Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

Oddelek za fiziko

Višja Statistična Fizika – 2. letnik, II. stopnja

Seminar

Bele pritlikavke –
– degeneriran Fermijev plin

avtor: Bor Kavčič

Ljubljana, 30. oktober 2013

Povzetek

V seminarju na krajši način predstavimo statistično obravnavo močno degeneriranega Fermijevega plina. Pričnemo s krajšim uvodom v velekanonično statistiko. Preko predstvljene teorije izračunamo fazno vsoto hladnega Fermijevega plina. Splošen izraz umestimo v naravne okoliščine preko obravnave belih pritlikavk, ki so modelni sistem za študij degenriranega Fermijevega plina. S povezavo gravitacije s statističnim modelom elektronskega plina izračunamo določene limite in poskušamo razložiti obstoj mejnika med kolapsirano zvezdo (črno luknjo) ter majhnimi in zelo gostimi zvezdami.

Kazalo

1 Velekanonični ansambel **2**

2 Degenerirani relativistični Fermijev plin **3**

3 Bele pritlikavke **5**

1 Velekanonični ansambel

V mnogih fizikalnih sistemih se izkaže (mikro)kanonični ansambel za manj uporabnega, saj so temeljne predpostavke omejujoče. Naravna nagradnja je velekanonični ansambel, ki upošteva zgolj posredno merjenje števila delcev in le-to obravnava kot spremenljivko[1]. Primer bi bila para nad gladino kapljevine – obe fazi si med seboj izmenjujeta delce. Povprečno število delcev priklenemo preko kemijskega potenciala μ. Vse fizikalne količine izračunamo preko ustreznih odvodov velepotenciala q, ki je vpet v fazno vsoto preko [2]:

$$\mathcal{Z} = e^{-\beta q} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_k\}}{}' \exp\left[-\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k(\varepsilon_k - \mu)\right], \tag{1}$$

kjer upoštevamo vez $\sum n_k = N$. Vsota z $'$ označuje seštevek po vseh konfiguracijah sistema $\{n_k\}$ in upošteva, da velja za bozone (delce s celim spinom) $\{n_k\} = \{0, 1, \ldots, N\}$, za naš fermionski primer (delci s polcelim spinom) pa velja $\{n_k\} = \{0, 1\}$, kar je posledica Paulijevega načela. Upoštevaje povedano lahko z razmislekom zapišemo fermionsko fazno vsoto[2]:

$$e^{-\beta q} = \prod_k \left(\underbrace{1}_{n_k=0} + \underbrace{e^{\beta\mu - \beta\varepsilon_k}}_{n_k=1} \right). \tag{2}$$

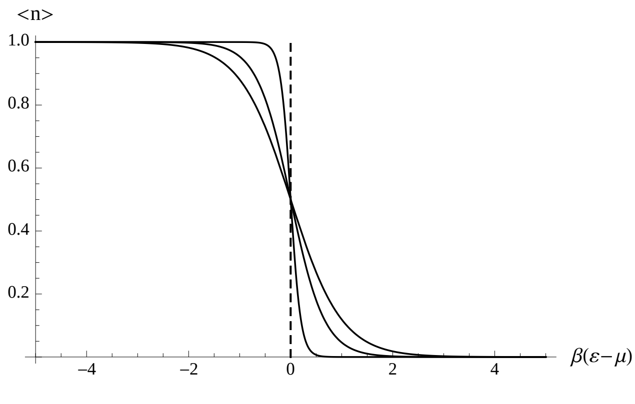
Ker velja:

$$\beta q = -\sum_k \ln\left(1 + e^{\beta\mu - \beta\varepsilon_k}\right) \tag{3}$$

in hkrati

$$\langle N \rangle = -\left(\frac{\partial(\beta q)}{\partial(\beta\mu)}\right)_\beta = \sum_k \frac{e^{\beta\mu - \beta\varepsilon_k}}{1 + e^{\beta\mu - \beta\varepsilon_k}} = \sum_k \underbrace{\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} + 1}}_{\langle n_k \rangle}, \tag{4}$$

izpeljemo povprečno zasedbeno število $\langle n_k \rangle$ za k-to stanje fermionskega sistema. Potek vrednosti $\langle n_k \rangle$ pri različnih temperaturah prikazuje Sl. 1.



Slika 1: Potek povprečnega fermionskega zasedbenega števila $\langle n_k \rangle$ pri različnih $\frac{1}{\beta} = kT = \{1/10, 1/3, 1/2\}$

Ob nizkih temperaturah, ko velja $kT \ll \mu$, govorimo o degeneriranem Fermijevem plinu. Povprečno zasedbeno število lahko opišemo s Heavisidovo funkcijo $\Theta(\mu - \varepsilon)$.

2 Degenerirani relativistični Fermijev plin

Lastnosti Fermijevega plina so vezane na izračun velepotenciala:

$$\frac{pV}{kT} = \ln \mathcal{Z} = \sum_k \ln\left[1 + z\exp(-\beta\varepsilon_k)\right], \tag{5}$$

kjer preteče vsota vsa možna stanja. Z z smo označili fugativnost $z = \exp \mu/kT$. Število delcev izrazimo kot seštevek povprečnih zasedbenih števil:

$$N = \sum_k \langle n_k \rangle = \sum_k \frac{1}{z^{-1}\exp(-\beta\varepsilon_k) + 1}. \tag{6}$$

Prevedba En. (5-6) na integrale terja poznavanje gostote stanja $g(\varepsilon)$ pri posamezni energiji, saj izraza v splošnem prepišemo v:

$$q = \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon\; g(\varepsilon) \ln\left[1 + z\exp(-\beta\varepsilon)\right], \tag{7a}$$

$$N = \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon\; g(\varepsilon)\frac{1}{z^{-1}\exp(-\beta\varepsilon_k) + 1}, \tag{7b}$$

kjer je $g(\varepsilon)$ gostota stanj. Gostoto stanj izračunamo preko Bohr-Sommerfeldovega kvantizacijskega pravila:

$$\sum = \frac{4\pi V}{h^3}\int p^2 \mathrm{d}p, \tag{8}$$

kar prevedemo na integral po energiji preko:

$$g'(\varepsilon) = \frac{\mathrm{d}\sum}{\mathrm{d}\varepsilon}. \tag{9}$$

Celoten izraz moramo pomnožniti z degeneracijsko utežjo (spin zavzame pri e^- dve vrednosti, pri valovih imamo lahko več polarizacij, etc.):

$$g(\varepsilon) = g(\varepsilon)'g \quad \text{kjer je} \quad g = 2s + 1. \tag{10}$$

Z s smo označili spin elektrona, ki znaša $s = 1/2$.

Račun pričnemo z izrazom En. (5) oziroma En. (7a), pri čemer upoštevamo relativistično energijo delca

$$\varepsilon = mc^2\left[\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} - 1\right], \tag{11}$$

kjer smo v izrazu odšteli mirovno energijo. V splošnem sicer velja:

$$\ln \mathcal{Z} = g\frac{4\pi}{h^3}\int_0^\infty p^2 \mathrm{d}p \ln(1 + z\exp(-\beta\varepsilon)). \tag{12}$$

Z integracijo *per partes* se znebimo logaritemskega člena, kar prevede izraz:

$$\ln \mathcal{Z} = g\frac{4\pi V}{h^3}\frac{\beta}{3}\int_0^\infty p^3 \mathrm{d}p \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}p}\frac{1}{z^{-1}\exp(\beta\varepsilon) + 1}. \tag{13}$$

Fugativnost z, oziroma iz nje izhajajoči kemijski potencial, izračunamo preko:

$$N = \sum_k \langle n_k \rangle = g\frac{4\pi V}{h^3}\int_0^\infty p^2 \mathrm{d}p\; \frac{1}{z^{-1}\exp(\beta\varepsilon) + 1} \tag{14}$$

Predpostavka nizke temperature poda v Pog. 1 opisan stopničasti približek za $\langle n_k \rangle$, kar omogoči prepis integralov:

$$\ln \mathcal{Z} = g\frac{4\pi V}{h^3}\frac{\beta}{3}\int_0^{p_f} p^3 \mathrm{d}p\; \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}p}, \tag{15a}$$

$$N = g\frac{4\pi V}{h^3}\int_0^{p_f} p^2 \mathrm{d}p = \frac{4\pi V}{3h^3}p_f^3. \tag{15b}$$

Enačba (15b) nam poda vrednost Fermijevega momenta p_f; relativistična zveza En. (11) nam poda vrednost kemijskega potenciala $\mu = \varepsilon_f$:

$$p_f = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{Nh^3}{Vg} \right)^{1/3}. \tag{16}$$

Fermijev moment p_f je sorazmeren s tretjim korenom gostote delcev $p_f \propto n^{1/3}$. Izračun integrala v En. (15a) terja poznavanje odvoda energije po impulzu:

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}p} = c \frac{p/mc}{\left[1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2\right]^{1/2}} \tag{17}$$

Izračunani odvod vstavimo v En. (15a), pri čemer upoštevamo pomen logaritma fazne vsote $q = \mathcal{P}V/kT$ [2]. Zaradi preglednosti označimo tlak z $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} = \frac{4\pi g}{3h^3} \int_0^{p_f} mc^2 \frac{\left(\frac{p}{mc}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2\right]^{1/2}} p^2 \, \mathrm{d}p. \tag{18}$$

Sledeč definiciji zapišemo tudi izraz za energijo:

$$U = \sum_k \varepsilon_k \langle n_k \rangle = \frac{4\pi g V}{h^3} \int_0^{p_f} p^2 \mathrm{d}p \, mc^2 \left\{ \left[1 + \left(\frac{p}{mc} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\}. \tag{19}$$

Ugodna substitucija je injektivna izražava impulzov preko hiperboličnih funkcij $p = mc \sinh x$; energija se v tej izražavi zapiše kot $\varepsilon = mc^2(\cosh x - 1)$ in njen odvod $\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}p = c \tanh x$. Prevedba integralov En. (18-19) ob hiperbolični substituciji nam omenjene poenostavi:

$$\mathcal{P} = \frac{4\pi g m^4 c^5}{3h^3} \int_0^{x_f} \sinh^4 x \, \mathrm{d}x, \tag{20a}$$

$$U = \frac{4\pi g V m^4 c^5}{h^3} \int_0^{x_f} (\cosh x - 1) \sinh^2 x \cosh x \, \mathrm{d}x. \tag{20b}$$

Zapisane integrale izračunamo preko zvez med hiperboličnimi funkcijami, ki jih najdemo v različnih priročnikih. Rezultat integralov kompaktneje zapišmo preko funkcij $\mathcal{A}(y)$ in $\mathcal{B}(y)$:

$$\mathcal{A}(y) = \sqrt{1+y^2}(2y^3 - 3y) + 3\mathrm{Arcsinh}\; y, \tag{21a}$$

$$\mathcal{B}(y) = 8y^3 \left(\sqrt{1+y^2} - 1 \right) - \mathcal{A}(y). \tag{21b}$$

Uvedli smo novo spremenljivko y:

$$y = \sinh x = \frac{p}{mc} \quad \text{in} \quad y_f = \sinh x_x = \frac{p_f}{mc}. \tag{22}$$

Splošen izraz za tlak $\mathcal{P}$ in notranjo energijo U zapišemo kot:

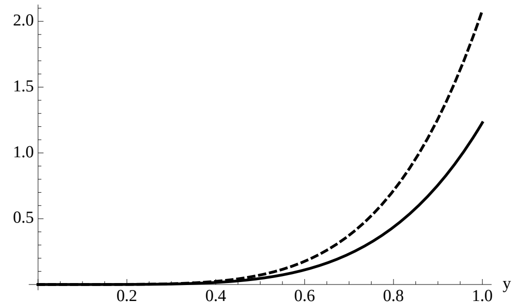
$$\mathcal{P}(y) = \frac{g\pi m^4 c^5}{6h^3} \mathcal{A}(y), \tag{23a}$$

$$U = \frac{g\pi V m^4 c^5}{6h^3} \mathcal{B}(y). \tag{23b}$$

Za preverbo rezultatov v primeru nerelativističnega približka potrebujemo Tayorjev razvoj funkcij $\mathcal{A}(y)$ in $\mathcal{B}(y)$ za majhne vrednosti y.

$$\mathcal{A}(y) \approx \frac{8}{5} y^5 - \frac{4}{7} y^7 + \ldots \quad \text{za} \quad y \ll 1 \tag{24a}$$

$$\mathcal{B}(y) \approx \frac{12}{5} y^5 - \frac{3}{7} y^7 + \ldots \quad \text{za} \quad y \ll 1. \tag{24b}$$



Slika 2: Potek funkcij $\mathcal{A}(y)$ in $\mathcal{B}(y)$. S prekinjeno črto je označen potek funkcije $\mathcal{B}(y)$.

Razvoj nam omogoči, da preverimo rezultat s klasičnim približkom.

$$\mathcal{P} = \frac{g\pi m^4 c^5}{6h^3}\frac{8}{5}\left(\frac{p_f}{mc}\right)^5 = \frac{2}{3}\left(\frac{2\pi g}{5h^3 m}p_f^5\right) = \frac{2}{3}\frac{U}{V}, \tag{25a}$$

$$U = \frac{g\pi V m^4 c^5}{6h^3}\frac{12}{5}\left(\frac{p_f}{mc}\right)^5 = \frac{2\pi g V}{5h^3 m}p_f^5. \tag{25b}$$

Na podoben način postopamo tudi pri razvoju za velike y, kar je obnašanje v primeru ultrarelativistične limite. Razvoja za velike vrednosti argumenta sta:

$$\mathcal{A}(y) \approx 2y^4 - 2y^2 + 3\ln 2y - \frac{7}{4} + \frac{5}{4}y^{-2} + \ldots \quad \text{za} \quad y \gg 1, \tag{26a}$$

$$\mathcal{B}(y) \approx 6y^4 - 8y^3 + 6y^2 - 3\ln 2y + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}y^{-2}\ldots \quad \text{za} \quad y \gg 1. \tag{26b}$$

Če obdržimo zgolj prva člena obeh razvojev, lahko izračunamo ultrarelativistične ($y_f \gg 1$) vrednosti tlaka $\mathcal{P}$ in notranje energij U:

$$\mathcal{P} = \frac{g\pi m^4 c^5}{6h^3}2\left(\frac{p_f}{mc}\right)^4 = \frac{1}{3}\left(\frac{g\pi c}{h^3}p_f^4\right) = \frac{1}{3}\frac{U}{V}, \tag{27a}$$

$$U = \frac{g\pi V m^4 c^5}{6h^3}6\left(\frac{p_f}{mc}\right)^4 = \frac{g\pi V c}{h^3}p_f^4. \tag{27b}$$

Izpeljani rezultati za hladni Fermijev plin so izredno pomembni v astrofiziki.

3 Bele pritlikavke

Bela pritlikavka je zvezda, katere maso ocenimo $M \approx 10^{30}$ kg, gostoto $\rho \approx 10^{10}$ kg m^{-3} in temperaturo $T = 10^7$ K. Najprej izračunamo Fermijevo energijo ε_f. Ta pove, ali moramo plin obravnavati relativistično in ali smemo predpostaviti, da je plin hladen.

Fermijev moment ocenimo preko gostote ρ. Pri temperaturi T so skoraj vsi helijevi atomi ionizirani. Vsak izmed njih prispeva k masi zvezde štiri nukleone ter dva elektrona. Helijeva jedra smemo obravnavati nerelativistično, saj je $kT \approx 1$ keV zelo majhna v primerjavi z njihovo mirovno maso $m_{\mathrm{He}}c^2 \approx 4$ GeV. Tudi k masi elektronov kinetična energija ne prispeva bistveno. Zato lahko zapišemo maso zvezde kot:

$$M = N(m_e + 2m_n) \approx 2m_n N, \tag{28}$$

kjer smo upoštevali, da je masa dveh nukleonov večja od mase elektrona. Sedaj lahko ocenimo številsko gostoto elektronov:

$$n = \frac{N}{V} \approx \frac{M/2m_n}{M/\rho} \approx \frac{\rho}{2m_n} \approx 3\times 10^{36}\,\frac{\text{elektronov}}{\text{m}^3}. \tag{29}$$

Številsko gostoto potrebujemo za izračuna Fermijevega momenta iz En. (16).

$$p_f = \left(\frac{3n}{4\pi g}\right)^{1/3} h \approx 0.9\,\frac{\text{MeV}}{\text{c}}. \tag{30}$$

Izračunan impulz vstavimo v En. (11), kjer izračunamo, da znaša kinetični del Fermijeve energije elektronov $\varepsilon_f \approx 0.5$ MeV, kar terja relativistično obravnavo. Po drugi strani pa velja, da $kT \approx 1$ keV $\ll \varepsilon_f$, upravičujoč obravnavo Fermijevega plina kot hladnega. Razmislek pokaže, da lahko helijeva jedra obravnavamo v Boltzmannovi limiti, ie. klasični statistiki. Tlak idealnega plina helijevih jeder znaša:

$$\mathcal{P}_{\mathrm{He}} = n_{\mathrm{He}} kT \approx 1.5 \times 10^{-12}\ \frac{\mathrm{Mev}}{\mathrm{fm}^3}. \tag{31}$$

Če se poslužimo razvoja funkcije $\mathcal{A}$ za velike vrednosti argumenta En. (26a), izračunamo tlak elektronov:

$$\mathcal{P}_e = \frac{1}{24\pi^2}\frac{(mc^2)^4}{(\hbar c)^3}\underbrace{26.7}_{\approx \mathcal{A}(2)} \approx 10^{-9}\ \frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{fm}^3}, \tag{32}$$

ki je tisočkrat večji od pritiska helijevih jeder.

Tlak plina elektronov in nukleonov nasprotuje gravitacijskemu kolapsu. Če povečamo polmer zvezde za $\mathrm{d}R$, velja:

$$\mathrm{d}E_p = -\mathcal{P}\mathrm{d}V = -\mathcal{P}_e(R) 4\pi R^2 \mathrm{d}R. \tag{33}$$

Temu nasprotujoč prispevek je gravitacijski:

$$\mathrm{d}E_g = \frac{\mathrm{d}E_g(R)}{\mathrm{d}R}\mathrm{d}R = \alpha\frac{GM^2}{R^2}\mathrm{d}R. \tag{34}$$

Z α smo označili morebitne popravke vsled gostotnih nehomogenosti; v nadaljnji obravnavi bomo upoštevali, da velja $\alpha \sim 1$. V termodinamskem ravnovesju ima minimum prosta energija F. V obravnavi smo privzeli, da je plin hladen ie. $T = 0$, kar iz definicije proste energije poda: $F = E - TS = E$. Od tod:

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}E_g + \mathrm{d}E_p = \alpha\frac{GM^2}{R^2} - \mathcal{P}(R)4\pi R^2 = 0, \tag{35}$$

kar prepišemo v enačbo:

$$\mathcal{P} = \frac{\alpha}{4\pi}\frac{GM^2}{R^4}. \tag{36}$$

Če združimo povedano in vse izpeljane rezultate En. (23a) in En. (16), prevedemo problem na reševanje enačbe:

$$A\left(\left(\frac{9\pi M}{8m_n}\right)^{1/3}\frac{\hbar c}{m_e c^2}\frac{1}{R}\right) = 6\pi\alpha\left(\frac{\hbar c}{m_e c^2}\frac{1}{R}\right)^2\frac{1}{m_e c^2}\frac{GM^2}{R}. \tag{37}$$

Prav zanimivo je, da se v dobljeni enačbi pojavljajo določene "naravno dane" enote: Comptonova dolžina, mirovna masa elektrona ter masa nukleona. Žal enačba ni analitično rešljiva. Če se pa poslužimo razvoja v obeh limitinih primerih, lahko povemo nekaj o relaciji med maso ter polmerom pritlikavke. Ob podatkih, ki jih navajamo v začetku poglavja, izračunamo, da je argument funkcije $\mathcal{A}$ enak 1 v primeru $R \approx 5\times 10^6$ m. Od tod lahko sklepamo, da so polmeri pritlikavk za majhne argumente ie $y_f = p_f/mc \ll 1$, večji od $R \gg 10^6$m. Ustrezen razvoj poda naslednjo zvezo:

$$R \approx \frac{3(9\pi)^{2/3}}{40\alpha}\frac{\hbar^2}{Gm_n^{5/3}m_e}M^{-1/3}. \tag{38}$$

Opazimo, da se masa skalira sorazmerno s tretjim korenom mase, kar je enako kot v prmeru homogene krogle.

Popolnoma drugačen rezultat dobimo v primeru velikih vrednosti argumenta funkcije $\mathcal{A}(y) \approx 2y^4 - 2y^2$:

$$R \approx \frac{(9\pi)^{1/3}}{2}\frac{\hbar c}{m_e c^2}\left(\frac{M}{m_n}\right)^{1/3}\left(1 - \left(\frac{M}{M_0}\right)^{2/3}\right)^{1/2}, \tag{39}$$

kjer je

$$M_0 = \frac{9}{64}\left(\frac{3\pi}{\alpha^3}\right)^{1/2}\left(\frac{\hbar c}{Gm_n^2}\right)^{3/2}m_n. \tag{40}$$

Opazimo, da enačba nima rešitev za $M_0 < M$ – polmer zvezde se bliža 0, ko se masa zvezde bliža M_0. Kritično maso M_0 imenujemo *Chandrasekharjeva limita* in znaša $M_0 \approx 10^{30}$ kg. Od te vrednosti dalje Fermijev tlak ne izniči več gravitacijskega privlaka – zvezda se zruši v črno luknjo. V primeru majhnih zvezd, ie. v bližini M_0 moramo upoštevati prispevke iz splošne teorije relativnosti; polmer zvezde moramo primerjati s ti. *Schwarzschildovim polmerom* $R_S = 2GM/c^2$. Točnejši račun (po Chandrasekharju) da

$$M_0 = \frac{5.75}{\mu_e^2} M_\odot, \tag{41}$$

kjer μ_e^2 poda stopnjo ionizacije helijevih atomov, ie. število prostih elektronov na helijevo jedro – zgornja obravnava privzame $\mu_e \approx 2$, kar poda $M_0 \approx 1.44 M\odot$. Tak razmislek pove, da bo naše Sonce postalo bela pritikavka.

Literatura

[1] R. K. Pathria in Paul D. Beale (ur.), *Statistical Mechanics, 3rd edition* (Butterworth-Heinemann, Oxford, 2011).

[2] W. Greiner, L. Neise in H. Stöcker, *Thermodynamics and statistical mechanics* (Springer, New York 1997).