Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

OBLIKA DOMENSKE STENE V ISINGOVEM MODELU

Domača naloga pri predmetu Statistična fizika

Tjaša Parkelj

Ljubljana, november 2013

1. Naloga

Izračunaj obliko domenske stene v Isingovem modelu s pomočjo Landau-ove teorije.

2. Uvod

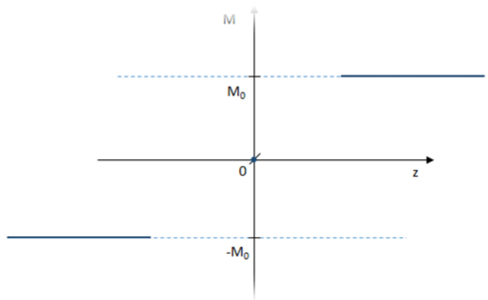
Landau-ova teorija je ekvivalentna teoriji povprečnega polja, a velja le v bližini kritične točke faznega prehoda.

Prednost te teorije je, da lahko prosto energijo v bližini faznega prehoda zapišemo kot vsoto potenc ureditvenega parametra, pri čemer so predfaktorji odvisni od zunanjih parametrov. Pri obravnavi magnetnega sistema, ima vlogo ureditvenega parametra magnetizacija.

$$G = a(T) + b(t)M^2 + c(t)M^4 + \ \dots \qquad (1.1)$$

Ta teorija je zelo primerna za obravnavo prehodov med dvemi območji v prostoru z različnima magnetizacijama. Takšnemu prehodu pravimo domenska stena.

V tej nalogi bomo obravnavali Isingov model v eni dimenziji. Zanima nas, kakšne oblike je domenska stena, oziroma kako se spreminja magnetizacija M v smeri z. Na eni strani sistema, ko gre $z \to -\infty$ imamo območje z magnetizacijo $-M_0$, na drugi strani, ko gre $z \to \infty$, pa območje z nasprotno enako magnetizacijo $+M_0$. Problem nastavimo tako, da magnetizacija spremeni predznak v točki z=0.



Slika 1: Zanima nas kako se spremenja magneizacija v smeri z.

3. Rešitev

Zapišemo Landau-ov funkcional za 1D v takšni obliki:

$$\mathcal{L} = \int \left(\frac{1}{2}\left(\frac{dM}{dz}\right)^2 + \frac{1}{2} r_0 M^2 + \frac{1}{4!}\, u_0 M^4\right) dx = \int \left(\frac{1}{2}\left(\frac{dM}{dz}\right)^2 + V(M)\right) dx \qquad (1.2)$$

Zanima nas kakšna je oblika domenske stene v ravnovesju, se pravi pri neki minimalni energiji, zato izraz minimaliziramo z Euler – Lagrange-evo enačbo,

$$\frac{\partial L}{\partial M} - \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial L}{\partial M\prime}\right) = 0 \qquad (1.3)$$

pri čemer je $L = \frac{1}{2}\left(\frac{dM}{dz}\right)^2 + V(M)$.

Dobimo diferencialno enačbo:

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = V'(M) \qquad (1.4)$$

Namesto reševanja diferencialne enačbe 2. reda, uberemo bolj fizikalni pristop in si pomagamo tako, da enačbo interpretiramo kot enačbo gibanja nekega fiktivnega delca, ki ima maso m=1 in se giblje v smeri x pod vplivom potenciala U(x).

Prvotnim spremenljivkam tako pripišemo nove spremenljivke:

$$M \rightarrow x$$

$$z \rightarrow t$$

$$V(M) \rightarrow -\,U(x)$$

Zapišemo gibalno enačbo za delec z m=1:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,U'(x) \tag{1.5}$$

Iz ohranitve energije sledi, da je kinetična energija delca enaka razliki potencialnih energij v končni točki x in začetni točki x_0:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\big(U(x) - U(x_0)\big) \tag{1.6}$$

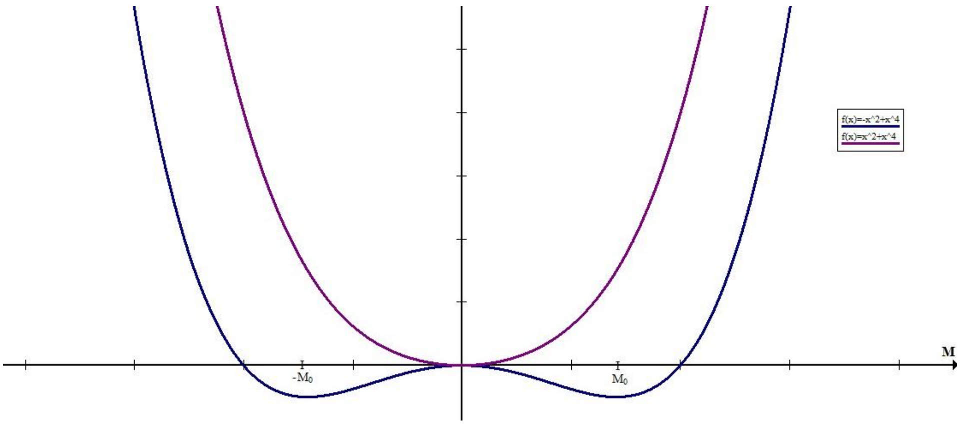
Če izraz prevedemo na prvotne spremenljivke dobimo enačbo:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dM}{dz}\right)^2 = \big(V(M) - V(M_0)\big) \tag{1.7}$$

Tako smo problem poenostavili na reševanje diferencialne enačbe 1. reda.

Spomnimo se kakšne oblike je $V(M)$:

$$V(M) = \frac{1}{2} r_0 M^2 + \frac{1}{4!}\, u_0 M^4 \tag{1.8}$$



Slika 2: Z vijolično je označena krivulja za r_0>0 , ki ustreza T>T_c, z modro pa krivulja za r_0<0, ki ustreza T>T_c.

Izračunamo odvod potenciala,

$$V'(M) = r_0 M + \frac{1}{6}\, u_0 M^3 \tag{1.9}$$

ki ima za $r_0 < 0$ en minimum pri magnetizaciji M_0, tako da iz $V'(M) = 0$ lahko določimo vrednost parametra u_0:

$$u_0 = -\frac{6r_0}{M_0^2} \tag{1.10}$$

Če vse to vstavimo v enačbo (1.7) dobimo:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dM}{dz}\right)^2 = \frac{1}{2}r_0 M^2 - \frac{1}{4}\, r_0 \frac{M^4}{M_0^2} - \frac{1}{4}\, r_0 M_0^2 \tag{1.11}$$

Preuredimo enačbo:

$$\left(\frac{dM}{dz}\right)^2 = -\frac{1}{2}r_0 M_0^2 \left(1 - 2\left(\frac{M}{M_0}\right)^2 + \left(\frac{M}{M_0}\right)^4\right) \tag{1.12}$$

Izraz delimo z M_0^2 in definiramo $f = \frac{M}{M_0}$:

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^2 = -\frac{1}{2}r_0(1 - 2f^2 + f^4) \tag{1.13}$$

Prepoznamo popolni kvadrat in definiramo korelacijsko dolžino $\xi = \left(\frac{|r_0|}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$:

$$\xi^2\left(\frac{df}{dz}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - f^2)^2 \tag{1.14}$$

Korenimo in ločimo spremenljivke:

$$\xi \int \frac{1}{1-f^2}\, df = \int dz \tag{1.15}$$

Integriramo:

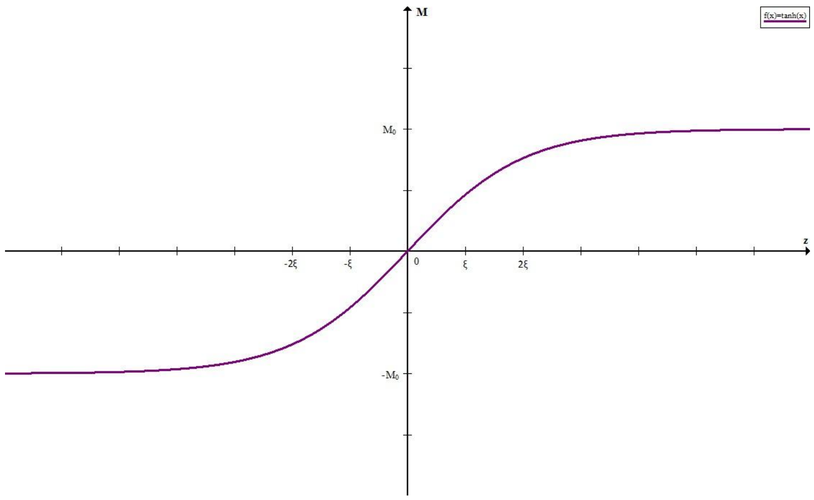
$$\xi\, arctgh(f) = z \tag{1.16}$$

Izrazimo $f(z)$:

$$f(z) = \tanh\left(\frac{z}{\xi}\right) \tag{1.17}$$

Spomnimo se, da je $f = \frac{M}{M_0}$ in zapišimo končno rešitev, obliko domenske stene:

$$M(z) = M_0 \tanh\left(\frac{z}{2\xi}\right) \tag{1.18}$$



Slika 3: Vidimo, da se magnetizacija postopoma spreminja od vrednosti -M_0 do M_0.

4. Literatura:

[1] M. Le Bellac et. al., *Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Thermodynamics,* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004)