ko je notranji tlak

$$p_a = 2k \frac{b^q a^p - b^p a^q}{(q-n)b^p a^q - (p-n)b^q a^p} \quad (9.99)$$

medtem ko je končni tlak, ki povzroči celotno plastifikacijo obroča ( $c = b$ )

$$p_a = \frac{2k}{n} \left( 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^n \right) \quad (9.100)$$

Pri  $n = 0$  so napetosti v zunanji elastični plasti odvisne od vmesnega tlaka, ki je v tem primeru

$$p_c = k \left( 1 - \left( \frac{c}{b} \right)^2 \right) \quad (9.101)$$

tako da dobimo

$$\sigma_R = -k \left( \left( \frac{c}{r} \right)^2 - \left( \frac{c}{b} \right)^2 \right) \quad (9.102)$$

$$\sigma_\phi = k \left( \left( \frac{c}{r} \right)^2 + \left( \frac{c}{b} \right)^2 \right) \quad (9.103)$$

Zveznost  $\sigma_R$  pri  $r = c$  daje znan rezultat za potrební notranji tlak

$$p_a = k \left( 1 - \left( \frac{c}{b} \right)^2 + 2 \ln \left( \frac{c}{a} \right) \right) \quad (9.104)$$

in pričetek tečenja ( $c = a$ ) pri

$$p_a = k \left( 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right) \quad (9.105)$$

medtem ko je končni tlak ( $c = b$ ) je

$$p_a = 2k \ln \left( \frac{b}{a} \right) \quad (9.106)$$

### (b) Misesov postopek

Enačbo (9.88) lahko razrešimo za obročne napetosti

$$\sigma_\phi = \frac{\sigma_R}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{4k^2 - \sigma_R^2} \quad (9.107)$$

Ko ta izraz vstavimo v ravnovesno enačbo (9.78), sta spremenljivki ločljivi. Če uporabimo novo spremenljivko

$$s = -\frac{\sigma_R}{2k} \quad (9.108)$$

dobimo diferencialno enačbo

$$\frac{dr}{r} = \frac{-ds}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1-s^2} + \frac{1}{2} s (1-2n)} \quad (9.109)$$

ki jo integriramo z uporabo substitucije

$$s = \sin(\theta + \delta) \quad (9.110)$$

kjer je

$$\delta = \arctg \left( \frac{1-2n}{\sqrt{3}} \right) \quad (9.111)$$

Tako enačba (9.109) postane

$$\frac{dr}{r} = \frac{1}{2(1-n+n^2)} ((1-2n) \operatorname{tg} \theta - \sqrt{3}) d\theta \quad (9.112)$$

in ima rešitev

$$\ln(r) = C - \frac{1}{2(1-n+n^2)} ((1-2n) \ln(\cos \theta) + \sqrt{3} \theta) \quad (9.113)$$

kjer je  $C$  integracijska konstanta

Pri  $n = 0$  je ustrezeni rezultat

$$\ln(r) = C - \frac{1}{2} (\ln(\cos\theta)) + \sqrt{3}\theta \quad (9.114)$$

Obravnavajmo še popolno plastifikacijo danega ravninskega stanja napetosti. V tem primeru je  $\sigma_R = -2k$ , tako da  $r = a$  ustreza  $s = 1$  oziroma  $\theta = \pi/2 - \delta$ , medtem ko  $r = b$  daje  $s = 0$  oziroma  $\theta = -\delta$ . Zato je  $b/a$  podan v obliki

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2(1-n+n^2)} \left( (1-2n) \ln\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-\delta)}{\cos(\delta)}\right) + \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \right) \quad (9.115)$$

Pri  $0 < n \leq 1/2$  (ker mora biti  $\delta$  pozitiven kot) je limitna vrednost ( $n = 1/2$ )

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} = 1,8138$$

Za  $n = 0$ :  $\delta = \text{atg}(1/\sqrt{3}) = \pi/6$  dobimo

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\pi\sqrt{3} - \ln 3}{4} = 1,0857$$

Zato je popolna plastifikacija možna le, če velja  $b/a \leq e^{1,0857}$ , ( $n = 0$ ), oziroma  $b/a \leq e^{1,8138}$ , ( $n = 1/2$ ).

Da določimo največjo možno širitev plastičnega območja za  $b/a \rightarrow \infty$ , uporabimo spet  $\theta = \pi/2 - \delta$  pri  $r = a$ , in  $\theta = 0$  pri  $r = c$ , kjer je  $\sigma_R = -k$ , tako da dobimo

$$\ln\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{1}{2(1-n+n^2)} \left( (1-2n) \ln(\cos(\frac{\pi}{2}-\delta)) + \sqrt{3}(\frac{\pi}{2}-\delta) \right) \quad (9.116)$$

Za  $n = 1/2$  velja ustrezna vrednost

$$\ln\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} = 1,8138$$

medtem ko pri  $n = 0$

$$\ln\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2}{2} = 0.5603$$



Vmes na primer pri  $n = 1/4$  dobimo

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) = 1,2920$$

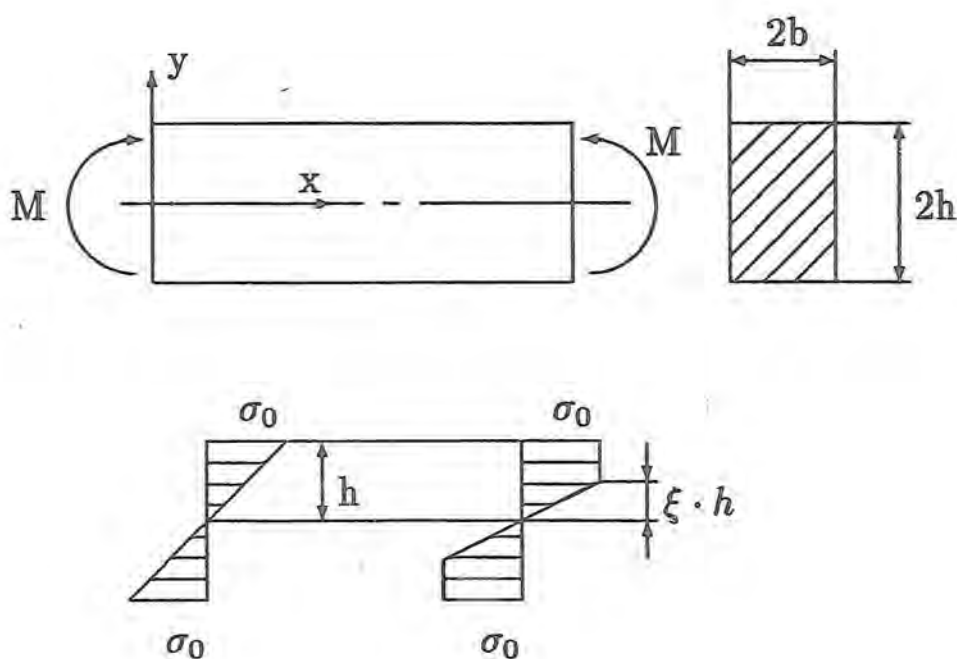
in

$$\ln\left(\frac{c}{a}\right) = 0,9801$$

## 9.6 Plastični upogib nosilca

Oglejmo si še preprost primer čistega upogiba nosilca pravokotnega prereza (Slika 9.5). V elastičnem območju velja porazdelitev napetosti

$$\sigma_x = \sigma_0 \cdot \frac{y}{h} \quad (9.117)$$



Slika 9.5: Upogib nosilca

Upogibni moment izračunamo z integralom

$$M_z^e = 2b \int_{-h}^{+h} \sigma_x y dy = \frac{2b\sigma_0}{h} \int_{-h}^{+h} y^2 dy = \frac{4}{3} b h^2 \sigma_0 \quad (9.118)$$

V primeru povečanja momenta preko te meje pride do plastifikacije zgornjega in spodnjega vlakna nosilca, tako da je upogibni moment

$$M_z = 2b \left( \frac{\sigma_0}{\xi h} \int_{-\xi h}^{+\xi h} y^2 dy + 2\sigma_0 \int_{+\xi h}^{+h} y dy \right) = \frac{2}{3} b \sigma_0 h^2 \cdot (3 - \xi^2) \quad (9.119)$$

z največjo vrednostjo pri  $\xi = 0$ , ko se obe plastični coni združita in pride do porušitve z upogibnim momentom

$$M_{max} = 2b h^2 \sigma_0 = \frac{3}{2} M_z^e \quad (9.120)$$

## 9.7 Torzija okroglega prereza

V notranjem elastičnem delu je strižna napetost

$$\tau = \frac{k r}{c} \quad (0 \leq r \leq c) \quad (9.121)$$

medtem ko je v zunanem plastičnem območju

$$\tau = k \quad (c \leq r \leq b) \quad (9.122)$$

Tako dobimo torzijski moment

$$M_t = 2\pi \int_0^b \tau r^2 dr = \frac{2}{3} \pi k \left( b^3 - \frac{c^3}{4} \right) \quad (9.123)$$

Prvo tečenje nastopi pri ( $c = b$ )

$$M_0 = \pi k \frac{b^3}{2} \quad (9.124)$$

popolna plastifikacija ( $c = 0$ ) pa pri

$$M_k = \frac{2}{3} \pi k b^3 = \frac{4}{3} M_0 \quad (9.125)$$

## 9.8 Drzne črte pri plastifikaciji

Doslej smo obravnavali obnašanje snovi z omejenim plastičnim gibanjem zaradi sosedstva z elastičnim delom. Pri raznih tehnoloških procesih (npr. vlečenje, iztiskanje, vdiranje, prebadanje pa tudi odrezovanje, vrtanje ipd.) pa je plastična cona tolikšna, da je elastični delež zanemarljiv. Telo obravnavamo kot togo-plastično, upoštevali pa bomo samo ravninsko deformacijsko stanje (torej prereze dolgih prizem) v ravnini  $x$ - $y$ , neodvisno od  $z$  smeri. Gradivo smatramo kot nestisljivo in je zato telo v čistem strigu, glavne hitrosti deformacij so enake in nasprotno usmerjene. Ob izotropiji so tudi napetosti v stanju čistega striga. Povprečna napetost je zato

$$\sigma_H = \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (9.126)$$

kar velja, če je  $\nu = 1/2$  (zvezno na meji med elastičnim in plastičnim delom telesa). Ker povprečna napetost ne vpliva na tečenje, je največja strižna napetost v  $x$ - $y$  ravnini enaka  $k$  ( $k = \sigma_0/2$  po Trescovem oziroma  $k = \sigma_0/\sqrt{3}$  po Misesovem kriteriju) in dobimo kriterij tečenja v obliki

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2 \quad (9.127)$$

kjer je  $k = konst.$ , če ne upoštevamo utrjevanje snovi s plastifikacijo. V odsotnosti volumskih sil sta ravnovesni enačbi ravninskega stanja

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (9.128)$$

S hitrostmi  $v_x$  in  $v_y$  velja pogoj nestisljivosti (kontinuitetna enačba)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (9.129)$$

Konstitutivna zveza se glasi

$$\frac{2\dot{\gamma}_{xy}}{\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = tg(2\phi) \quad (9.130)$$

kjer je  $\phi$  kot glede na  $x$  os. Če izrazimo hitrosti deformacij z gradienti hitrosti, dobimo enačbo

$$(\sigma_x - \sigma_y)\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) = 2\tau_{xy}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) \quad (9.131)$$

Če je povprečna napetost  $\sigma_H = -p$ , velja (iz Mohrovega kroga)

$$\sigma_x = -p - k \sin(2\phi), \quad \sigma_y = -p + k \sin(2\phi), \quad \tau_{xy} = k \sin(2\phi) \quad (9.132)$$

Tako postaneta ravnovesni enačbi neutrjevanega nestisljivega telesa

$$\frac{\partial p}{\partial x} + 2k (\cos(2\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sin(2\phi) \frac{\partial \phi}{\partial y}) = 0 \quad (9.133)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + 2k (\sin(2\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} - \cos(2\phi) \frac{\partial \phi}{\partial y}) = 0 \quad (9.134)$$

kar lahko nadomestimo z eno samo enačbo drugega reda, ki je hiperbolična. Povprečnega tlaka se znebimo z odvajanjem enačbe (9.133) po  $y$  in enačbe (9.134) po  $x$  ter ju nato med seboj odštejemo in dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2ctg(2\phi) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \\ - 2ctg(2\phi) \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (9.135)$$

Z uvedbo oznak  $P = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ ,  $Q = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ ,  $R = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ ,  $S = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$ ,  $T = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$  velja naslednja oblika diferencialne enačbe

$$A R + 2 B S + C T = f(\phi, P, Q, x, y) \quad (9.136)$$

s koeficienti  $A = -1$ ,  $B = ctg(2\phi)$ ,  $C = +1$ ,  $f = 4 P Q - 2(Q^2 - P^2) ctg(2\phi)$ , tako da je diskriminanta enačbe (9.136) pozitivna

$$B^2 - A C = ctg^2(2\phi) + 1 > 0 \quad (9.137)$$

in je enačba hiperbolična. Ustrezna enačba "karakteristik" pa je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - A C}}{A} = -ctg(2\phi) \pm \sqrt{ctg^2(2\phi) + 1} = \left\{ \begin{array}{l} tg \phi \\ -ctg \phi \end{array} \right\} \quad (9.138)$$

kar predstavlja dve med seboj ortogonalni družini krivulj (karakteristik  $\alpha$  in  $\beta$ ).

Če enačbi (9.133) in (9.134) zapišemo pri  $\phi = 0$ , dobimo

$$\frac{\partial p}{\partial x} + 2k \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} + 2k \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (9.139)$$

kar pomeni, da je vzdolž karakteristik (ravnovesje na drsnih črtah)

$$p \pm 2k\phi = \text{konst.} \quad (9.140)$$

po Henckyju. Pravtako pa lahko prevedemo hitrostni enačbi, če izrazimo

$$v_x = u \cos\phi - v \sin\phi, \quad v_y = u \sin\phi + v \cos\phi \quad (9.141)$$

Ker je vzdolž obeh karakteristik  $\sigma_x = \sigma_y = -p$ ,  $\tau_{xy} = k$ , dobimo

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_{\phi=0} = \left(\frac{\partial v'_x}{\partial y}\right)_{\phi=0} = 0 \quad (9.142)$$

in velja

$$\frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (9.143)$$

oziroma

$$du - v d\phi = 0, \quad dv + u d\phi = 0 \quad (9.144)$$

po Geiringerju.

### (a) Dolgi valj z notranjim tlakom

Trajektorije obročnih napetosti  $\sigma_\phi$  so v tem primeru koncentrični krogi ( $r = \text{konst.}$ ), medtem ko so trajektorije radialnih napetosti  $\sigma_r$  sredobežni žarki ( $\phi = \text{konst.}$ ). Ti dve družini sta med seboj ortogonalni. Drсне črte ju sekajo pod kotom  $45^\circ$  ( $\pi/2$ ). Enačba karakteristike se zato glasi

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg}\left(\phi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \text{tg}\phi}{1 - \text{tg}\phi} \quad (9.145)$$

Ker sta  $x = r \cdot \cos\phi$ ,  $y = r \cdot \sin\phi$ , dobimo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\phi \cdot dr + r \cdot \cos\phi \cdot d\phi}{\cos\phi \cdot dr - r \cdot \sin\phi \cdot d\phi} = \frac{1 + \text{tg}\phi}{1 - \text{tg}\phi} \quad (9.146)$$

kar da diferencialno enačbo

$$\frac{dr}{r} = d\phi \quad (9.147)$$

Z njeno integracijo in robnim pogojem ( $r = a$ ,  $\theta = \phi + \pi/4$ ) dobimo logaritemsko špiralo v polarnih koordinatah

$$r = a \cdot e^\theta, \quad \theta = \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad (9.148)$$

oziroma

$$\Delta\theta_{ab} = \Delta\phi_{ab} = \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (9.149)$$

Ker so napetosti ( $p \pm 2k\phi = \text{konst}$ )

$$p_a - p_b = 2k \Delta\phi_{ab} = 2k \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (9.150)$$

Zaradi  $\sigma_\phi = \sigma_r + 2k$ ,  $\sigma_H = (\sigma_\phi + \sigma_r)/2$  dobimo na notranjem robu ( $r = a$ )

$$\sigma_r(a) = -p_n, \quad \sigma_\phi(a) = 2k - p_n, \quad p_a = k - p_n \quad (9.151)$$

in na zunanjem robu

$$\sigma_r(b) = 0, \quad \sigma_\phi(b) = 2k, \quad p_b = k \quad (9.152)$$

Zato velja zaradi enačbe (9.150)

$$p_a - p_b = p_n = 2k \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (9.153)$$

Ker je po Misesu  $k = \sigma_0/\sqrt{3}$ , velja za tlak na notranji površini

$$p_n = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (9.154)$$

ki povzroča popolno plastifikacijo celotnega prereza valja. Porazdelitve napetosti so ustrezne že znanim rezultatom

$$\sigma_r(r) = -2k \cdot \ln\left(\frac{b}{r}\right) = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \cdot \ln\left(\frac{b}{r}\right) \quad (9.155)$$

$$\sigma_\phi(r) = +2k \cdot (1 - \ln\left(\frac{b}{r}\right)) = +\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \cdot (1 - \ln\left(\frac{b}{r}\right)) \quad (9.156)$$

## (b) Plastifikacija kvadra med dvema ploščama

Območje problema naj bo  $-L/2 \leq x \leq +L/2$ ,  $-h/2 \leq y \leq +h/2$ . Dolžina kvadra je tolikšna, da vpliv na porazdelitev napetosti in deformacij zanemarimo. Strižna napetost je v tem primeru

$$\tau_{xy} = -k \cdot \cos(2\phi) = 2k \cdot \frac{y}{h} \quad (9.157)$$

Zato dobimo

$$y = -\frac{h}{2} \cdot \cos(2\phi), \quad dy = h \cdot \sin(2\phi) d\phi = 2h \sin\phi \cos\phi d\phi \quad (9.158)$$

Karakteristiki sta

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\phi, \quad dx = dy \frac{\cos\phi}{\sin\phi} = 2h \cos^2\phi d\phi \quad (9.159)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}\phi, \quad dx = -dy \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = -2h \sin^2\phi d\phi \quad (9.160)$$

Z integracijo dobimo

$$x = 2h \int \cos^2\phi d\phi + C_1 = \frac{h}{2}(2\phi + \sin(2\phi)) + C_1 \quad (9.161)$$

$$x = -2h \int \sin^2\phi d\phi + C_2 = -\frac{h}{2}(2\phi - \sin(2\phi)) + C_2 \quad (9.162)$$

iz prve dobimo (če zapišemo  $r = h/2$ ,  $2\phi = t$ ,  $C_1 = 0$ )

$$x = r \cdot (t + \sin t), \quad y = -r \cdot \cos t, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \quad (9.163)$$

kar je enačba cikloide v parametrični obliki.

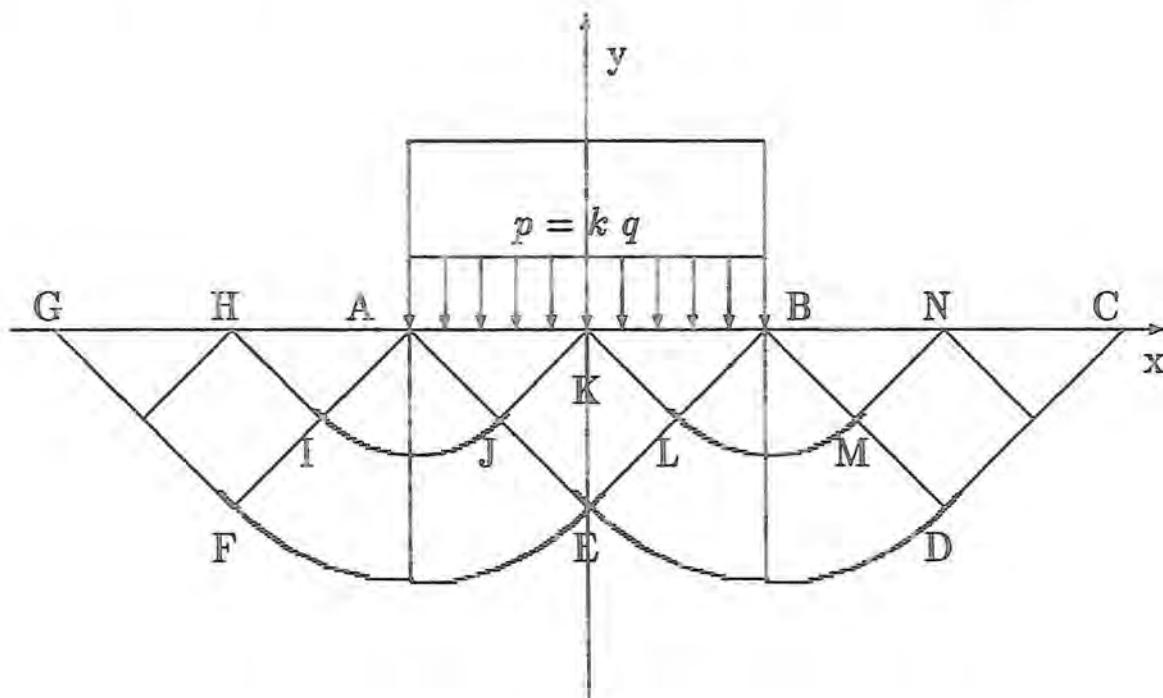
Iz druge pa dobimo ( $C_2 = 0$ )

$$x = -r \cdot (t - \sin t), \quad y = -r \cdot \cos t, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin t}{1 - \cos t} \quad (9.164)$$

kar je spet cikloida ortogonalna na prejšno.

## (c) Vdiranje letve v polravnino

Velja naj ravninsko deformacijsko stanje (Slika 9.6). V območju blizu delovanja pestične letve so drsne črte krogi oziroma premice. Na odseku AG



Slika 9.6: Začetek vdiranja pestične letve

(prosta površina) velja

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (9.165)$$

Zaradi pogoja tečenja

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2 \quad (9.166)$$

zato dobimo

$$\sigma_x = -2k \quad (9.167)$$

Ker je na AG strižna napetost nič, je to smer glavnih napetosti, največje strižne napetosti pa se pojavljajo pod kotom  $45^\circ$ . Zato je v trikotniku  $\triangle AGF$

$$\chi = \frac{\sigma_x}{4k} = -\frac{1}{2}, \quad \phi = \frac{\pi}{4} \quad (9.168)$$

Na odseku AB (če ni trenja) velja



$$\sigma_y = -k q, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (9.169)$$

in dobimo zaradi pogoja tečenja

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 = 4 k^2 \quad (9.170)$$

oziroma

$$\sigma_x = \sigma_y + 2k = k \cdot (2 - q) \quad (9.171)$$

Tudi v tem delu so drsne črte pod kotom  $45^\circ$  in je v trikotniku  $\triangle AEB$

$$\chi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{4k} = \frac{1 - q}{2}, \quad \phi = \frac{3}{4}\pi \quad (9.172)$$

Vzdolž HI je

$$\chi = -\frac{1}{2}, \quad \phi = \frac{\pi}{4} \quad (9.173)$$

vzdolž JK pa

$$\chi = -\frac{1}{2} \cdot (1 - q), \quad \phi = \frac{3}{4}\pi \quad (9.174)$$

Ker mora biti na karakteristiki (Henckyjeva enačba)

$$\chi + \phi = 0 \quad (9.175)$$

dobimo

$$-\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(1 - q) + \frac{3}{4}\pi \quad (9.176)$$

oziroma

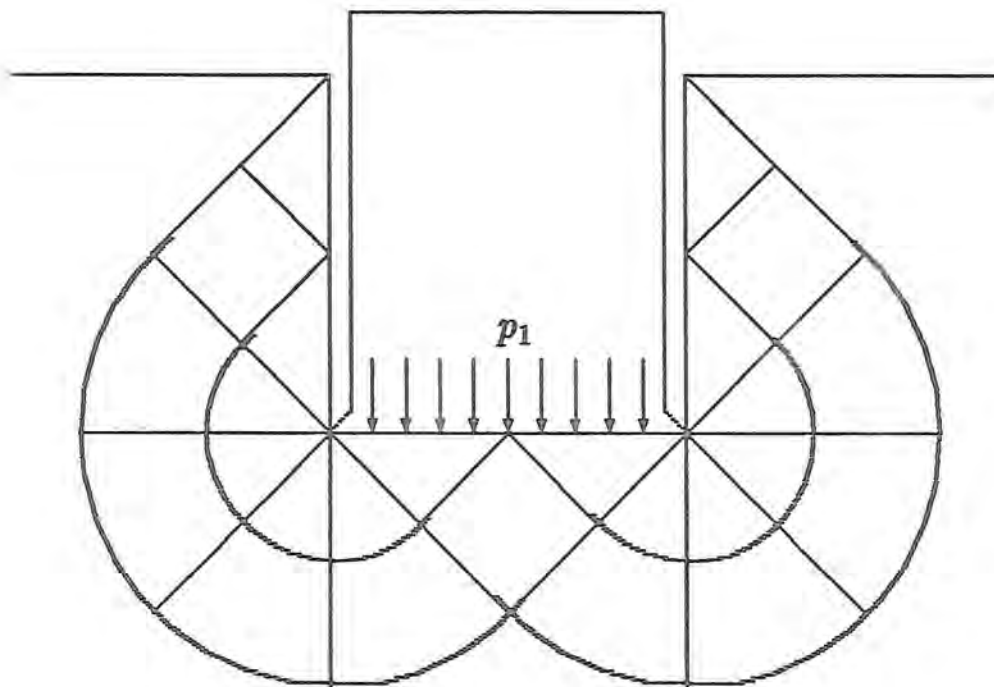
$$q = 2 + \pi \quad (9.177)$$

tako da je tlak na začetku vdiranja pestiča (letve)

$$p_0 = 2k \cdot \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \quad (9.178)$$

Na analogen način dobimo za primer popolnega vdranja letve v telo polravnine (Slika 9.7) potrební tlak

$$p_1 = 2k \cdot (1 + \pi) = 1,611 p_0 \quad (9.179)$$



Slika 9.7: Popolno vdrtje pestične letve

Drsne črte izven narisane območja so podane z Besselovimi funkcijami , česar pa v okviru teh skript ne bomo obravnavali, saj presega znanje matematike, ki se predava na naši fakulteti pri dodiplomskem študiju VTO Strojništva.

Iz istega razloga tudi ne moremo obravnavati teorije in uporabe drsnih črt pri iztiskovanju in drugih tehnoloških postopkih plastifikacije.

# Literatura

- [1] Prelog E.: "Elasto in plastomehanika", 1966 (1973, 1978)
- [2] Prelog E.: "Mehanika konstrukcij", 1978
- [3] Timoshenko S., Goodier J.N.: "Teorija elastičnosti", 1951 (1962)
- [4] Borg S.F.: "Matrix-Tensor Methods in Continuum Mechanics", 1963
- [5] Ford H., Alexander J.M.: "Advanced Mechanics of Materials", 1963
- [6] Nowacky W.: "Thermoelasticity", 1962
- [7] Kuhn G.: "Technische Mechanik", 1985
- [8] Chen W.F., Han D.J.: "Plasticity for Structural Engineers", 1988
- [9] Chakrabarty J.: "Theory of Plasticity", 1987
- [10] Betten J.: "Elastizitäts und Plastizitätslehre", 1985
- [11] Hill R.: "The Mathematical Theory of Plasticity", 1956
- [12] Sawczuk A.: "Mechanics and Plasticity of Structures", 1989
- [13] Mendelson A.: "Plasticity - Theory and Application", 1968
- [14] Musafija B.: "Primjenjena teorija plastičnosti", 1974
- [15] Lubliner J.: "Plasticity Theory", 1990
- [16] Umek A.: "Trdnost", 1982
- [17] Alujevič A.: "Elastomehanika", 1979