Univerza v Ljubljani
Fakulteta za Matematiko in Fiziko
Oddelek za Fiziko

DINAMIČNA ANALIZA:
Uvod v teorijo determinističnega kaosa

Tomaž Prosen

Povzetek

Predstavili bomo osnove teorije dinamičnih sistemov. Zanimal nas bo globalen opis časovnega razvoja preprostih a neintegrabilnih (analitično nerešljivih) dinamičnih sistemov, ki jih matematično podajajo navadne diferencialne oziroma diferenčne enačbe. Bolj kot na splošne disipativne sisteme se bomo omejili na konzervativne oziroma Hamiltonske sisteme. Definirali in uporabili na preprostih zgledih bomo pojme kot so: Poincaréjeva sečna ploskev, eksponenti Liapunova, fraktalne dimenzije, periodične orbite, bifurkacije, informacijska entropija, algoritmična kompleksnost, entropija Kolmogorova, simbolična dinamika, Smale-ova podkev.

1 Uvod

Namen predmeta je predstaviti osnove teorije dinamičnih sistemov, oziroma ergodične teorije [1, 2, 3]. To je veja moderne matematike s široko interdisciplinarno uporabo ne le v fiziki, ampak tudi širše v naravoslovju in tehniki in celo v družboslovnih vedah, kot so sociologija in ekonomija.

Skratka, spoznanja iz teorije dinamičnih sistemov nam lahko pridejo prav, kadar želimo razumeti časovni razvoj kakega sistema, ki je zadosti kompleksen, da analitična rešitev ne obstaja, in zadosti 'preprost', da ga zadovoljivo opiše kak matematičen model z diferencialnimi ali diferenčnimi enačbami.

Seveda bo naš poudarek predvsem na preprostih zgledih iz fizike.

Predvsem se bomo ukvarjali z obravnavanjem dinamike konservativnih oziroma Hamiltonskih sistemov, oziroma z bolj abstraktnimi, eno in dvodimenzionalnimi preslikavami. Ob tem bomo poizkusili kvalitativno klasificirati različne tipe načinov gibanja in definirati razne količine za njihov kvantitativni opis, npr. dinamične entropije, eksponente liapunova, fraktalne dimenzije ipd.

Zavedati se je treba, da bodo naše enačbe gibanja vedno deterministične (brez stohastičnih, verjetnostnih elementov), pa vendar bomo njihove rešitve pogosto poizkušali razumeti statistično, npr. kot približevanje termodinamskemu ravnovesnemu stanju, ali morda kot difuzijo v faznem prostoru. Globji namen je ambiciozen: razumeti ireverzibilne makroskopske zakone statistične fizike iz mikroskopskih determinističnih in reverzibilnih enačb gibanja. Presenečenje, ki ga teorija determinističnega kaosa vnaša v fiziko je, da je omenjena zveza med statistično fiziko in determinističnimi reverzibilnimi zakoni gibanja mogoča že v sistemih s kvečjemu nekaj (celo samo z dvema) prostostnimi stopnjami, in ne le v termodinamični limit kot nas morda uči klasična statistična fizika.

Ker so že rešitve preprostih neintegrabilnih sistemov lahko zelo zapletene in raznolike, je toliko trši oreh razumenti dinamiko kompleksnih nelinearnih problemov z mnogo prostostnimi stopnjami ali celo problemov iz teorije polja. Izkušnje iz determinističnega kaosa nas učujo, da je zgolj študij strukture in simetrij Lagrangeove oz. Hamiltonove funkcije oziroma lineariziranih rešitev pri nizkih energijah (ki jim pravimo 'osnovni delci') povsem nezadostna za globalno — celostno razumevanje dinamike.

2 Shematična klasifikacija s primeri

Dinamični sistem definiramo matematično korektno kot trojico $(\mathcal{M}, \boldsymbol{\phi}_t, \mu)$, kjer so:

- $\mathcal{M}$ je množica vseh možnih *stanj* dinamičnega sistema in ji rečemo *fazni prostor*.
- $\boldsymbol{\phi}_t$ je eno-parametrična (t) družina preslikav

  $$\boldsymbol{\phi}_t : \mathcal{M} \to \mathcal{M},$$

  kjer je časovni parameter t bodisi *zvezen* ($t \in R$), bodisi *diskreten* ($t \in \mathbb{Z}$), in velja lastnost kompozicije

  $$\boldsymbol{\phi}_t \circ \boldsymbol{\phi}_{t'} = \boldsymbol{\phi}_{t+t'}. \tag{1}$$

- μ je mera na faznem prostoru $\mathcal{M}$, kar pomeni, da je število $\mu(\mathcal{A})$ definirano za vsako (merljivo) podmnožico faznega prostora $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ in je nenegativno, $\mu(\mathcal{A}) \geq 0$, ter velja

  $$\mu(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \mu(\mathcal{A}) + \mu(\mathcal{B}) - \mu(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}).$$

Meri μ pravimo, da je *invariantna* na preslikavo, tedaj ko velja za vsako merljivo podmnožico $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ in za vsak $t \geq 0$,

$$\mu(\mathcal{A}) = \mu(\boldsymbol{\phi}_t^{-1}(\mathcal{A}))$$

kjer simbol $\boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathcal{A})$ ne pomeni, da mora biti preslikava obrnljiva, ampak zgolj označuje podmnožico točk v faznem prostoru, ki se po času $t > 0$ nahaja v množici $\mathcal{A}$,

$$\boldsymbol{\phi}_t^{-1}(\mathcal{A}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}; \boldsymbol{\phi}_t(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{A}\}.$$

Ponavadi, ne pa vedno, bomo zahtevali da bo mera μ invariantna na preslikavo $\boldsymbol{\phi}_t$.

Vzemimo neko točko $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{M}$ iz faznega prostora. Funkciji

$$t \to \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}_t(\boldsymbol{x}_0)$$

pravimo *orbita* dinamičnega sistema z *začetnim pogojem* $\boldsymbol{x}_0$.

2.1 Zvezni in diskretni dinamični sistemi

Glede na zveznost časovnega parametra t ločimo med diskretnimi ($t \in \mathbb{Z}$) in zveznimi ($t \in R$) dinamičnimi sistemi.

Če je dinamični sistem diskreten, potem iz lastnosti (1) sledi, da lahko preslikavo za t časovnih korakov zapišemo kot $t-$kratni kompozitum preslikave za en časovni korak

$$\boldsymbol{\phi}_t(\boldsymbol{x}) = \underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\ldots \boldsymbol{f}}_{t}(\boldsymbol{x})\ldots)) = \boldsymbol{f}^{(t)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{f} := \boldsymbol{\phi}_1.$$

Računanje orbite $\boldsymbol{x}_t, t = 0, 1, 2, \ldots$ z znanim začetnim pogojem $\boldsymbol{x}_0$ se torej v splošnem prevede na reševanje vektorske (v splošnem nelineare) diferenčne enačbe prvega reda

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_t).$$

Primeri:

- Zasuk na krogu $x \in \mathcal{M} = [0, 2\pi)$ za kot α,

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \alpha \pmod{2\pi}, \\ \phi_t(x) &= x + t\alpha \pmod{2\pi}, \\ x_{t+1} &= x_t + \alpha \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

- Žagasta preslikava na enotskem intervalu $\mathcal{M} = [0, 1)$ (binarni pomik za eno mesto)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x \pmod{1}, \\ \phi_t(x) &= (2^t x) \pmod{1}, \\ x_{t+1} &= 2x_t \pmod{1}. \end{aligned}$$

- Linearni avtomorfizem na torusu $(x, y) \in \mathcal{M} = [0, 1) \times [0, 1)$, preslikava Arnoldove mačke,

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} \pmod{1}.$$

- Bolj splošen a abstrakten primer: naj bo $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \in \mathcal{M} \subseteq R^{2N}$ in $\boldsymbol{f}$ neka izbrana *kanonična preslikava.*

  Ponovimo: preslikava
  $$(\boldsymbol{q}', \boldsymbol{p}') = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$$
  je kanonična, kadar ohranja Poissonov oklepaj $\{.\}_{\mathrm{PB}}$, t.j. kadar
  $$\{q'_m, p'_n\}_{\mathrm{PB}} := \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial q'_m}{\partial q_j} \frac{\partial p'_n}{\partial p_j} - \frac{\partial p'_m}{\partial q_j} \frac{\partial q'_n}{\partial p_j} \right) = \delta_{mn}.$$

  Zgornjo lastnost pa lahko zapišemo kot pogoj na Jakobijevo matriko odvodov preslikave $\boldsymbol{f}$, ki jo zapišemo v bločni obliki s štirimi podmatrikami $N \times N$,
  $$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q'_n}{\partial q_m}, & \frac{\partial q'_n}{\partial p_m} \\ \frac{\partial p'_n}{\partial q_m}, & \frac{\partial p'_n}{\partial p_m} \end{pmatrix},$$
  namreč
  $$\boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{F} = \boldsymbol{J} \tag{2}$$
  kjer je bločna matrika $\boldsymbol{J}$
  $$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$
  in je $\mathbf{1}$, oziroma $\mathbf{0}$, kar $N \times N$ identična, oziroma ničelna, matrika.

  Vsaki $2N \times 2N$ matriki $\boldsymbol{F}$, ki ima lastnost (2) pravimo, da je *simplektična.*

  Kanonične preslikave nad nad faznim prostorom $\mathcal{M}$ sestavljajo *grupo*, zato so tudi vsi kompozitumi $\boldsymbol{f}^{(t)}$ kanonične preslikave.

  Linearne kanonične preslikave sestavljajo podgrupo kanoničnih preslikav, ki je izomorfna grupi simplektičnih matrik $Sp(2N)$, t.j. vseh matrik $\boldsymbol{F}$, $2N \times 2N$, ki zadoščajo pogoju (2).

  vaja: Dokaži, da je $Sp(2N)$ grupa.

'Diskretni Liouvilov izrek': Kanonična preslikava $\boldsymbol{f}$ (splošna ali linearna) ohranja volumen v $\mathcal{M}$.

vaja: Dokaži gornjo trditev.

Na drugi strani pa za zvezne dinamične sisteme velja, da iskanje orbite $\boldsymbol{x}(t)$ z začetnim pogojem $\boldsymbol{x}(0)$ lahko prevedemo na reševanje vektorske diferencialne enačbe prvega reda, oziroma sistema diferencialnih enačb. Zapišimo vektorsko funkcijo $\boldsymbol{\phi}_{dt}(\boldsymbol{x})$ za diferencialno majhen časovni korak in upoštevajmo, da je $\boldsymbol{\phi}_0$ identiteta $\boldsymbol{\phi}_0(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

$$\boldsymbol{x}(t+dt) - \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}_{dt}(\boldsymbol{x}(t)) - \boldsymbol{\phi}_0(\boldsymbol{x}(t)),$$

oziroma

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t)), \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) := \frac{d\boldsymbol{\phi}_t}{dt}|_{t=0}. \tag{3}$$

V fiziki je ponavadi pot ravno obratna. Diferencialne enačbe (3) so znane, npr. Hamiltonove enačbe ali Newtonov zakon, medtem ko je preslikavo $\boldsymbol{\phi}_t(\boldsymbol{x})$ treba še konstruirati z numeričnim reševanjem diferencialnih enačb.

Matematično pa je seveda poznavanje funkcij $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ oziroma $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ zadošča, v diskretnem oziroma zveznem primeru, povsem identično poznavanju celotne družune preslikav $\boldsymbol{\phi}_t$. Matematik bi dejal, da je diferencialna enačba (3) oziroma vektorsko polje $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ *generator polgrupe* $\boldsymbol{\phi}_t$, (1).

Zvezno dinamiko (3) si lahko ponazorimo tudi s stacionarnim tokom tekočine. V tem primeru moramo $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ razumeti kot hitrostno vektorsko polje, orbite pa ustrezajo posameznim tokovnicam.

Primeri:

- Matematično nihalo, $\vec{x} = (\varphi, \Gamma) \in \mathcal{M} = [0, 2\pi) \times R$. Hamiltonova funkcija
$$H = \frac{1}{2ml^2}\Gamma^2 + mgl\sin\varphi,$$
hamiltonove enačbe se zapišejo kot
$$\frac{d}{dt}(\varphi, \Gamma) = \boldsymbol{g}(\varphi, \Gamma)$$
kjer je hitrostno polje $\boldsymbol{g}(\varphi, \Gamma) = ((1/ml^2)\Gamma, -mgl\cos\varphi)$. Že v tako preprostem primeru pa hamiltonovih enačb gibanja ne znamo eksplicitno rešiti, pa vednar nam pogled na fazni diagram pove vse o naravi

gibanja. Orbite namreč ležijo na krivuljah $H(\varphi, \Gamma) = E =$ konst, saj je energija E konstanta gibanja. Posebej pomemba je t.i. separatrisa, t.j. orbita, ki gre skozi labilno ravnovesno točko ($\varphi = \pi/2, \Gamma = 0$) in ločuje dve kvalitativno različni obliki givanja: omejeno gibanje oz. nihanje (*libracijo*) in kroženje (*rotacijo*).

- Splošne hamiltonove enačbe nad faznim prostorom $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \in \mathcal{M} = R^{2N}$, ki jih generira hamiltonova funkcija $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{J} \begin{pmatrix} \partial H/\partial \boldsymbol{q} \\ \partial H/\partial \boldsymbol{p} \end{pmatrix} = \{\boldsymbol{x}, H\}_{\mathrm{PB}}$$

  Liouvillov izrek: hamiltonski tok $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{x}, H\}_{\mathrm{PB}}$ je nestisljiv, t.j. $\mathrm{div} g(\boldsymbol{x}) = 0$.

Včasih pa nam fizikalni zakoni narekujejo diferencialne enačbe, ki niso avtonomne ampak vsebujejo eksplicitno odvisnost od časa

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = \tilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x}(t), t). \tag{4}$$

Tudi tedaj lahko shajamo z gornjim (avtonomno) obliko (3), če vpeljemo *razširjen fazni prostor* $\tilde{\mathcal{M}}$ z novo koordinato $y \in R$, kjer ima splošno stanje obliko $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}, y) \in \tilde{\mathcal{M}}$, in novo vektorsko polje $\boldsymbol{g}(\tilde{\boldsymbol{x}}) := (\tilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x}, y), 1)$. Z enostavnejšimi besedami: časovno odvisen sistem (4) prepišemo kot

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\boldsymbol{x} &= g(\boldsymbol{x}, y), \\ \frac{d}{dt}y &= 1, \end{aligned}$$

ki je formalno avtonomne oblike (3), v resnici pa nismo napravili nič drugega, kot to da smo čas proglasili za dodatno koordinato faznega prostora y. Vseeno nam omenjeni trik pomaga, da nam časovno odvisnih sistemov ni treba obravnavati posebej.

2.2 Prevedba zvezne dinamike na diskretno

2.2.1 stroboskopska preslikava

Dinamični sistem v zveznem času lahko splošno prevedemo na diskretni dinamični sistem (preslikavo) nad faznim prostorom, ki ima eno dimenzijo manj kot originalnen zvezen sistem. Temu postopku pravimo Poincaréjeva redukcija, tako dobljeni preslikavi pa Poincaréjeva preslikava.

Postopek pa je še posebej preprost, kadar je zvezen dinamičen sistem eksplicitno a periodično odvisen od časa s periodo T,

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = \tilde{\boldsymbol{g}}_T(\boldsymbol{x}(t), t), \quad \tilde{\boldsymbol{g}}_T(\boldsymbol{x}, t+T) \equiv \tilde{\boldsymbol{g}}_T(\boldsymbol{x}, t).$$

Tedaj lahko diferencialne enačbe (4) integriramo preko ene periode T s splošnim začetnim pogojem $\boldsymbol{x}(0)$ in tako definiramo diskreten dinamični sistem s *stroboskopsko* preslikavo

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(0)) := \boldsymbol{x}(T).$$

Primeri:

- Izpeljava *standardne preslikave* (preslikave Chirikova) iz periodično suvanega rotatorja. Najprej definirajmo periodično suvani rotator (angl. kicked rotator). Kot fizikalni zgled vzemimo npr. dvoatomno molekulo z vztrajnostnim momentom J in električnim dipolnim momentom p_e, ki jo položimo v pulzirajoče homogeno električno polje $E(t) = \boldsymbol{E}_o \tau \delta_\tau(t)$, kjer je $\delta_\tau(t)$ periodična delta funkcija

  $$\delta_\tau(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau).$$

  Navor, s katerim deluje polje na molekulo je $\boldsymbol{M}(t) = p_e \boldsymbol{n}(t) \times \boldsymbol{E}(t)$, kjer je $\boldsymbol{n}(t)$ smerni vektor molekule. Prave enačbe gibanja (prosto vrtenje rotatorja med pulzi in ustrezni sunek navora ob pulzu) dobimo iz hamiltonke

  $$H(t) = \frac{\Gamma^2}{2J} + p_e \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E}(t) = \frac{\Gamma^2}{2J} - p_e E_o \tau \cos\varphi \delta_\tau(t)$$

  Med pulzi, je prosto vrtenje $(d/dt)\Gamma = 0, \Gamma = \text{konst}$ in $(d/dt)\varphi = \Gamma/J$, medtem ko se ob pulzih vrtilna količina spremeni za sunek navora,

  $$\Gamma(+0) = \Gamma(-0) - \int_{-0}^{+0} dt \partial H/\partial\varphi = \Gamma + p_e E_o \tau \sin\varphi(0).$$

Naj zapišemo stroboskopsko preslikavo v časovnih intervalih $T = \tau$, kjer dinamične spremenljivke 'posnamemo' tik pred trkom, $\Gamma_n = \Gamma(n\tau - 0), \varphi_n = \varphi(n\tau - 0,$

$$\begin{aligned} \Gamma_{n+1} &= \Gamma_n + p_e E_o \tau \sin\varphi_n \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + (\tau/J)\Gamma_{n+1} \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

Vpeljimo brezdimenzijski impulz $p_n = (\tau/J)\Gamma$ in parameter

$$k = \frac{p_e E_o \tau^2}{J}.$$

Potem se zapisana preslikava v brezdimenzijski obliki glasi

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + k\sin\varphi_n, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + p_{n+1} \pmod{2\pi}. \end{aligned} \tag{5}$$

To je slavna *standardna preslikava* oziroma preslikava Chirikova. Ker jo bomo še srečevali, jo sedaj le na kratko komentirajmo. Fazni prostor je neskončni cilinder, $\mathcal{M} = [0, 2\pi) \times R$. V odvisnosti od parametra k dobimo lahko zelo raznolike oblike gibanja. Zanimivo vprašanje je: ali energija rotatorja $\propto p_n^2$ ostane v času omejena, ali se morda lahko neomejeno povečuje in kako?

- Stroboskopska preslikava splošnih hamiltonovih enačb je kanonična preslikava, ki jo generira generacijska funkcija — klasična akcija $S(\boldsymbol{q}', \boldsymbol{q}; T) = \int_0^T dt L(\boldsymbol{q}(t), (d/dt)\boldsymbol{q}(t))$.

2.2.2 Poincaréjeva preslikava

Naj bo $\mathcal{M}' = \{\boldsymbol{x}; y(\boldsymbol{x}) = 0\}$ neka (hiper)ploskev v faznem prostoru $\mathcal{M}$ z lastnostjo: če orbita seka $\mathcal{S}$ enkrat, potem jo seka še enkrat in zato neskončnokrat. Tedaj lahko hiperploskev $\mathcal{M}'$ proglasimo za nov fazni prostor, recimo mu *sečna ploskev*, nad katerim deluje preslikava $\boldsymbol{f}$, ki preslika eno poljubno presečišče $\boldsymbol{x}_0$ orbite z $\mathcal{M}'$ v naslednje presečišče $\boldsymbol{x}_1$ te iste orbite z $\mathcal{M}'$. Preslikavi $f\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) := \boldsymbol{x}_1$ rečemo Poincaréjeva preslikava.

Poincaréjeva konstrukcija nam pomaga pri analizi pa tudi vizualizaciji faznega toka v npr $N-$dimenzionalnem faznem prostoru, ki ga nadomesti z diskretno preslikavo nad $(N-1)$dimenzionalnim faznim prostorom.

Ponavadi proglasimo y za eno od koordinat, in zapišemo splošne koordinate $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}', y)$, kjer koordinate $\boldsymbol{x}'$ parametrizirajo sečno ploskev $\mathcal{M}'$. Poincaréjeva preslikava je posebej uporabna pri obravnavi (vezanih) avtonomnoh Hamiltonskih sistemov. Naj ima fazni prostor dimenzijo $2N$ (N prostosnih stopenj) in naj ima hamiltonka obliko

$$H = \sum_{n=1}^{N} \frac{p_n^2}{2m_n} + V(\boldsymbol{q}).$$

Opozorimo naj, da je energija $E = H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ vedno konstanta gibanja, zato lahko predpišemo vrednost energije E kot zunanji parameter in opazujemo gibanje zgolj na $(2N-1)$-dimenzionalni energijski ploskvi. Zatem vpeljimo sečno ploskev, npr z izbiro, $q_N = 0$, $p_N \geq 0$. Drugi pogoj je pomemben, saj sicer točka na sečni ploskvi ne bi bila enolično določena z ($2N-2$ koordinatami $(q_1, p_1, \ldots, q_{N-1}, p_{N-1})$. Tako pa je, in lahko neznani impulz izrazimo preko hamiltonke in energije E,

$$\mathcal{M}' = \left\{ \boldsymbol{x}; q_N = 0, p_N = +\sqrt{2m_N(E - \sum_{n=1}^{N-1} p_n^2/(2m_n) - V(q_1, \ldots, q_{N-1}, 0))} \right\}.$$

Zelo pomemben je sledeč izrek, ki pa ga ne bomo dokazovali: Na zgoraj opisani način konstruirana Poincaréjeva preslikava hamiltonskega sistema je vedno *kanonična*.

Primer:

- Odskakovanje prožne kroglice od periodično grbinaste podlage. Hamiltonka za opisan problem z dvema prostostnima stopnjama (x horizontalna koordinata, y vertikalna koordinata) se glasi

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + mgy + V(y - y_s(x)),$$

  kjer je $V(y) = \{0, y \geq 0; \infty, y < 0\}$ in $y_s(x)$ profil periodično nagubane podlage

$$y_s(x) = A\cos(2\pi x/a)$$

Napravimo predpostavko, da je strmina podlage vedno zanemarljivo majhna $|dy_s/dx| = (A/a)|\sin(2\pi x/a)| \ll 1$ oziroma računajmo v približku osnovnega reda v A/a. [1]

Točke na sečni ploskvi $y = y_s(x)$ opišemo z vzdolžno koordinato n-tega trka x_n in z ustreznim impulzom — projekcijo gibalne količine tik pred trkom

$$p_{xn} = \sqrt{2mE}\cos\varphi_n.$$

kjer je φ_n odbojni kot proti navpičnici vektorja hitrosti pred $n-$tem trku s podlago. Zapišimo preslikavo $(x_n, \varphi_n) \to (x_{n+1}, \varphi_{n+1})$: Preprosta geometrija (skica) in odbojni zakon povesta, kako se spremeni naklonski kot ob trku

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - 2dy_s(x_n)/dx + \mathcal{O}((\epsilon/a)^2),$$

koordinata trka pa se spremeni za 'znan izraz' dometa poševnega meta,

$$x_{n+1} = x_n + \frac{2E}{mg}\sin 2\varphi_{n+1}.$$

Vpeljimo brezdimenzijske spremenljivke

$$\begin{aligned} \xi_n &= \frac{2\pi}{a}x_n \\ \vartheta_n &= 2\beta\varphi_n \end{aligned}$$

kjer je

$$\beta = \frac{4\pi E}{mga}$$

pa se Poincaréjeva preslikava zapiše kot

$$\begin{aligned} \vartheta_{n+1} &= \vartheta_n + \epsilon\beta\sin(\xi_{n+1}) \\ \xi_{n+1} &= \xi_n + \beta\sin(\vartheta_{n+1}/\beta) \end{aligned} \tag{6}$$

kjer je

$$\epsilon = \frac{8\pi A}{a}$$

[1] Za vajo naj študent napravi računalniški program, ki bo simuliral Poincaréjevo preslikavo ekzaktno.

majhen parameter. Zanimiv je režim, kadar je možno preskakovanje čez mnogo period, $E \gg mga$. Tedaj je β velik in ker je ϵ po dogovoru majhen, $\epsilon \ll 1$, je produkt $k = \epsilon\beta$ vendarle lahko reda 1. Preslikava se tedaj zreducira na standardno preslikavo na območju $|\vartheta_n| \ll \beta$, oziroma je vedno lokalno *podobna* standardni preslikavi. Vendar pozor: fazni prostor je definiran drugače kot pri standardni preslikavi: koordinatna spremenljivka ξ_n ni definirana na krogu mod 2π ampak na celotni realni osi, medtem ko ima impulzna spremenljivka ϑ_n končen obseg. Fazni prostor je sedaj širok neskončni cilinder $(\vartheta, \xi) \in \mathcal{M} = [-\beta\pi, \beta\pi) \times R$. Zanimivo vprašanje je sedaj: kako se giblje kroglica vzdolž podlage po dolgem času (ves čas v eno smer, ali morda 'psevdo-naključno' tava sem in tja)?

vaja: Pokaži, da je preslikava (6) kanonična.

2.3 Konzervativni (hamiltonski) in disipativni dinamični sistemi

Poleg hamiltonskih (kozervativnih sistemov), ki se odlikujejo s simplektično strukturo in ohranjanjem volumna faznega prosora (Liouvillov izrek), se v fiziki često srečamo s sistemi kjer je posredi dušenje. Takšni, *disipativni dinamični sistemi* so definirani s pogojem, da se fazni prostor krči:

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) < 0.$$

Oziroma v jeziku disretnih preslikav: pravimo, da je preslikava $\boldsymbol{f}$ disipativna, kadar je determinanta Jacobijeve matrike povsod manjša od 1,

$$\det \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} < 1.$$

Primeri:

- Dušeno matematično nihalo.

$$\begin{aligned} (d/dt)\varphi &= \frac{1}{ml^2}\Gamma \\ (d/dt)\Gamma &= -\beta\Gamma - mgl\cos\varphi \end{aligned}$$

- Dušen periodično suvan rotator (Preslikava Zaslavskega). V brezdimenzijski obliki se preslikava, ki je disipativna posplošitev standardne preslikave, glasi

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= (1-\beta)p_n + k\sin\varphi_n, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + p_{n+1} \pmod{2\pi}. \end{aligned} \tag{7}$$

  kjer je $\beta \in [0,1)$ parameter dušenja.

2.4 Vezani in sipalni dinamični sistemi

V grobem definiramo vezane sisteme, kot tiste ki imajo končen (merljiv) fazni prostor, in nevezane (sipalne) sisteme, ki imajo neskončen fazni prostor.

2.5 Klasični in kvantni dinamični sistemi

Večinoma se bomo ukvarjali s klasičnimi dinamičnimi sistemi, ki izhajajo iz klasičnih enačb gibanja. Vendar pa je matematični formalizem, ki ga predstavljamo, ravno tako uporaben za analizo kvantnih dinamičnih sistemov, kjer je fazni prostor $\mathcal{M}$ kar Hilbertov prostor vseh možnih kvantnih stanj $|\psi\}$, fazni tok pa podaja Schrödingerjeva enačba

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\} = -\frac{i}{\hbar}\check{H}|\psi(t)\}.$$

Pozor: Schrödingerjeva enačba opisuje časovni razvoj neke posebne (amplitudne) porazdelitve — valovne funkcije $\psi(\boldsymbol{x})$, in je vedno linearna, ravno tako kot klasična Liouvillova enačba

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \check{L}\rho(t), \quad \check{L}f := \{f, H\}_{\mathrm{PB}}$$

ki opisuje razvoj porazdelitev v klasičnem faznem prostoru. Medtem ko so enačbe, ki opisujejo časovni razvoj posameznih orbit v klasični mehaniki (Hamiltonove enačbe) v splošnem *nelinearne*, pa kvantna analogija le-teh ne obstaja, vsaj ne v smislu deterministične gibalne enačbe.

3 Kvantitativna karakterizacija dinamičnih sistemov

Na tem mestu bomo definirali in predsavili nekaj matematičnih konceptov in metod, s katerimi bomo kasneje kvantitativno opisovali dinamične sisteme.

3.1 Cantorjeve množice in fraktali

Definicija: Cantorjeva množica $\mathcal{C}$ je zaprta množica, ki ima lastost, da so vse njene točke na robu množice, torej da vsaka okolica poljubne točke $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}$ vsebuje tako točke, ki so v $\mathcal{C}$ kot tudi točke, ki niso v $\mathcal{C}$

Cantorjeva množica je enaka svojemu robu, $\mathcal{C} = \partial\mathcal{C}$.

Zanimivi primeri Canorjevih množic imajo neštevno neskončno točk, in jih lahko bijektivno preslikamo na kompaktne množice, kot so intervali ali kocke.

Primer:

- Konstruirajmo znano Cantorjevo množico, ki jo dobimo z zaporednimi transformacijami intervalov, tako da jim odrežemo srednjo tretjino. Začnemo z enotskim intervalom $\mathcal{C}_0 = [0, 1]$. Po eni iteraciji imamo $\mathcal{C}_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, po dve iteracijah pa $\mathcal{C}_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$, in tako dalje. Kar preostane po neskončnem številu iteracij $\mathcal{C}_\infty$ je Cantorjeva množico.

  vaja: Pokažimo, da ima gornja množica Lebesguovo mero (skupno dolžino) enako nič.
  Na vsakem koraku vzamemo ven srednjo tretjino vsakega intervala. Če je $\mu(\mathcal{A})$ Lebesguova mera, t.j. skupna dolžina množice $\mathcal{A}$, potem velja
  $$\mu(\mathcal{C}_{n+1}) = \frac{2}{3}\mu(\mathcal{C}).$$
  Torej,
  $$\mu(\mathcal{C}_\infty) = \lim_{n\to\infty}(2/3)^n = 0.$$
  Cantorjeve množice so matematična podlaga za opis sebi-podobnih struktur, ki jim pravimo *fraktali*. Torej: fraktal je množica, katere

sestavni deli so njej sami enaki ali podobni, ko jih povečamo ali kako drugače skaliramo.

vaja: Pokažimo, da ima gornja množica enako število točk (je izomorfna) enotskemu intervalu. Namig: Zapiši točko iz Cantorjeve množice v trojiškem sistemu, z zaporedjem cifer $0, 1, 2$. Ugotoviš, da je Cantorjeva množica karakterizirana z izostankom cifre 1. Zdaj napraviš bijektivno preslikavo cifer, $0 \to 0$, $2 \to 1$, oziroma,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n 3^{-n} \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (c_n/2) 2^{-n},$$

ki Cantorjevo množico C_∞ bijektivno preslika na $[0, 1)$.

Za konec razdelka konstruirajmo dinamični sistem, preslikavo, ki živi na fraktalni množici. Vzemimo preslikavo $f : R \to R$,

$$f(x) = \begin{cases} 2\eta x, & x < 1/2; \\ 2\eta(x-1)+1, & x > 1/2. \end{cases}$$

Za $\eta = 1$ je to običajna žagasta preslikava, ki je zaprta nad kompaktnim intervalom $\mathcal{M} = [0, 1]$. Za $\eta > 1$, vzemimo npr. $\eta = 3/2$ pa je preslikava smiselno definirana le na celi realni osi R in nam ponazarja neke vrste sipalni sistem. Poizskusimo začetne pogoje omejiti na enotski interval $\mathcal{M} = [0, 1]$. Ugotovimo, da po eni iteraciji preslikava izvrže vse točke na srednji tretjini $[1/3, 2/3]$. Po dveh iteracijah, preslikava izvrže vse točke, ki so bile na srednjih tretjinah preostalih intervalov, t.j. [1/9,2/9] in [7/9,8/9]. Hitro ugotovimo, da po n iteracijah preslikave ostanejo v faznem prostoru le še točke, ki so bile v začetku na množici $\mathcal{C}_n$,

$$f^{-n}([0, 1]) = \mathcal{C}_n.$$

Nadalje ugotovimo, da je preslikava f smiselno definirana kot dinamični sistem nad faznim prostorom, ki je Canotorjeva mnov zica $\mathcal{C}_\infty$, za te točke namreč velja

$$f(\mathcal{C}_\infty) = \mathcal{C}_\infty.$$

Točke v tem fraktalnem faznem prostoru $\mathcal{C}_\infty$ lahko parametriziramo s trojiškimi ciframi 0 in 2, preslikava f pa deluje nad zaporedjem cifer kot premik za eno mesto v levo. Pravimo, da je dinamični sistem $(\mathcal{C}_\infty, f|_{\eta=3/2})$ *izomorfen* običajni žagasti preslikavi $([0,1], f|_{\eta=1})$. Povrnimo se nazaj k preslikavi nad celotnim intervalom $[0,1]$. Vzemimo naključno točko $x \in [0,1]$. Verjetnost, da točka x 'preživi' po n korakih preslikave (se ne izvrže iz intervala [0,1]) je kar $P(n) = \mu(\mathcal{C}_n)$ in torej pojema eksponentno

$$P(n) = \exp(-\log(3/2)n).$$

Cantorjevi množici $\mathcal{C}_\infty$ pravimo *odbijač* (angl. repeller) t.j. množica ki v sistemu zdrži neskončno dolgo. Vsaka točka, ki ni na odbijaču, bo prej ko slej zbežala iz sistema, oziroma 'se sipala' iz sistema v fizikalnem žargonu.

3.2 Fraktalna dimenzija

Fraktalne množice, npr. v ravnini, imajo tipično površino enako nič, medtem ko gre dolžina roba čez vse meje: tem daljša je čim krajše merilo uporabljamo. Primer: Analogija Cantorjeve množice iz prejšnjega razdelka v ravnini. Vzemimo kvadrat, ga razdelimo na devet enakih delov in izvržimo srednjega. Postopek ponavljamo na vsakem od osmih preostalih delov.

Takšna množica je več kot krivulja in manj kot ploskev in jo lahko karakteriziramo z necelo (fraktalno) dimenzijo d, ki je med 1 in 2. Postopek za izračun fraktalne dimenzije je sledeč:
Območje, na katerem je izbrana množica $\mathcal{A}$ pokrijemo s kvadratki s stranico ϵ (v eni dimenziji so to intervali, v treh dimenzijah kockice itn.). Zdaj štejemo koliko kvadratkov, $N_\epsilon(\mathcal{A})$ potrebujemo za pokritje celotne množice, in zasledujemo kako se N_ϵ spreminja, ko zmanjšujemo drobljeneje ϵ. Če bi bila množica dvodimenzionalna, bi opazili $N_\epsilon \propto \epsilon^{-2}$, če bi bila enodimenzionalna krivulja $N_\epsilon \propto \epsilon^{-1}$, za fraktalno množico pa dobimo necel eksponent $N_\epsilon \propto \epsilon^{-d}$, ki ga torej definiramo kot

$$d(\mathcal{A}) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\log N_\epsilon(\mathcal{A})}{\log(1/\epsilon)}.$$

Primer:

- Izračunajmo fraktalno dimenzijo zgoraj opisane Cantorjeve množice. Naj bo $\epsilon = 3^{-n}$. Potem je
$$N_\epsilon = 8^n,$$

torej
$$d = \frac{\log 8^n}{\log 3^n} = \frac{\log 8}{\log 3} = 1.89279\ldots$$
Za enodimenzionalno Cantorjevo množico pa spet vzamemo, $\epsilon = 3^{-n}$ in imamo $N_\epsilon = 2^n$, tako $d = \log 2/\log 3 = 0.63093\ldots$

Obstajajo pa tudi Cantorjeve oziroma fraktalne množice, ki imajo celo fraktalno dimenzijo - enako dimenziji prostora kamor so vložene. Takšnim fraktalom pravimo *debeli fraktali* (angl. fat fractals). Primer: Konstruirajmo Cantorjevo množico iz enotskega intervala $[0,1]$, tako da na n-tem koraku izvržemo srednji $1/3^n$-ti del vsakega podintervala. Dolžina preostale Canotorjeve množice je še vedno pozitivna

$$\mu = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - 3^{-n}),$$

saj je

$$\log \mu = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - 3^{-n}) > 3\log(2/3)\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} = -(3/2)\log(3/2),$$

torej
$$\mu > (3/2)^{-(3/2)}.$$
Lahko se je prepričati, da je ustrezno fraktalna dimenzija omenjene množice enaka 1.

3.3 Invariantne množice in periodične orbite

Zelo pomemben pojem v dinamičnem sistemu je *invariantna množica*, t.j. podmnožica $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ za katero velja $f(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$. Trivialni invariantni množici sta cel fazni prostor $\mathcal{M}$ in prazna množica $\emptyset$. Primer netrivialne invariantne množice odprtega (sipalnega) sistema smo spoznali v prejšnjem razdelku, to je odbijač (repeller) in ima tipično fraktalno topologijo Cantorjeve množice.

Oglejmo si sedaj najpreprostejše netrivialne invariantne množice, to so periodične orbite. Periodična orbita (s periodo T) zveznega dinamičnega sistema je orbita $\boldsymbol{x}(t)$ za katero velja $\boldsymbol{x}(T) = \boldsymbol{x}(0)$, t.j. katerakoli točk $\boldsymbol{x}(t)$ je fiksna točka preslikave $\boldsymbol{\phi}_T$,

$$\boldsymbol{\phi}_T(\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{x}(t+T) = \boldsymbol{x}(t).$$

Periodična orbita je torej zaključena invariantna krivulja v faznem prostoru. Posebne vrste periodična orbita s periodo nič, $T = 0$, se imenuje *zastojna točka* in je najenostavnejši posebni primer invariantne množice.

Kot smo videli, lahko zvezni dinamični sistem vedno nadomestimo z ekvivalentni diskretnim dinamičnim sistemom. Periodične orbite s periodo $p \in \mathbb{Z}$ diskretne prelikave $\boldsymbol{f} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ pa so periodična zaporedja $\boldsymbol{x}_n$, z lastnostjo $\boldsymbol{x}_{n+p} = \boldsymbol{x}_n$. Diskretnim periodičnim orbitam dolžine p bomo rekli tudi $p-$*cikli.* Vsaka točka p-cikla je fiksna točka $p-$te iteracije preslikave

$$\boldsymbol{f}^{(p)}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{x}^*.$$

$$\boldsymbol{x}_0 := \boldsymbol{x}^*, \quad \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*), \ldots \boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{f}^{(p)}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{x}_0.$$

V nadaljevanju bomo o periodičnih orbitah vedno govorili v smislu fiksnih točk neke iteracije diskretne preslikave, ki ja lahko stroboskopska ali Poincaréjeva preslikava kakega fizikalnega dinamičnega sistema.

3.4 Lokalna stabilnost in klasifikacija periodičnih orbit

Oglejmo so, kaj se zgodi z orbito $\tilde{\boldsymbol{x}}_n$, ki je v začetnem trenutku blizu nekega p-cikla, $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{f}^{(p)}(\boldsymbol{x}^*)$. Zapišimo

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_0 = \boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{\delta}_0$$

pri čemer je $\boldsymbol{\delta}$ nek odmik, ki naj bo zadosti majhen, da smemo preslikavo v $\delta-$okolici začetne točke linearizirati. Ko vstavimo nastavek

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_n = \boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{\delta}_n$$

v diskretno preslikavo in lineariziramo (razvijemo do prvega reda v $\boldsymbol{\delta}$), dobimo linearizirano preslikavo za odmike od p-cikla

$$\boldsymbol{\delta}_{n+1} = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{\delta}_n.$$

Odmik od p-cikla $\boldsymbol{\delta}$ se torej v $n-$tem koraku preslikave pomnoži z Jacobijevo matriko odvoda preslikave v $n-$ti točki cikla. Posebej zanimiva je zveza med odmikoma po celotni periodi cikla

$$\boldsymbol{\delta}_p = \boldsymbol{F}_p(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{\delta}_0, \quad \boldsymbol{F}_p(\boldsymbol{x}^*) = \prod_{n=0}^{p-1} \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{f}^{(p)}(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}}.$$

Matriki $\boldsymbol{F}_p$ pravimo stabilnostna matrika (angl. tudi monodromy matrix) preslikave $\boldsymbol{f}$ v p-ciklu. p-cikel je *stabilen*,če v nobeni smeri ne oddaljije od p-cikla, torej če so vse lastne vrednosti stabilnostne matrike po absolutni vrednosti manjše ali enake 1.

V nasprotnem primeru, torej če obstaja vsaj ena *lastna smer* $\boldsymbol{\delta}$, $\boldsymbol{F}_p\boldsymbol{\delta} = \lambda\boldsymbol{\delta}$ v kateri preslikava oddaljuje, $|\lambda| > 1$, pravimo da je p-cikel *nestabilen*. Tipično bo naključno izbran odmik $\boldsymbol{\delta}_0$ imel z verjetnostjo 1 neničelno komponento v smeri lastnega vektorja z $|\lambda| > 1$ in odmiki $|\boldsymbol{\delta}_n$ bodo asimptotsko naraščali kot $\propto \lambda^n$, seveda le dokler je smiselna linearizacija preslikave.

Kot posebej pomemben poseben primer klasificirajmo vse možne tipe stabilnosti p-ciklov kanoničnih preslikav v dveh dimenzijah, $\mathcal{M} \subseteq R^2$. Najprej pokažimo, za splošno dimenzijo $2N$, da lastne vrednosti simplektične matrike $\boldsymbol{F}_p$ vedno nastopajo v parih $\lambda, 1/\lambda$, t.j. če je λ lastna vrednost, je tudi $1/\lambda$ lasta vrednost.

Lastne vrednosti λ so ničle karakterističnega polinoma

$$p(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{1} - \boldsymbol{F}_p).$$

Ker že vemo, da za simplektične matrike velja $(\det \boldsymbol{F}_p)^2 = 1$, in da je $\det \boldsymbol{J} = 1$, lahko računamo

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \pm \det \boldsymbol{F}_p^T \det \boldsymbol{J} \det(\lambda\mathbf{1} - \boldsymbol{F}_p) = \\
&= \pm \det(\lambda \boldsymbol{F}_p^T \boldsymbol{J} - \boldsymbol{F}_p^T \boldsymbol{J} \boldsymbol{F}_p) = \\
&= \pm \det(\lambda \boldsymbol{F}_p^T - \mathbf{1}) \det \boldsymbol{J} = \\
&= \pm(\lambda)^{2N} \det(\lambda^{-1}\mathbf{1} - \boldsymbol{F}_p)
\end{aligned}$$

torej

$$p(\lambda) = \pm\lambda^{2N} p(\lambda^{-1}).$$

od tod sledi, da $p(\lambda) = 0$ implicira $p(\lambda^{-1}) = 0$, saj je singularna lastna vrednost $\lambda = 0$ izključena zaradi pogoja $\det \boldsymbol{F}_p = \pm 1$. Ker smo dokazali, da sodo število lastnih vrednosti nastopa v parih λ, $1/\lambda$, smo hrati tudi pribili, da je njihov produkt, t.j. determinanta vedno natančno ena

$$\det \boldsymbol{F}_p = 1.$$

Za $N = 1$ imamo torej tri tipe ciklov

- *Hiperbolična periodična orbita.* Obe lastni vrednosti λ_1 in λ_2 sta realni in $|\lambda_{1,2}| \neq 1$. Cikel je privlačen v t.i. stabilni smeri in odbojen v nestabilni smeri.

- *Eliptična periodična orbita.* Obe lastni vrednosti ležita na enotskem krogu v kompleksni ravnini $\lambda_{1,2} = e^{\pm\varphi}$. Orbite v okolici p-cikla ležijo na elipsah.

- *Parabolična periodična orbita.* Obe lastni vrednosti sta enaki 1 $\lambda_{1,2} = 1$, Jacobijeva matrika pa se v tem primeru v splošnem ne da diagonalizirati ampak ima obliko Jordanove kletke

  $$\boldsymbol{F}_p = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  kjer je a poljuben parameter. Takšni orbiti pravimo tudi, da je marginalno (ne)stabilna, saj razdalja od cikla s časom celo linearno narašča.

Če sprostimo pogoj o simplektičnosti, potem je zoologija različnih tipov ciklov še dosti bogatejša, saj sta $\lambda_{1,2}$ poljubni kompleksni števili z edinim pogojem, da je ali $\lambda_2 = \lambda_1^*$, ali pa sta obe $\lambda_{1,2}$ realni.

vaja: Oglejte si tipe 1-ciklov standardne preslikave za različne vrednosti parametra k.

3.5 Eksponenti Liapunova

Stabilnost orbit je pomemben koncept, saj nam nekaj pove o zanesljivosti numerično izračunane orbite, ki je vedno obremenjena vsaj z nenatančnostjo začetnega pogoja. Ugotovili smo, da je gibanje v okolici hiperboličnih točk nestabilno, torej da se majhna napaka v začetnem pogoju s časom tipično eksponentno napihuje. Za hamiltonske sisteme, oziroma kanonične preslikave, znajo matematiki pokazati, da so periodične ornite/cikli povsod gosti v faznem prostoru, t.j. za vsak $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}$ in vsak $\delta > 0$ obstaja $p - cikel$, ki ima vsaj eno točko $\boldsymbol{x}^*$ v δ-okolici izbrane točke, $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*| < \delta$.

Pojavu, da so nestabilni, npr. hiperbolični, cikli gosti v določenem delu faznega prostora pravimo *eksponentna občutljivost na začetne pogoje* oziroma *deterministični kaos.* Naj bo $\boldsymbol{x}$ neka poljubna referenčna orbita in $\tilde{\boldsymbol{x}}$ neka bližnja orbita z odmikom

$$\boldsymbol{\delta}_n = \tilde{\boldsymbol{x}}_n - \boldsymbol{x}_n.$$

Definiramo maksimalni Ljapunov eksponent kot

$$\lambda_{\max}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{n\to\infty} \lim_{|\boldsymbol{\delta}_0|\to 0} \frac{\log(|\boldsymbol{\delta}_n|/|\boldsymbol{\delta}_0|)}{n}.$$

Izkaže se, da je gornja limita tipično neodvisna od smeri, v kateri limitiramo začetni vektor odmikov $\boldsymbol{\delta}_0$ proti nič.

Bolj previdno bi definirali Ljapunov eksponent v izbrani smeri $\boldsymbol{v}$

$$\lambda(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{v}) = \lim_{n\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\log(|\boldsymbol{\delta}_n|/|\boldsymbol{\delta}_0|)}{n}|_{\boldsymbol{\delta}_0=\epsilon\boldsymbol{v}}.$$

Algoritem za računanje maksimalnega Ljapunovega eksponenta pa nas mora spominjati na *znano potenčno metodo* za iskanje največje lastne vrednosti, $\exp(\lambda_{\max} n)$, Jacobijeve matrike vzdolž dolge orbite dolžine n. Ker ima začetno odmik $\boldsymbol{\delta}_0$ z verjetnostjo 1 od nič različno komponento vzdolž lastne smeri, ki pripada največji lastni vrednosti $\exp(\lambda_{\max} n)$, ta člen po dolgem času n prevlada.

Dejstvo, da so hiperbolične orbite na nekem področju goste nam ilustrira pozitivni maksimalni Liapunov eksponent $\lambda > 0$. To je definicija determinističnega kaosa. Pozitivnost Ljapunovega eksponenta odraža dejstvo, da gibanje postane praktično nenapovedljivo na časovni skali $n \gg 1/\lambda$.

V večdimenzionalnih sistemih lahko definiramo več Liapunovih eksponentov, t.i. *Ljapunov spekter.* Naj $\sigma_j(\boldsymbol{F})$ označuje $j-$to *singularno vrednost* (urejeno v naraščajočem vrstnem redu) matrike $\boldsymbol{F}$, t.j. $j-$to lastno vrednost matrike

$\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T$ ali $\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$. Liapunov spekter definirano kot eksponent odmikanja od referenčne orbite v določeni lastni smeri Jacobijeve matrike

$$\lambda_j(\boldsymbol{x}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sigma_j \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}^{(n)}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \right).$$

Na povsem analogen način definiramo Ljapunove eksponente v zveznih sistemov, le diskreten čas n nadomestimo z zveznim t. Tedaj ima seveda Ljapunov eksponent obratno enoto časa.

Zgornja formula pa je praktično povsem neprimerna za računanje celega spektra Lyapunovih eksponentov, saj zaokrožitvene napake pri diagonalizaciji matrike $\partial \boldsymbol{f}^{(n)}/\partial \boldsymbol{x}$ povsem zameglijo subdominantne lastne vrednosti, t.j. preostale Ljapunove eksponente. Učinkovito numerično metodo za računanje drugega, tretjega itd. Ljapunovega eksponenta so predlagali Benettin in sodelavci (1980), ki gre nekako takole.

Naj bo N dimenzija faznega prostora $\mathcal{M} \subseteq R^N$. Izberimo začetno točko orbite $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}$ in označimo Jacobijevo matriko $\boldsymbol{F}_n = \partial \boldsymbol{f}^{(n)}(\boldsymbol{x})/\partial \boldsymbol{x}$. Vzemimo k, $1 \le k \le N$ v začetku ortogonalnih in normiranih vektorjev $\boldsymbol{v}_l, l = 1 \ldots k$, $\boldsymbol{v}_m \cdot \boldsymbol{v}_l = \delta_{lm}$ in jih propagirajmo. Zanima nas dolžina vektorja ($k = 1$), površina paralelograma ($k = 2$), ali volumen paralelepipeda ($k \ge 3$), ki ga oklepajo vektorji $\boldsymbol{F}_n\boldsymbol{v}_l$ po dolgem času n. Naj bodo $\lambda_j, j = 1 \ldots N$ Ljapunovi eksponenti urejeni po velikosti $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_N$. K volumnu k-dim paralelepipeda

$$V_n^{(k)} = |\det\{\boldsymbol{F}_n\boldsymbol{v}_m \cdot \boldsymbol{F}_n\boldsymbol{v}_l\}_{m,l}|^{1/2}$$

po dolgem času prispeva le največjih k Ljapunovih eksponentov, če si mislimo da lahko razvoje (ki nam jih ni treba zares poznati)

$$\boldsymbol{F}_n\boldsymbol{v}_l = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^n c_n^{(l)}$$

odrežemo po k členih. (Če bi jih odrezali prej, bi bili namreč vektorji $\boldsymbol{F}_n\boldsymbol{k}_l$ linearno odvisni.) Po dolgem času tako določa volumen $k-$paralelepipeda prvih k Ljapunovih eksponentov:

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log V_n^{(k)}.$$

Vendar v praksi zgornja formula še vedno ni uporabna. Posamični vektorji $\boldsymbol{F}_n \boldsymbol{v}_l$ tipično namreč z naraščajočim časom postajajo vedno bolj paralelni tako, da jih je numerično težko ločiti od linearne odvisnosti. Problem rešimo tako, da vsakih Δ iteracij, vektorje ortnonormiramo po Gram-Schmitu $\boldsymbol{v}_l((m+1)\Delta) = \mathrm{ON}\{\boldsymbol{F}_\Delta \boldsymbol{v}_l(m\Delta)\}$. ON vektorji še vedno napenjajo isti linearni prostor, le volumen se renormalizira na 1. Tako lahko izračunamo skupni volumen kot produkt

$$V_{m\Delta}^{(k)} = V_\Delta^{(k)}(0) V_\Delta^{(k)}(\Delta) \cdots V_\Delta^{(k)}((m-1)\Delta),$$

končna, praktična formula pa se glasi

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_k = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m\Delta} \sum_{l=0}^{m-1} \log V_\Delta^{(k)}(l\Delta).$$

Posamezne eksponente za $k \geq 2$ dobimo z odštevanjem zgornjih formul

$$\lambda_k = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m\Delta} \sum_{l=0}^{m-1} \log V_\Delta^{(k)}(l\Delta)/V_\Delta^{(k-1)}(l\Delta).$$

Postopek renormalizacije uporabljamo tudi kadar iščemo le največji Ljapunov eksponent $k = 1$ pa ne poznamo Jakobijeve matrike odvodov $\boldsymbol{F}$ analitično in zato računamo z diferenco $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\delta}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, kjer δ ne sme preveč zrasti.

Glede na globalne dinamične lastnosti se lahko naučimo nekaj pomembnih vsotnih pravil, ki nam lahko pomagajo pri oceni zanesljivosti numeričnega računanja Ljapunovih eksponentov.

- Za *konzervativne sisteme*, ki ohranjajo volumen faznega prostora, $|\det \partial\boldsymbol{f}/\partial\boldsymbol{x}| = 1$ (ali $\mathrm{div}\,\boldsymbol{g} = 0$), mora biti očitno vsota Ljapunovih eksponentov enaka nič

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n = 0.$$

- Ustrezno pa za *disipativne sisteme*, ki krčijo volumen faznega prostora $|\det \partial\boldsymbol{f}/\partial\boldsymbol{x}| < 1$ (ali $\mathrm{div}\,\boldsymbol{g} < 0$),

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n < 0. \tag{8}$$

- Še strožje, za Hamiltonske sisteme oziroma kanonične preslikave, kot posledica simplektičnosti Jacobijevih matrik, t.j. lastnosti, da lastne vrednosti nastopajo v parih ξ, ξ^{-1}, velja da Ljapunovi eksponenti $\lambda_n, n = \pm 1, \ldots \pm N$. nastopajo v parih

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n, \quad n = 1, \ldots, N$$

- Zvezni dinamični sistemi imajo vedno vsaj en Ljapunov eksponent enak nič, $\exists \lambda_j = 0$. Ta ustreza majhemu odmiku vzdolž orbite, $\boldsymbol{\delta}_0 = \boldsymbol{x}(\epsilon) - \boldsymbol{x}(0)$.

- Zvezni avtonomni (od časa eksplicitno neodvisni) Hamiltonski sistemi imajo zaradi sodega števila Ljapunovih eksponentov in zaradi gornje lastnosti (**??**) vsaj še en eksponent enak nič, $\lambda_j = \lambda_{-j} = 0$. Ta ustreza odmiku pravokotno na energijsko ploskev, ki se spet ohranja, saj je energija konstanta gibanja.

Deterministični kaos, kot eksponentno občutljivost na variacijo začetnih pogojev, definiramo rigorozno z zahtevo, da obstaja za slučajno izbrano orbito pozitivna verjetnost C, da je maksimalni Ljapunov eksponent pozitiven

$$C := \int d\mu(\boldsymbol{x})\theta(\lambda_{\max}(\boldsymbol{x}) - 0) > 0$$

$\theta(z)$ je Heavisideova funkcija, ki ima vrednost 1, če $x > 0$ in 0 sicer. Še natančneje, a ekvivalentno, bomo deterministični Kaos definirali v naslednjem razdelku s pojmom dinamične entropije.

Primeri: Izračunajmo Ljapunov eksponent za nekaj enostavnih preslikav:

- Zasuk na krogu, $x_{n+1} = x_n + \alpha \pmod{2\pi}$. Tu takoj vidimo, da se premik $\delta_n = x'_n - x_n$ ohranja $\delta_n = \delta_0$, zato je Ljapunov eksponent natančno enak nič.

- Žagasta preslikava, $x_{n+1} = 2x_n \pmod 1$. Odvod preslikave je *skoraj povsod* konstanten in enak $f' = 2$, zato je Liapunov eksponent enak $\lambda = \log 2$. To je morda najpreprostejši eksplicitni primer determinističnega kaosa o katerem bomo še govorili.

- Preslikava Arnoldove mačke. Tudi tu je matrika odvodov
$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
skoraj povsod konstantna, zato lahko trdimo da sta Ljapunovova eksponenta $\lambda_{1,2}, \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ za *skoraj vse* orbite enaka. Izračunamo ju z diagonalizacijo Jacobijeve matrike
$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{P}^{-1} \begin{pmatrix} 1/\xi & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix} \boldsymbol{P}, \quad \xi = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix},$$
Pri iteraciji vzdolž orbite zgolj potenciramo Jacobijevo matriko
$$\boldsymbol{F}^n = \boldsymbol{P}^{-1} \begin{pmatrix} \exp(-n\lambda) & 0 \\ 0 & \exp(n\lambda) \end{pmatrix} \boldsymbol{P}$$
kjer je $\lambda = \log(\frac{3+\sqrt{5}}{2} = 0.962\ldots$ pozitivni Ljapunov eksponent, zato je tudi preslikava Arnoldove mačke kaotična po celem faznem prostoru.

3.6 Informacijska entropija

Pomemben pojem v teoriji dinamičnih sistemov je *informacija.* Naj zavzame spremenljivka x končno mnogo vrednosti, ki so porazdeljene po verjetnostni porazdelitvi $p(x)$. Porazdelitev $p(x)$ naj bo normirana, torej $\sum_x p(x) = 1$. Ko zvemo za dejansko vrednost količine x smo pridobili neko določeno informacijo. Po Shannonu je ta količuna informacije enaka entropiji verjetnostne porazdelitve $p(x)$, torej
$$I_p = -\sum_x p(x) \log_2 p(x).$$
Enota za količino informacije je en *bit*, ki je enak informiciji, ki se razkrije z metanjem poštenega kovanca. Primer:

- Naj ima spremenljivka zagotovo vrednost $x = x_0$, torej $p(x_0) = 1$ in $p(x \neq x_0) = 0$. Tedaj x ne nosi nič informacije $I_p = 0$.

- Naj ima spremenljivka x 2^n možnih vrednosti, ki so vse enako verjetne $p(x) = 2^{-n}$. Tedaj nosi x natanko n bitov informacije.

Informacija je pomemben koncept pri obravnavanju dinamičnih sistemov. Govorili bomo o količini informacije, ki jo na časovno enoto potrebujemo za opis tipične orbite sistema.

3.7 Dinamična entropija

V standardni ravnovesni statistični mehaniki govorimo o količini informacije, ki jo potrebujemo za opis ravnovesnega stanja. To ni nič drugega kot termodinamska entropija v enotah Boltzmanove konstante.

Tu pa nas bo zanimala dinamična posplošitev pojma entropije in informacije. Zanima nas količina informacije, ki jo potrebujemo za opis orbite dinamičnega sistema z dano fiksno natančnostjo.

Pri tem se bomo omejili na vezane sisteme s končnim faznim prostorom, $\mu(\mathcal{M}) = 1$, za mero μ pa bomo zahtevali, da je *invariantna* $\mu(\mathcal{A}) = \mu(\boldsymbol{f}^{-1}(\mathcal{A}))$. Prav tako bomo govorili le o diskretni časovni dinamiki, možna je direktna posplošitev na zvezno dinamiko, ali pa kar je bolj praktično, da gremo preko Poincaréjeve ali stroboskopske preslikave.

Najprej moramo vpeljati pojem *particije faznega prostora*. Particija $\{\mathcal{A}_m, m = 1, 2, \ldots M\}$ je razdelitev faznega prostora na M disjunktnih podmnožic,

$$\begin{aligned}\bigcup_{m=1}^{M} \mathcal{A}_m &= \mathcal{M},\\ \mathcal{A}_m \cap \mathcal{A}_n &= \emptyset, \quad \text{ako } m \neq n,\\ \sum_{m=1}^{M} \mu_m &= 1, \quad \mu_m = \mu(\mathcal{A}_m).\end{aligned}$$

Particiji priredimo (statično) entropijo

$$S_1 = -\sum_{m=1}^{M} \mu_m \log \mu_m.$$

Zdaj si oglejmo kombinirano verjetnost, da bo naključno izbrana orbita v predalčku $\mathcal{A}_{m_2}$ ter da je bila pred eno časovno enoto v predalčku $\mathcal{A}_{m_1}$

$$\mu_{m_1,m_2} = \mu(\mathcal{A}_{m_1,m_2}), \quad \mathcal{A}_{m_1,m_2} = \mathcal{A}_{m_2} \cap \boldsymbol{f}^{-1}(\mathcal{A}_{m_1})).$$

Particijo smo sedaj razdrobili na manjše kose, vsak del $\mathcal{A}_m$ smo razdelili na do M novih kosov $\mathcal{A}_{m_1} = \bigcup_{m_2=1}^{M} \mathcal{A}_{m_1,m_2}$ z ozirom na to 'od kod so prišli'.

Tej novi razdelitvi prav tako priredimo entropijo, t.j. količino informacije ki jo potrebujemo za opis dinamike na particiji za dva časovna koraka,

$$S_2 = -\sum_{m_1,m_2} \mu_{m_1,m_2} \log \mu_{m_1,m_2}.$$

Postopek nadajujemo, tako da npr. definiramo množico orbit, ki so trenutno v predalčku m_n, pred enim korakom pa so bile v predalčku m_{n-1} in tako naprej, do pred $n-1$ koraki, ko so bile v predalčku m_1,

$$\mathcal{A}_{m_1,m_2,\ldots,m_n} = \bigcap_{j=1}^{n} \boldsymbol{f}^{-(n-j)}(\mathcal{A}_{m_j}).$$

Verjetnosti, da ima naključno izbrana orbita zgodovino $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ so kar volumni zgornjih množic

$$\mu_{m_1,m_2,\ldots,m_n} = \mu(\mathcal{A}_{m_1,m_2,\ldots,m_n}),$$

ustrezna entropija pa je količina informacije, ki jo potrebujemo za opis n korakov orbite v particiji,

$$S_n = -\sum_{m_1,m_2,\ldots,m_n} \mu_{m_1,m_2,\ldots,m_n} \log \mu_{m_1,m_2,\ldots,m_n}.$$

Količino informacije na časovno enoto

$$K_{\{\mathcal{A}_m\}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n$$

definiramo kot dinamično entropijo. V praksi jo seveda bolj učinkovito določimo kot naklon linearne regresije na digaramu S_n proti n. Tako definirana entropija je seveda lahko odvisna od particije, predvsem od njene finoče M. Hitro se prepričamo, da če iz dane particije naredimo novo, tako da predalče naprej delimo na manjše dele, posamezne entropije S_n kvečjemu povečamo. Posamezne entropije S_n so tako seveda bistevno odvisne od finoče particije, vendar pa sta Kolmogorov in Sinai pokazala, da obstaja zgornja meja za njen prirastek na časovno enoto, t.j. dinamično entropijo. To je količina informacije, ki jo ne glede na natančnost začetnih pogojev, sistem 'sproducira' na enoto časa in jo imenujemo entropija Kolmogorova in Sinai-a, oziroma KS-entropija

$$K_{\mathrm{KS}} = \sup_{\{\mathcal{A}_m\}} K_{\{\mathcal{A}_m\}}.$$

$I(n) = nK_{\mathrm{KS}}/\log 2$ je minimalno število bitov informacije, ki jo potrebujemo (za velike n in z optimalnim algoritmom za kompresijo podatkov), da shranimo orbito dinamičnega sistema časovne dolžine n.

Začetna entropije S_1 seveda tipično divergira z drobljenjem particije ($M \to \infty$) vendar pa ima njen prirastek na časovno enoto končno zgornjo mejo.

Matematiki znajo pokazati koristne zveze med Ljapunovimi eksponenti in KS entropijo. Npr. v splošnem velja, da je KS entropija navzgor omejena s faznim povprečjem vsote pozitivnih eksponentov

$$K_{\mathrm{KS}} \leq \int d\mu(\boldsymbol{x}) \sum_{\lambda_j(\boldsymbol{x})>0} \lambda_j(\boldsymbol{x}).$$

Prav posebno uporaben rezultat pa je pokazal Pesin, namreč da je za (tipične, zadosti pohlevne) Hamiltonske sisteme oziroma kanonične transformacije gornja neenakost kar enakost

$$K_{\mathrm{KS}} = \int d\mu(\boldsymbol{x}) \sum_{\lambda_j(\boldsymbol{x})>0} \lambda_j(\boldsymbol{x}).$$

Primer:

- Izračunajmo KS-entropijo za žagasto preslikavo, $x_{n+1} = 2x_n \pmod 1$. Vzemimo najprej preprosto delitev $M = 2$, $\mathcal{A}_0 = [0, 1/2)$, $\mathcal{A}_1 = [1/2, 1)$. Hitro se prepričamo, da je množica $\mathcal{A}_{m_1,m_2,\ldots,m_n}$ kar interval dolžine 2^{-n}, ki ima določenih prvih n binarnih cifer n. Od tod sledi za entropije $S_n = \log 2^n = n \log 2$, in za KS-entropijo $K_{\mathrm{KS}} = \log 2 = \lambda$.

3.8 Topološka entropija

Dinamično entropijo lahko definiramo še bolj abstraktno, brez uporabe mere μ. Zdaj zgolj štejmo število različnih poti na končni particiji, po katerih se orbita lahko sprehaja za čas n,

$$N_n = \sum_{\mathcal{A}_{m_1,m_2,\ldots,m_n} \neq \emptyset} 1.$$

Dinamično topološko entropijo glede na particijo definiramo kot

$$K'_{\{\mathcal{A}_m\}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N_n,$$

oziroma kot supremum glede na vse mogoče particije,

$$K_t = \sup_{\{\mathcal{A}_m\}} K'_{\{\mathcal{A}_m\}}.$$

Hitro lahko zapišemo splošno neenakost med metrično KS-entropijo in topološko entropijo

$$K_t \geq K_{\mathrm{KS}}.$$

ki jo znamo tudi dokazati: pri topološki entropiji le štejemo načine, da gre orbita preko n predalčkov, pri čemer je verjetnostna porazdelitev enakomerna, se pravi, da je $\log N_n$ zgornja meja za entropijo kakršnekoli porazdelitvene funkcije na nepraznih množicah $\mathcal{A}_{m_1,m_2,\ldots,m_n}$,

$$\log N_n \geq S_n.$$

Od tod pa takoj sledi, kar smo hoteli pokazati. Matematiki znajo povezati topološlo entropijo s štetjem periodičnih orbit v sistemu. Naj bo $N_n^{(\mathrm{cik})}$ število vseh ciklov v sistemu s periodo $p \leq n$. Potem je topološka entropija kar

$$K_t = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N_n^{(\mathrm{cik})},$$

oziroma, bolj natančno, če je topološka entropija pozitivna, število ciklov do periode n narašča ensponentno kot

$$N_n^{(\mathrm{cik})} \sim n \exp(K_t n).$$

Primer:

- Spet vzemimo žagasto preslikavo, za katero dobimo enak resultat. $K_t = K_{\mathrm{KS}} = \ln 2$. Enak rezultat dobimo tudi s štetjem periodičnih orbit.

3.9 Korelacijske funkcije

Naj bo mera μ invariantna na preslikavo $\boldsymbol{\phi}_t$. Posebej pomembne za razumevanje dinamičnih lastnosti so časovne korelacijske fukcije. Vzemimo dve opazljivki, t.j. funkciji nad faznim prostorom, $u, v : \mathcal{M} \to R$. Označimo najprej povprečje funkcije opazljivke na faznem prostoru

$$\langle u(\boldsymbol{x}) \rangle = \int d\mu(\boldsymbol{x}) u(\boldsymbol{x}).$$

Invariantnost mere se zrcali v invariantnosti časovnega povprečja

$$\langle u(\boldsymbol{\phi}_t(\boldsymbol{x})) \rangle = \langle u(\boldsymbol{x}) \rangle \,.$$

Korelacijsko funkcijo definiramo kot

$$C_{uv}(t) = \langle u(\boldsymbol{\phi}_t(\boldsymbol{x})) v(\boldsymbol{x}) \rangle - \langle u \rangle \langle v \rangle \,.$$

Kot bomo videli kasneje, je obnašanje časovnih korelacijskih fukcij ključnega pomena za razumevanje dinamike.

3.10 Deterministična difuzija

Naj bo definicijsko območje količine w_n cela realna os, njena sprememba v časovnem intervalu pa naj bo odvisna le od trenutne lege v faznem prostoru,

$$w_{n+1} = w_n + s(\boldsymbol{x}_n)$$

Primer: vrtilna količina v suvanem rotatorja ali lega kroglice, ki prozno odskakuje po periodično grbinasti podlagi.

Če so posamezni 'skoki' $w_{n+1} - w_n = s_n = s(\boldsymbol{x}_n)$ med večjim številom časovnih korakov med seboj neodvisni, in je so skoki uravnoteženi

$$\langle s(\boldsymbol{x}) \rangle = 0,$$

potem pričakujemo, da se w_n spreminja na difuzijski način, t.j.

$$\left\langle (w_n - w_0)^2 \right\rangle \propto n, \tag{9}$$

oziroma da obstaja dobro določena difuzijska konstanta

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{\langle (w_n - w_0)^2 \rangle}{2n}.$$

Difuzijsko konstanto lahko povežemo z avtokorelacijsko funkcijo skokov

$$D = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle s(\boldsymbol{x}_n)s(\boldsymbol{x}_0)\rangle = \frac{1}{2}\left\langle s^2\right\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \langle s(\boldsymbol{x}_n)s(\boldsymbol{x}_0)\rangle \,.$$

vaja: dokaži to relacijo. Če avtokorelacijska funkcija sunkov pada prepočasi, oziroma sploh ne pada, tako da zgornja vsota divergira, potem $D = \infty$ in transport w_n ni difuzijski. Npr. transport w_n je balističen, če $\langle (w_n - w_0)^2\rangle \propto n^2$, ali pa gre za anomalno difuzijo kadar $\langle (w_n - w_0)^2\rangle \propto n^\alpha$ kadar $\alpha < 2$ in $\alpha \neq 1$.

Difuzijskemu procesu pravimo tudi Gaussov process, kadar poleg zakona (9) velja še da je porazdelitev odmikov $P_n(w_n - w_0)$ gaussova. Te je natanko tedaj, ko porazdelitev $P_n(w)$ za nek ensemble orbit lahko modeliramo z difuzijsko enačbo, ki ji v tem kontekstu pravimo tudi Fokker-Planckova enačna. Gaussov difuzijski process lahko preverimo numerično z računanjem višjih momentov

$$\left\langle (w_n - w_0)^{2m}\right\rangle = (2m-1)!!2Dn.$$

3.11 Vloga zunanjih parametrov in bifurkacije

3.12 Atraktorji

Definirajmo: Globalni atraktor $\mathcal{A}$ je limitna (invariantna) množica točk v faznem prostoru, kjer se sistem zadržuje po asimptotsko dolgem času v prihodnosti,

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{f}^{(n)}(\mathcal{M})$$

in je neke vrste časovni obrat odbijača (repeller)

$$\mathcal{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{f}^{(-n)}(\mathcal{M})$$

. V disipativnih sistemih so atraktorji lahko fraktalne množice, v hamiltonskih sistemih pa je globalni atraktor kar cel fazni prostor, saj velja $\boldsymbol{f}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$. Globalni atraktor pa v splošnem razpade na unijo posameznih (nerazcepnih) disjunktnih invariantnih množic – atraktorjev, kamor sistem konvergira po dolgem času z določenega dela faznega prostora. Npr. definiramo atraktor glede na začetno točko $\boldsymbol{x}_0$, ki je množica vseh stekališč zaporedja $\{\boldsymbol{x}_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$, oziroma

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_0) = \overline{\{vef^{(n)}(\boldsymbol{x}_0), n = 0, 1, 2, \ldots\}}.$$

Množico vseh točl $\boldsymbol{x}_0$ v faznem prostoru, ki imajo enak atraktor A_0 imenujemo *bazen privlačnosti* atraktorja A_0. Tipično imajo disipativni sistemi s končnim številom prostostnih stopenj tudi končno število nerazcepnih atraktorjev, čeprav so znani tudi primeri, ko je atraktorjev neskončno mnogo.

Najpreprostejša primera atraktorjev sta: (i) zastojna točka (t.j. absolutno stabilna fiksna točka, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(x)$, $|\det \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})| < 1$) in (ii) limitni cikel (t.j. absolutno stabilna periodična orbita, p-cikel, $|\det \boldsymbol{F}^{(p)}(\boldsymbol{x}_0)| < 1$). V nelinearnih diskretnih sistemih, in v zveznih sistemih z več kot dvo-dimenzionalnim faznim prostorom, pa lahko naletimo tudi na fraktalne atraktorje v podobi Cantorjevih množic, na katerih je gibanje lahko kaotičo (s pozitivno KS entropijo). Takšnim atraktorjem pravimo čudni atraktorji (angl. strange attractors).

4 Statistične lastnosti dinamičnih sistemov

4.1 ergodičnost

Naj bo mera μ invariantna proti faznemu toku $\boldsymbol{\phi}_t$. Invariantnost mere je ekvivalentna izjavi, da je t.i. fazno povprečje poljubne merljive opazljivke $a \in L^1[\mathcal{M}, \mu]$

$$\langle a(\boldsymbol{x})\rangle := \int d\mu(\boldsymbol{x}) a(\boldsymbol{x})$$

neobčuljivo na časovni premik

$$\langle a(\boldsymbol{x})\rangle = \langle a(\boldsymbol{ph}_t(\boldsymbol{x})\rangle$$

ali za diskretno preslikavo $\boldsymbol{f}$

$$\langle a(\boldsymbol{x})\rangle = \langle a(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\rangle\,.$$

Trditev dokažemo, tako da v integral na desni strani enačbe vpeljemo novo spremenljivko $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\phi}_t(\boldsymbol{x})$ in eksplicitno uporabimo invariantnost mere za infinitezimalno okolico točke $\boldsymbol{y}$.

Dinamični sistem je *ergodičen*, kadar je za skoraj vsak zav cetni pogoj $\boldsymbol{x}_0$ in poljuno opazljivko $u \in L^1[\mathcal{M}, \mu]$, časovno povprečje enako faznemu povprečju

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt u(\boldsymbol{\phi}_t(\boldsymbol{x}_0)) = \langle u(\boldsymbol{x}) \rangle \tag{10}$$

ali za diskreten čas

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} u(f^{(n)}(\boldsymbol{x}_0)) = \langle u(\boldsymbol{x}) \rangle \tag{11}$$

Primer:

- Preslikava na krogu $f(x) = x + \alpha \pmod{2\pi}$ je ergodična natanko tedaj, ko je $\alpha/(2\pi)$ iracionalno število. Vaja: Izračunaj verjetnost da je prva cifra zaporedja 2^n enaka 7 (t.j. njeno relativno frekvenco v zaporedju).

Ekvivalentna definicija: Dinamične sistem je ergodičen natanko tedaj, ko ima vsaka invariantna množica bodisi mero 1 ali mero 0.

4.2 mešanje

Definicija: Dinamični sistem ima lastnost mešanja kadar velja

$$\lim_{t\to\infty} \mu(\boldsymbol{\phi}_t^{(-1)}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}) = \mu(calA)\mu(\mathcal{B}) \tag{12}$$

za poljubni (merljivi) podmnožici $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{M}$. Izrek (Arnold): Dinamični sistem ima lastnost mešanja natanko tedaj, ko velja za poljubni opazljivki $u, v \in L^2(\mathcal{M}, \mu)$ korelcijska fukncija asimptotsko pojema

$$\lim_{t\to\infty} \langle u(\boldsymbol{\phi}_t(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x}) \rangle = \langle u(\boldsymbol{x}) \rangle \langle v(\boldsymbol{x}) \rangle$$

Izrek: mešanje implicira ergodičnost (obratno ne velja nujno).
Vaja: dokaži.

Primer:

- Pokažimo, da ima žagasta preslikava lastnost mešanja.

5 Enodimenzionalne preslikave

Tipične (generične) bifurkacije v enodimenzionalnih preslikavah:

- tangentna bifurkacija
- vilasta bifurkacija (podvajanje periode)
- antivilasta bifurkacija

Izrek Šarkovskega o ciklih enodimenzionalnih preslikav.

5.1 logistična (Feigenbaumova) preslikava

Preprost model populacijske dinamike

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n).$$

5.2 šotorska preslikava ("tent map")

5.3 enodimenzionalni modeli deterministične difuzije

6 Abstraktni dinamični sistemi in simbolična dinamika

6.1 Bernoulijev premik

6.2 Smale-ova podkev

6.3 Markovski procesi

7 Hamiltonski dinamični sistemi

7.1 Poincaréjev izrek o povratnosti

7.2 Integrali gibanja in izrek Noetherjeve

7.3 Kanonične preslikave in generacijske funkcije

7.4 Integrabilnost hamiltonskih sistemov

7.5 Slika med integrabilnostjo in kaosom: Poincaré Birkhoffov izrek

7.6 Izrek Kolmogorova, Arnolda in Moserja (KAM)

7.7 Maksimalni kaos: pogoj Chirikova

7.8 Minimalni kaos: pogoj Melnikova

7.9 Standardna (Chirikova) preslikava

7.10 Pekarska preslikava ("Baker's map")

8 Biljardi: poligon za testiranje idej

8.1 Integrabilni biljardi

8.2 Ergodicčni biljardi

8.3 KAM biljardi

8.4 Pseudointegrabilni biljardi

9 Kaos v sistemih z mnogo prostostnimi stopnjami

10 Kaos v sipalnih sistemih

11 Spektralna teorija dinamičnih sistemov

11.1 Liouvilov operator in Peron-Frobeniusov operator

11.2 spekter dinamičnega operatorja in korelacijske funkcije

References

[1] V. I. Arnold, "Mathematical Methods of Classical Mechanics", (Springer-Verlag, New York 1978).

[2] V. I. Arnold in A. Avez, "Ergodic Problems of Classical Mechanics", (W. A. Benjamin, New York 1968).

[3] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin in Ya. G. Sinai, "Ergodic Theory", (Springer-Verlag, New York 1982).

[4] P. Cvitanović, "Classical and Quantum Chaos: A Cyclist Treatise", (e-book na naslovu `http://www.nbi.dk/ChaosBook/`).

[5] F. Haake, "Quantum Signatures of Chaos", (Springer-Verlag, New York 1991).

[6] A. J. Lichtenberg in M. J. Lieberman, “Regular and Stochastic Motion”, (Springer-Verlag, New York 1983).

[7] E. Ott, “Chaos in Dynamical Systems”, (Cambridge University Press 1993).

[8] H.-G. Schuster, “Deterministic Chaos”, (VCH, New York 1988).