

Marko ŽNIDARIČ

DINAMIČNA ANALIZA

Zapiski predavanj

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETE ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA FIZIKO
2010

Dinamična analiza, dodiplomski študij, 2009/2010

Kazalo

• Uvod	3
<i>Opozorilo: Uvodni del je kratek. Za prvih nekaj poglavij, do naslednjega v teh zapiskih, ki opišejo in definirajo preproste dinamične sisteme, stroboskopske preslikave, Poincaréjeve sečne ploskve, itd., glej npr. skripto "Dinamična Analiza: Uvod v teorijo determinističnega kaosa" Tomaža Prosen!</i>	
• Globalna struktura – geometrija	
– Cantorjeve množice	5
• Dinamika	
– Stabilnost ciklov	8
– Eksponenti Ljapunova	13
– Statistične lastnosti	18
– Entropija	27
– Markovski procesi	34
– Simbolična dinamika	39
• 1D preslikave	44
• Hamiltonski sistemi	
– Splošne lastnosti	50
– Integrabilnost	55
– Hamilton-Jacobijev formalizem	57
– Biljardi	60
– Prehod od integrabilnosti do kaosa	65
– Homoklinske točke	74
• Večdelčni sistemi	76

Dinamična analiza

UVOD

Kvalitativno

Študij drvašnja resitev def; lahko tudi veja matematike, a
moj pristop bolj fizikalni.

Če bom znal "enostavno" dobiti OK, sicer pa numerika.

Veliko različnih pristopov...

- Do sedaj pre fiziki rešljivi (integralni) sistemi: + H.O.
- + valitev atom
- + sistem dveh teles
- + simetrična interakcija
- ⋮

(glej Chaubard, App. A)

VSI SO ZELO POSEBNI (neregularni)

- Konec 19st. nagrada Švedskega kralja: "prouči konvergenca rešitev za problem 3-teles"
 Gibanje Zemlje - Luna - Sonce pomeni in zanimivo. Kanonični perturbacijske
 teorije: Delaunay 2x 900 strani, do 10 reda; rešitev za Luno Foucaulta
 vsaka ne 10 strani!! Poincaré kritiziral, da ne konvergira.
 Nagrada deli Poincaré; pravi, da ne ž analizirani konstanta gibanja.
 (to ni odgovor na vprašanje; pozitiven odgovor najde Sundman!!)
 Poincaréjev rezultat pravi na neanalitičnost, ^{diranost je} ~~sistemi~~ so lahko zelo
 dragi, kot π integralni, uporabi se tudi popolnoma novi pristopi:
 periodične orbit, ... (zelo moderen)
- Boltzmann: za svojo statistično dinamiko je potreboval ergodičnost.
 Termodinamični cikel valja \Rightarrow zakaj? Verjetno ~~na~~ sistem ergodičen,
 integralni cikel niso!!
 Leto 1955 FPU zelijsko preverit ergodičnost na sistemu anharmoničnih oscilatorjev.
 Na zatudenje, ne vilijsko ergodičnost!!!

I. Generalni sistemi nisu integrabilni

II. Njihove lastnosti so zelo drugačne

- + ireverzibilnost mekroskopske Δt in reverzibilna metoda (veliko DOF!)
- + simetrija H in low E resitve (linearna) niso dovolj!

→ poudarek Hamiltonke

... (faint text)

... (faint text)

... (faint text)

... (faint text)



Geometrija I.: Cantorjeve množice

Zanimajo nas invariantne strukture. V dissipativnih so te lahko fraktalne.

Dissipativni sistemi: (str. 11)

flor: prosti se krči:

$$\dot{x} = \vec{g}(x) \quad \text{lah}$$

$$\frac{dV}{dt} = \oint_{\partial V} \vec{g} \cdot d\vec{s} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_V \text{div} \vec{g} \, dV$$

$$\frac{dV}{V dt} = \text{div} \vec{g} \left[\frac{\text{rel. sprememba } V}{\Delta t} \right] \quad \text{div} \vec{g} < 0 \quad \{ \text{če pametno} \}$$

za preslikane:

$$\vec{x}(dt) = \vec{x}(0) + \vec{g}(0) dt$$

$$F = \frac{\partial \vec{x}(dt)}{\partial \vec{x}} = \mathbb{1} + \nabla \vec{g}(0) dt$$

$$\det F = 1 + \text{div} \vec{g} dt + O(dt^2)$$

$$\text{ali } V(t) = V(0) |\det F|^t \Rightarrow \frac{d(\ln V)}{dt} = \frac{dV}{V dt} = \ln |\det F|$$

Primer: Lorenz sistem

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y$$

$$\dot{Z} = XY - bZ$$

$$\text{div} \vec{g} = -(\sigma + 1 + b)$$

$$V(t) = V(0) e^{-(\sigma+1+b)t}$$

Pokaži glivno atraktorji im komentirj, da mora biti $D < 3$ (ker je mora bit $V \rightarrow 0$ {n3d3}), da pa mora bit veji kot 2, saj na $D=2$ za flow ne more biti haosa, na atraktorji pa je (Poincare-Bendixson: $n \geq 2$ ga proti periodični orbiti)

Atraktor ima stroj dimenzija $2 < D < 3$, čudno?!

Kakšne so množice + meclo dimenzije?

Cantorjeve množice:

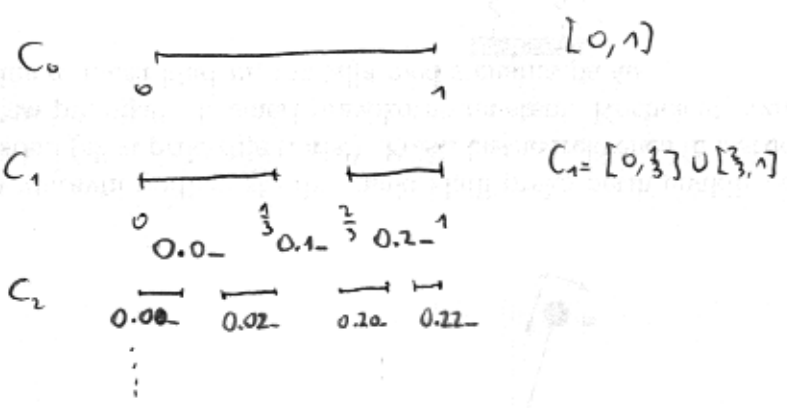
- Def: • notranje točka: $\exists \epsilon$ ki je $\subset C$
- robna točka: $\forall \epsilon$ je $\cap C$ in $\cap C$
- stekalica: $\forall \epsilon$ vsebuje vsaj eno iz C
- zaprta množica: vsebuje vsa stekalica

Cantor: C je zaprta iz samih robnih točk. $C \equiv \partial C$

Zanimiva so točka + meclano so točkami.

Primer: Cantorjeva tretjinska množica:

odrezano odprto nedrugo tretjino



C_∞ je Cantorjeva množica

C_∞ ima mero (dolžino = 0): $\mu(C_{n+1}) = \frac{2}{3} \mu(C_n)$

$$\mu(C_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

A spleh log ostane v C_∞ ? DA

$$\text{tretjinski sistema } x = 0. \alpha_1 \alpha_2 \dots = \alpha_1 \frac{1}{3^1} + \alpha_2 \frac{1}{3^2} + \dots$$

ni nobenih štev 1!

C_∞ je iz vsak x , ki nimajo nobene štev.

Bijektivno $0 \rightarrow 0, 2 \rightarrow 1$ na binarne \Rightarrow izomorfna metrike intervalu $[0, 1]$
Kasnej bodo videli, da je $D(C_\infty) \approx 0,63$

odlipodane

Fraktali \rightarrow množice, ki so Cantorjeva množica.

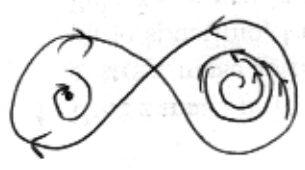
Debeli fraktali ("fat fractals"): Cantorjeva množica \neq merično mero.
(maka ϵ -odloka nekaj merično mero takš u im itam množica)

Atraktor Če v f -setu obstajajo $\frac{1}{3}$, potem $\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$ je to debeli fraktal. Njihova $D = m$.

Def: množica A , invarianta, ~~A~~ kjer x nika zadržuje po daljšem času

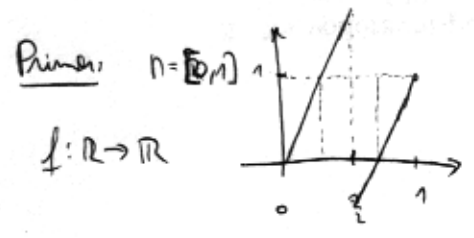
Basen privlačnosti:

menorčen: odlik disce na točki $a \in A$



- najbolj zanimivi A :
- fiksna točka (stabilna, $klitF < 1$)
 - limitni cikel (periodična orbita)
 - fraktalni atraktor (Cantorjeva množica)
 - + vsi γ nima mecl D
 - + $n D > 2$ za flow
 - + poljubni D za prostorske
 - + če je ogle na A fiksno \Rightarrow čišni

Odlivji ("repeller"): isto kot atraktor, le da $n < 1$ (čas meay)



nekaj točk nide is Π : sipalni problem

p eni itnacoje ostane $n \Pi C_1$

$$f^{t_0}(n) = C_2 \quad f^{-1}(m) = C_1$$

$$f^{t_m}(m) = C_m$$

C_∞ je odlivji.

f je f definirana na C_∞ $f(C_\infty) = C_\infty$

Če svet zapremo x v krajšem nitani: $x = 0.020220002 \dots \in C_\infty$

$$f(x) = 0.2022 \dots$$

prvih n levo

f je na C_∞ itnacojna zupostu na $[0, 1]$

mea točk, ki p t korakel ostanejo n je

$$P(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t = e^{-\ln(3/2) \cdot t}$$

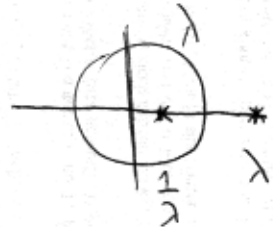
razpadni zakon

Stabilitnost periodičnih orbit za hamonične funkcije $n d=1$ $\{Sp(2)\}$
 cirkul

Sx_1, dx_2 je invariantna za simplektične F
 $\Rightarrow Sx \cdot J(Fx) = \text{invar.} \Rightarrow$ kvadratna forma $\omega \dot{x}^2 \Rightarrow$
 invariantne krivulje so 2. reda

I. Hiperbolični periodični orbit cirkul

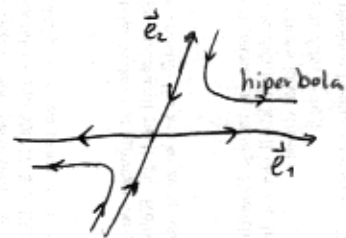
obe $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ in $|\lambda_{1,2}| \neq 1$



$\lambda = e^\sigma$
 $\frac{1}{\lambda} = e^{-\sigma}$ $\sigma \geq 0$

$F e_1 = \lambda e_1$
 $F e_2 = \frac{1}{\lambda} e_2$

\vec{e}_1 in \vec{e}_2 sta nestabilna in stabilna smer



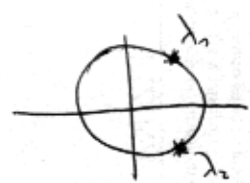
Vsaka hamonična ima vsaj eno stabilno smer

$\text{tr} F = \lambda + \frac{1}{\lambda} = e^\sigma + e^{-\sigma} = 2 \cosh \sigma > 2$

$|H_1 F| > 2$

II. Eliptični cirkul

$|\lambda_{1,2}| = 1$



$\lambda_1 = e^{i\varphi}$ $\lambda_2 = e^{-i\varphi}$

$\text{tr} F = 2 \cos \varphi$
 $|H_1 F| < 2$

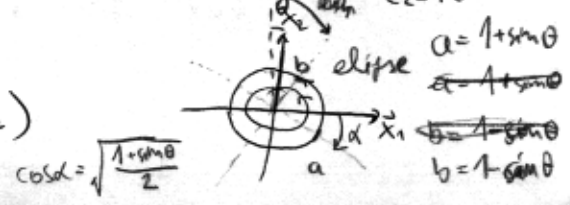
$F \vec{e}_1 = e^{i\varphi} \vec{e}_1$
 $F \vec{e}_1^* = e^{-i\varphi} \vec{e}_1^*$ } kompleksno konjugirana lastna vektorja

Če zapišemo $\vec{e}_1 = \vec{x}_1 + i\vec{x}_2$ in $\vec{e}_2 = \vec{x}_1 - i\vec{x}_2$, $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}$ in

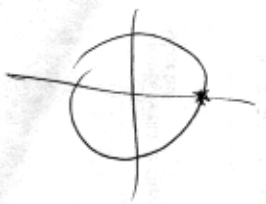
$\delta_0 = c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2$ za realni skalar, $i\vec{e}_2$ realna, $i\varphi \in \mathbb{R}$ in $\text{Re}(c_1 + c_2) = 0$
 $\text{Im}(c_1 + c_2) = 0$ } $c_1 = r e^{i\varphi}$
 $c_2 = r e^{-i\varphi}$

$\delta_t = F^t \delta_0 = r e^{i\varphi} e^{i\varphi t} \vec{e}_1 + r e^{-i\varphi} e^{-i\varphi t} \vec{e}_2 =$
 $= 2r (\cos(\varphi t) \vec{x}_1 - \sin(\varphi t) \vec{x}_2)$

δ_t ne narašča s t !



III. Parabolni učel : $\lambda_{1,2} = 1$ ali $\lambda_{1,2} = -1$ (marginalno stabilna)



degenerirani lastni vrednosti

$$|tr F| = 2$$

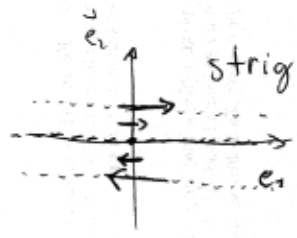
Vičati se F ne da diagonalizirati - Jordanova rešitev

mp: $F = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ je lastni,

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \text{ne}$$

$$F\vec{e}_2 = a\vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

za $a > 0$

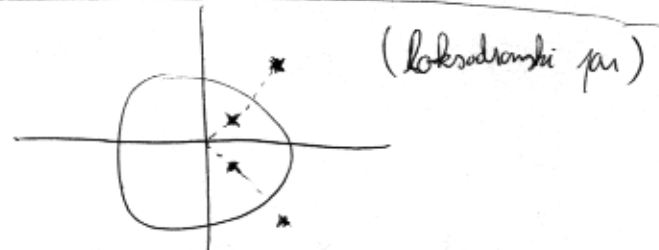


\vec{x} je $a \neq 0$ δ_t ~~linear~~ linearno

$$\text{manjšica: } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + may_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+ay \\ y \end{pmatrix}$$

V več dimenzijah imamo lahko četverčle



(koksodromski pu)

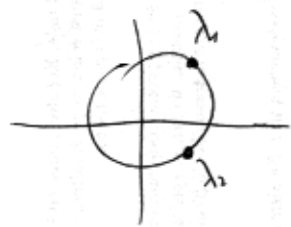
Presledna je stabilna v obeh smereh, če so λ na krogu. Kako lahko izgulimo to stabilnost?

To, da so lastne vrednosti v parih ali četverčleh, ima posledice za obnašanje

λ do motnje. Npr.: Če imamo pu $e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}$ im dodamo

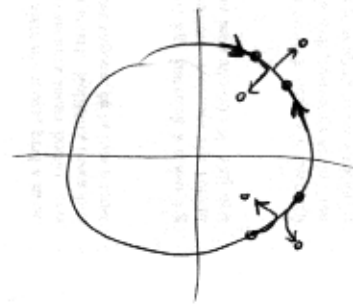
motnjo. Kaj se zgodi z $\lambda_{1,2}$? λ , ne more Jan zapustiti kroga, ampak mora "klic" z drugo na

krogu!



Primeri kriv za $n=4$:

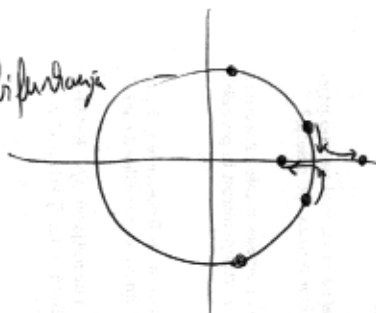
I.)



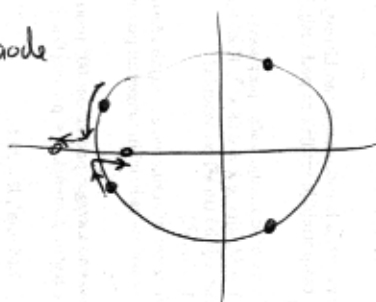
Če so vse na krogu in izelinane, je sistem absolutno stabilen.

Pimer: \downarrow

II.) tangentska bifurkacija



III.) podvojitev periode



Zgled: 1-cilli za standardno poslikavo

$$p_{n+1} = p_n + k \sin \varphi_n$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + p_{n+1} \pmod{2\pi}$$

$$p_{n+1} = p_n \quad \text{za} \quad \sin \varphi_n = 0 \Rightarrow \varphi_n = 0, \pi$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n \pmod{2\pi} \quad \text{za} \quad p_{n+1} = 2\pi j \Rightarrow p_n = 2\pi j \quad \text{oz.} \quad 0 \text{ v osmeri celici: } [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$$

stabilnostna matrika $F = \begin{pmatrix} 1+k\cos\varphi_n & 1 \\ k\cos\varphi_n & 1 \end{pmatrix}$

1) $(\varphi, p) = (0, 0)$:

$$F = \begin{pmatrix} 1+k & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det F = 2+k$$

\Rightarrow za $k > 0$ je HIPERBOLIČNA (redno)

2) $(\varphi, p) = (\pi, 0)$:

$$F = \begin{pmatrix} 1-k & 1 \\ -k & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det F = 2-k$$

za $0 < k < 4$ je $|\det F| < 2 \Rightarrow$ ELIPTIČNA (stabilna)

za $k > 4 \Rightarrow$ HIPERBOLIČNA
v $k=4$ potane 1-cilj nestabilen!!

BIFURKACIJA

2-cilki za standardno:

$$p_{n+1} = p_n + k \sin \varphi_n$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + p_n + k \sin \varphi_n$$

$$p_{n+2} = p_{n+1} + k \sin \varphi_{n+1} = p_n + k \sin \varphi_n + k \sin (\varphi_n + p_n + k \sin \varphi_n)$$

$$\varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + p_{n+2} = \varphi_n + 2p_n + 2k \sin \varphi_n + k \sin (\varphi_n + p_n + k \sin \varphi_n)$$

$$\sin \varphi_n + \sin (\varphi_n + p_n + k \sin \varphi_n) = 0$$

$$2p_n + 2k (\sin \varphi_n) + \varrho \sin (\varphi_n + p_n + k \sin \varphi_n) = 2\pi j$$

$$2p_n + \varrho \sin \varphi_n = 2\pi \cdot j$$

rešitve φ_n :

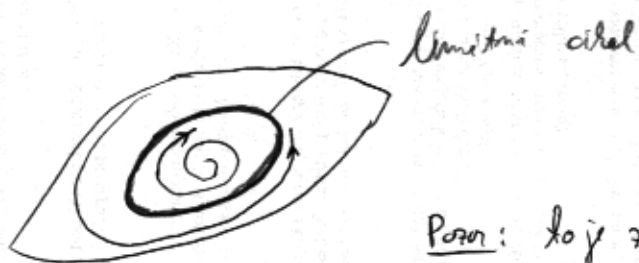
$$p = \pi, \varphi = 0, \pi$$

...

Za zvešeni dinamični sistem $n = 2$ (ravnina).
(zvešeni = ravnina)
kompletne

Če je A omejeno + kompaktno $\sim \mathbb{R}^2$, zmalraj kateriga se zadrožje orbit, in če A ne vsebuje fiksnih točk, potem gre orbita z $t \rightarrow \infty$ proti limitnemu ciklu.

" $\sim 2D$ orbita konvergira ali k fiksnim točkam, ali pa k limitnemu ciklu" \Rightarrow ni kroga

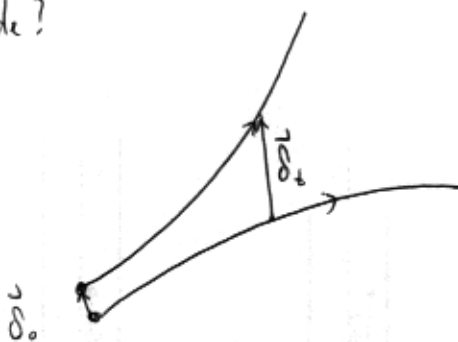


Pozor: to je \neq flow $\sim 2D$, \neq za
npr: Poincaréjevo predstavo $\sim 2D$.

Kako se oddaljujejo bližnje orbite?

$$\vec{\delta}_t = \vec{x}'(t) - \vec{x}(t)$$

$$|\vec{\delta}_t| < 1$$



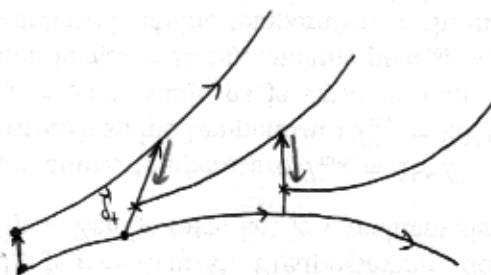
Def:

$$\Lambda_{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{|\vec{\delta}_0| \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{|\vec{\delta}_t|}{|\vec{\delta}_0|} \quad \text{or} \quad |\vec{\delta}_t| \sim |\vec{\delta}_0| e^{\Lambda_{max} t}$$

↑
vračna red je vsajen! ne zametite

Tipično mehanizem od smeri $\vec{\delta}_0$.

Vprašani je limita $|\vec{\delta}_0| \rightarrow 0$ tesnja, zato renormaliziramo $\vec{\delta}_t$!



vsedel tedaj, npr: $|\vec{\delta}_t| \approx |\vec{\delta}_0| e^{Kt}$, ga faktoriziramo na $\vec{\delta}_t \rightarrow \frac{\vec{\delta}_t}{K}$.

Če so K_j vsi renormalizirani faktorji, ki jih deljimo: $|\vec{\delta}_t| = |\vec{\delta}_0| \cdot K_1 K_2 \dots K_r$

$$\Rightarrow \Lambda_{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{|\vec{\delta}_0| \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\sum_{j=1}^r \ln K_j + \ln \frac{|\vec{\delta}_t|}{|\vec{\delta}_0|} \right) \approx \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln K_1 + \ln K_2 + \dots + \ln K_r}{t}$$

{prosečni $\ln K$ }

Lahko pa $\vec{\delta}_t$ računamo direktno iz $F^{(t)}$ in ne iz orbit!

$$F^{(t)} = F^{(t-1)} F^{(t-2)} \dots F^{(0)} \quad \text{skalihrone metode}$$

$$\vec{\delta}_t = F^{(t)} \vec{\delta}_0$$

Če so λ_j lastne F , v_j lastni vektorji in $F^{(t)}$ ni odvisna od $t \Rightarrow$

$$\vec{\delta}_+ = F^{(+)} \vec{\delta}_0 = F^{(+)} \left(\sum_j c_j \vec{v}_j \right) = \sum_j \lambda_j^+ c_j \vec{v}_j = \sum_j e^{t \cdot \ln \lambda_j^+} \cdot c_j \vec{v}_j$$

Λ_{max} je \approx liston suud $\max(\ln \lambda_j^+)$ st. $\ln \Lambda_{max}$!

Če li lil žički svetla \perp na \vec{v}_{max} , misl vsižj nemešine nagle.

Deterministični kaos $\equiv \Lambda_{max} > 0$ korig posod (niso za celke)
 (\approx hiperbolni celi \approx gosti)

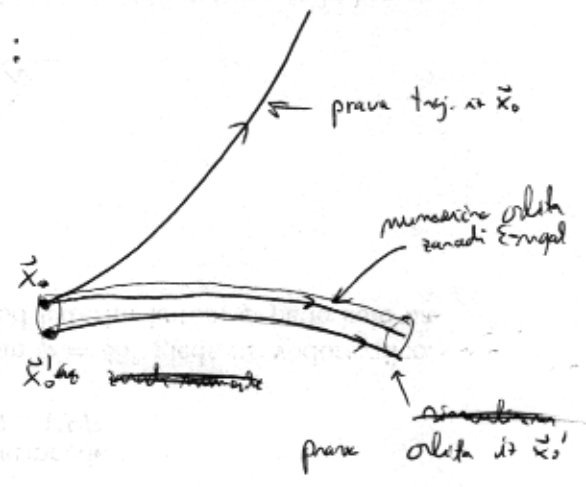
st. pojucini (zar z.p.) je > 0 , $\bar{\Lambda} = \int dx \Lambda_{max}(x) > 0$

Ker $\delta_t \sim e^{\Lambda_{max} t}$ je lega menapredljiva po čam $\approx \frac{1}{\Lambda_{max}}$

(meduljni pjav; galeb $\alpha '60$,
kolibica ~ 1900)

Ali lahko žaupamo? JA

Isred o žučemjje (shadowing):
 (za malatne žačtome nježevor)



Λ_{max} ustane smei \vec{v}_{max} , λ_j pa ostale λ_j .

Spektr Ljapunov eksponentov:

$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^m$

$$\Lambda_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\lambda_j(F^{(t)})|$$

fajn, če potamo $F^{(t)}$ analitično, nica nepraktično (zadostitvene metode)

Λ_{max} je geometrijsko povezanje dolžin - 1d prostornine

če so $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ po velikosti, bo povezanje prvine dol λ_1 in λ_2

$$V_{(2)}^{(t)} \sim V_{(2)}^{(0)} \cdot \lambda_1^t \cdot \lambda_2^t$$

$$\vdots$$

$$V_{(k)}^{(t)} \sim V_{(k)}^{(0)} \cdot \lambda_1^t \cdot \lambda_2^t \cdot \dots \cdot \lambda_k^t$$

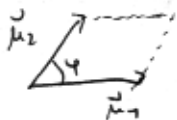
$$V_{(k)}^{(t)} \sim V_{(k)}^{(0)} \cdot \lambda_1^t \cdot \lambda_2^t \cdot \dots \cdot \lambda_k^t$$

↑ prostornina paralelipipeda $\sim k$ -dim.

Če je paralelipiped 2 vektorjev \vec{u}_i , je

$$V^{(2)} = \sqrt{\det\{\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j\}}$$

Npr.: $V^{(1)} = |\vec{u}_1|$



$$V^{(2)} = \sqrt{\begin{vmatrix} \mu_1^2 & \mu_1 \mu_2 \cos \varphi \\ \mu_1 \mu_2 \cos \varphi & \mu_2^2 \end{vmatrix}} = \sqrt{\mu_1^2 \mu_2^2 \sin^2 \varphi} = \mu_1 \mu_2 \sin \varphi \quad \checkmark$$

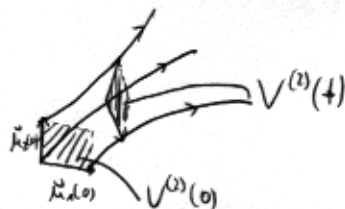
$$\Lambda_1 \equiv \Lambda_{max} > \Lambda_2 > \Lambda_3 > \dots$$

Def:

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 + \dots + \Lambda_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{V^{(n)}(t)}{V^{(n)}(0)}$$

$\vec{u}_k(t) \propto$ k-ti vektorji mnogih dimenzij. Na začetku npr. ONB, potem pa

$$\vec{u}_k(t) = F^{(t)} \vec{u}_k(0)$$



Numerično rešene, ker so $\vec{u}_k(t)$ vedno bolj linearno odvisni, pa se razpikujejo se!

Vsebuje ključno reortogonalizacijo - Gram-Schmidt:

imamo $\vec{u}_k(t)$, ki niso ONB: konstruiramo nov set $\vec{u}'_k(t)$, ki bodo ONB
 $\vec{u}'_i \cdot \vec{u}'_j = \delta_{ij}$

$$1) \quad \vec{u}'_1(t) = \frac{\vec{u}_1(t)}{|\vec{u}_1(t)|} \quad d_1 = |\vec{u}_1(t)|$$

$$2) \quad \vec{d}_2 = \vec{u}_2(t) - (\vec{u}_1(t) \cdot \vec{u}_2(t)) \cdot \vec{u}'_1(t)$$

$$d_2 = |\vec{d}_2|$$

$$\vec{u}'_2(t) = \frac{\vec{d}_2}{d_2}$$

$$3) \quad \vec{d}_j = \vec{u}_j(t) - \sum_{k=1}^{j-1} (\vec{u}'_k(t) \cdot \vec{u}_j(t)) \cdot \vec{u}'_k(t)$$

$$d_j = |\vec{d}_j|$$

$$\vec{u}'_j(t) = \frac{\vec{d}_j}{d_j}$$

postopoma $V^{(2)}(t) = d_1 \cdot d_2 \cdots d_n$

Če renormaliziramo vektore, kjer so norme vektorjev $d_j(\tau)$, $\tau = 1, \dots, T$,
 potem imamo

$$\Lambda_1 + \dots + \Lambda_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\prod_{\tau=1}^T \prod_{j=1}^n d_j(\tau) \right) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{j=1}^n \ln d_j(1) + \dots + \ln d_j(T)$$

Ker \bar{y} $\Lambda_{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (\ln d_1(1) + \dots + \ln d_1(T))$ { povprečni $\ln d_1$ }

\bar{y} $\Lambda_{\bar{y}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (\ln d_{\bar{y}}(1) + \dots + \ln d_{\bar{y}}(T))$
 \uparrow
 velikosti $d_{\bar{y}}$ d vseh renormalizacijah

V nekaterih sistemih presava med eksponenti Λ_i in drugimi lastnostmi, npr. lastnosti ali dimenziji atraktorja.

Koplan-Yorke: če je K max, da je $\sum_{i=1}^K \Lambda_i \geq 0$

\Downarrow

dimenzija Lyapunova $D_L := K + \frac{\sum_{i=1}^K \Lambda_i}{|\Lambda_{k+1}|}$

hipoteza $D_L = D_A$ informacijski dimenziji atraktorja

Simetrije: + konservativni: $\text{div } \vec{g} = 0$ Liouvilleov izrek

$\sum_j \Lambda_j = 0$

+ disipativni: $\sum_j \Lambda_j < 0$

+ Hamiltonski (kanonični): pari $\Lambda_i, -\Lambda_i$

+ zvezni sistem: en $\Lambda = 0$ (parni oddelki orbita)

+ zvezni avtonomi: $E = \text{konst.} \Rightarrow$ še druge $\Lambda = 0$ (parni \perp na energijsko ravnino)
 (parni \perp na energijsko ravnino)
 morda tudi zaradi presov

Primeri

a) premik na krogu $x_{n+1} = x_n + d \pmod{1}$

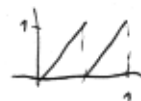
$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \Rightarrow \Lambda = 0$

b) zagnata preklona $x_{n+1} = 2x_n \pmod{1}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = F = 2$

$F^{(1)} = 2^t$

$\Rightarrow \Delta_t = 2^t \delta_0 \Rightarrow \Lambda = \ln 2$



c) Arnoldova mreža

STATISTIČNE LASTNOSTI

Korrelacijska funkcija:

Zelo pomembne v statistiki fiziki:

- fazijski prehodi:
 - v točki prehoda red dolgega dolega (finite T) quantum

- za transport
- fluktuacijsko-disipacijski izrek

opazljiva $a(x) : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$

fazna projeccija: $\langle a \rangle = \int_{\Pi} a(x) d\mu(x)$; $\int_{\Pi} d\mu(x) = 1$

↳ pravda: invariantna mera
 $\mu(A) = \mu(\phi^{-1}(A))$

Np.: $p_{n+1} = p_n + K \sin \varphi_n$

$\varphi_{n+1} = \varphi_n + p_{n+1} \pmod{2\pi}$

opazljiva lahko $a = \varphi, \cos 3\varphi, p, \dots$

Ali je možno a restarimo $a(x_0)$ ali $a(x_t)$? NE, fazna projekcija ni odvisna od časa.

φ_0 $\varphi_1 = \varphi_0 + p_1$
 \downarrow

$\langle \varphi_0 \rangle \stackrel{?}{=} \langle \varphi_1 = \varphi_0 + p_1 \rangle$

$\langle a(x_t) \rangle = \int d\mu(x_0) a(x_t) = \int d\mu(\phi^t(y)) a(y) = \int d\mu(y) a(y) = \langle a \rangle$

nova prom -
 $y = x_t$

mera je invariantna

$$C_{ab}(t, t') = \langle a(t) b(t') \rangle - \langle a(t) \rangle \langle b(t') \rangle$$

za invar. mero

$$\langle a(t-t') b(0) \rangle - \langle a \rangle \langle b \rangle$$

prej zaminira avtokorelacijska funkcija: "spomin neke spremenljivke"

$$C(t) = \langle a(t) a \rangle - \langle a \rangle^2$$

* Korelac. najučinkovitej računamo preko FFT in Wiener-Hinčinovega izraha

$$FFT(C(t)) = \langle |FFT(a(t))|^2 \rangle$$

↑
 povprečno powerspektra
 $O(N \cdot T \ln T)$

direkten račun $C(t)$ bi bil $T^2 \cdot N$

* Pri $C(t)$ odstopimo produkt povprečij, da je $C \equiv 0$, če a in b nista korelirani, i.e., za nekorelirane je $\langle ab \rangle = \langle a \rangle \langle b \rangle$

ERGODIČNOST

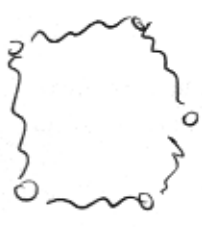
Opaziti statistično fizika: zgotovo številna

časovno povprečje \equiv časovnemu za krog na z.p. (ni za cilje)

$\overline{a(x_0)} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(x_t) dt$ oz. $\frac{1}{T} \sum_{t=0}^T a(x_t)$

Če y sistem ergodičen, pričalajmo ekviparticijo.

≈ 1959 Los-Alamos FPU

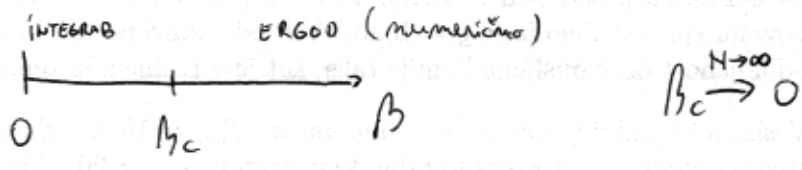


harmonični
ni ergodičen

↑
normalni razini = meinterintegrirani
formi

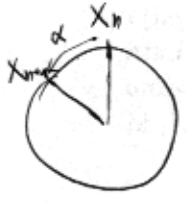
$$H = \sum \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2}k(x_{i+1}-x_i)^2 + \frac{1}{4}(x_{i+1}+x_i)^4$$

Niso našli ergodičnosti!! PRESENEČENJE



Rigorni dokaz ergodičnosti za malo sistemov

Zgled: pomik na krožnici (splane torusa)



$$X_{n+1} = X_n + \alpha \pmod{1}$$

je ergodičen za irracionalen α .

app. 9. n Arnolda "Ergodic problems of classical..."
razdelila faktor, ni periodičnih orbit, ...

Numerično jasno, dokaz pa ni enostaven (Weyl)

noviji dokaz Fourier $\langle a \rangle = c_0$, $\bar{a} =$ omrežje, kar je geod. vrsta omejena za irrac. α
BORING! a mekatere lastnosti funkcije "neravnanne".
Potrebni močnejši pojmi kot le ergodičnost.

- pridelitev prvih števil potene 2^n

če je $2^m = 5.1... \cdot 10^7$, mač zanima 5-ka.

Kako je dolet: $C_n = \log_{10} 2^n \pmod{1}$

prva cifra je 1: če $\log_{10} 1 \leq C_n < \log_{10} 2$ ← se zvedimo potence "7"
2: $\log_{10} 2 \leq C_n < \log_{10} 3$

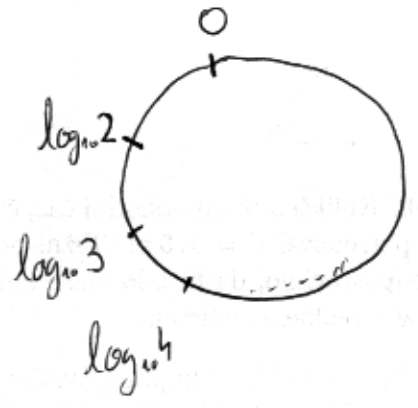
voika, cifra c i $\log_{10} c \leq C_n < \log_{10}(c+1)$

$$C_n = \log_{10} 2^m = m \cdot \log_{10} 2 \pmod{1}$$

$$= m \cdot \alpha \pmod{1}$$

$$\alpha = \log_{10} 2$$

PREMIK NA KROGU !



Ker je $C_n = n \cdot \alpha$ ergodična, bo verjetnost za
 mejo cifra c ena tega intervalčka!

$$p(2) = \log_{10} \frac{3}{2} \approx 0.18 \quad p(1) = \log_{10} 2 \approx 0.30 \quad p(c) = \log_{10} \frac{c+1}{c} = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{c}\right)$$

$$p(7) = \log_{10} \frac{8}{7} \approx 0.06 \quad p(9) = \log_{10} \frac{10}{9} \approx 0.04$$

$$\sum_{c=1}^9 p(c) = \log_{10} 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{10}{9} = 1 \quad \checkmark$$

• Bernfordov zakon: "Kako pogosto kopava π permitrom na krogu?"

preve številke raznih šolčin (reke, računi, Jaroslava, ...)

Abramowitz tabela 2.3 (70 konstant)

Cifra	#	verjetnost	teorija
1	10	0.30	0.30 3.0 ✓
2	7	0.23	0.18 5.3 ✓
3	0	0	0.12 3.7 SLABO
4	2	0.06	0.09 2.9 ✓
5	3	0.1	0.08 ✓ 2.4
6	3	0.1	0.07 ✓ 2.0
7	1	0.03	0.06 1.7
8	1	0.03	0.05 1.5
9	3	0.1	0.04 1.3 SLABO

Ekvivalentna def. ergodnosti: (izel o ergodnosti)

Sistem ergodien \Leftrightarrow vsaka invariantna množica ima
merno 0 ali 1.

Dobro. npr. da \exists invariantna A, $\mu(A) < 1$.

karakteristična funkcija $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in A \\ 0 & ; \text{nič} \end{cases}$

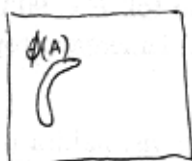
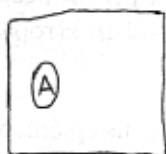
$$\langle \chi_A \rangle = \mu(A)$$

če $\exists x_0 \notin A$ pa $\overline{\chi_A}(x_0) = 0$ \rightarrow ~~X~~

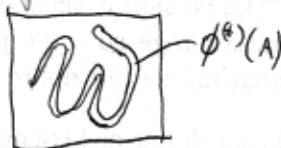
MEŠANJE

Možna je zbirna last ergodnost (mešanje \Rightarrow ergodnost, ergodnost \nRightarrow mešanje)

invariantna A=B $\Rightarrow \mu(\phi^t(A) \cap A) = \mu(A)$
 $\mu(A) = \mu(A)^2 \Rightarrow \mu(A) = 1, 0$



...



p dolgem času $\chi \phi^t(A)$ "razmeša"

Def: \exists poljubni A in B $\subseteq \Omega$ velja

MEŠANJE

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(B \cap \phi^t(A)) = \mu(A)\mu(B)$$

za merljive sisteme z -t!

\exists karakterističnih funkcijama A in B to zapišemo

$$\mu(A) = \langle \chi_A \rangle \quad \mu(B) = \langle \chi_B \rangle$$

$$\mu(B \cap \phi^t(A)) = \langle \chi_B(x_0) \chi_A(x_t) \rangle$$

$$\langle \chi_B \chi_A(t) \rangle \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \langle \chi_A \rangle \langle \chi_B \rangle$$

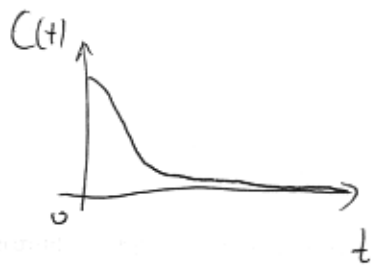
Spličano: Arnoldov izrek

mešanje \Leftrightarrow

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle a(t) b(t) \rangle = \langle a \rangle \langle b \rangle$$

\exists poljubni funkciji a, b $\in L^2$

Kodarsijke funkcije padajo proti 0!

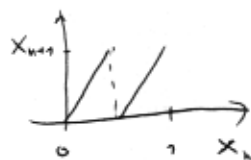


za stabilizacijo fizike namenjamo tudi hitrost padanja!

za mešanjske sisteme (npr. žagosta) je treba: $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(B \cap \phi^{(t)}(A)) = \mu(A)\mu(B)$ {zaradi def. invariantnosti}

"weak mixing" $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [\mu(B \cap \phi^{(s)}(A)) - \mu(A)\mu(B)] ds = 0$

Zgled: žagosta predelava $X_{n+1} = 2 \cdot X_n \pmod{1}$



v binarnem zapisu imamo simbolično dinamično, premisljemo na levo

imamo množice, ki imajo določene notranje cifre, npr.: $1^* \equiv [\frac{1}{2}, 1]$
 $\emptyset^* 0 \equiv [\frac{1}{8}, \frac{7}{8}] \cup [\frac{5}{8}, \frac{7}{8}]$
 $\mu(1^*) = \frac{1}{2}$
 $\mu(1^* 0) = \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}$

$A = (.s_1 s_2 \dots)$ $s_j \in \{0, 1, *\}$
 \uparrow niso nujno najmanjše
 $\phi^t(A) = (. * s_1 s_2 \dots)$

moj bo redaj $A = (.s_1 s_2 \dots s_m *) \leftarrow$ fiksnih m' cifer
 $B = (.p_1 p_2 \dots p_n *) \leftarrow$ fiksnih n' cifer

$\mu(A) = 2^{-m'}$
 $\mu(B) = 2^{-n'}$

$\phi^{(t)}(A) = (. \underbrace{** \dots *}_{t} s_1 s_2 \dots s_m *) \quad \geq t > m$

$B \cap \phi^{(t)}(A) = (. p_1 \dots p_n * \cap . \underbrace{** \dots *}_{t} s_1 \dots s_m *) = (. p_1 \dots p_n \underbrace{* \dots *}_{t-n} s_1 \dots s_m *)$

$$\mu(B \cap \phi^{(t)}(A)) = 2^{-(m+m')} = \mu(A)\mu(B) \quad \checkmark$$

može množico lahko sestavimo iz mnogih skupin A, B; za dovolj velik t velja mešanica pogoj.

Kaj pa nezamrznjeni pogoj. Ali je m.p.: mešanica dovolj, da opazimo m.p.: difuzija?
NE!

DETERMINISTIČNA DIFUZIJA

Kot difuzija včasih razumemo stohastični proces, m.p. naveden hgor, kjer je posledica deterministične dinamike.

normalna difuzija $\sigma^2 \sim t$ ali v prostoru $\ln \sqrt{t}$ daleč

~~del~~ manjša izjava Gaussov proces, kjer nile drugi moment določen, ampak tu ni nič

Glavni rezultat bo \uparrow fluktuacija - disperzija izred \uparrow koeficient f v nevarnosti \uparrow transport v nevarnosti

mele sledimo p_n, difuzija $\langle (p_n - p_0)^2 \rangle \approx 2Dt$

OT.
$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \langle (p_n - p_0)^2 \rangle$$
 \leftarrow pramo povprečje

mp: $\vec{x}_{n+1} = f(\vec{x}_n)$

Če j p_{n+1} p_n + g(x_n)

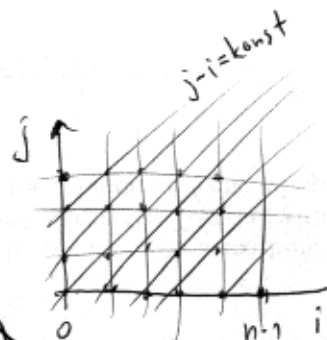
$p_1 = p_0 + g(\vec{x}_0)$, $p_2 = p_0 + g(\vec{x}_0) + g(\vec{x}_1)$

$$p_n = p_0 + \sum_{i=0}^{n-1} g(\vec{x}_i)$$

$$D = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2m} \left\langle \left(\sum_{i=0}^{m-1} g(\vec{x}_i) \right)^2 \right\rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2m} \sum_{i,j=0}^{m-1} \langle g(\vec{x}_i) g(\vec{x}_j) \rangle$$

Za invariantno mero ρ od realne kovanice

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2m} \sum_{i,j=0}^{m-1} \underbrace{\langle g(\vec{x}_i) g(\vec{x}_j) \rangle}_{C(j-i)}$$



simetrična $\langle g(\vec{x}_0) g(\vec{x}_2) \rangle = \langle g(\vec{x}_0) g(\vec{x}_{-2}) \rangle$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2m} \left(m \cdot C(0) + 2(m-1)C(1) + \dots + 2 \cdot (1)C(m-1) \right)$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2m} \sum_{l=-(m-1)}^{m-1} (m-|l|) C(l) = \frac{1}{2} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{m-1} \left(1 - \frac{|l|}{m} \right) C(l)$$

Če naj bo D Grenen merna $C(l)$ zagotovno padati
 $\rightarrow \frac{|l|}{m} C(l) \rightarrow 0$

$$D = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} C(l) = \frac{1}{2} (C(0) + \sum_{l=1}^{\infty} C(l)) \quad \text{Green-Kubo}$$

integral korelacijske funkcije

$C(l)$ merna padati dovolj hitro, da je D Grenen, npr. $C(l) \sim \frac{1}{l^\alpha}$
 $\alpha > 1$

0 visjih momentih D ne pre nič, le o drugem.

$$\langle (\Delta p_m)^2 \rangle = 2Dt$$

normalna difuzija

$$\langle (\Delta p)^2 \rangle \sim t^2$$

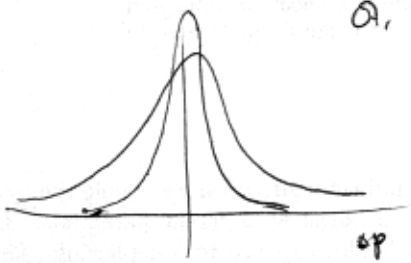
balistično

$$\langle (\Delta p^2) \rangle \sim t^\alpha$$

anomolna difuzija

Za Gaussovski proces y : $\langle (\Delta p_m)^{2m+1} \rangle = 0$

$$\langle (\Delta p_m)^{2m} \rangle = (2m-1)!! (2Dm)^m$$



a. parametar odmitar y

$$p(\Delta p, m) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dm}} e^{-\frac{\Delta p^2}{4Dm}}$$

$p(\Delta p, m)$ zadržava difuzijski karakter

$$\frac{\partial p}{\partial t} = p(\Delta p, m+1) - p(\Delta p, m) = \frac{\partial^2 p}{\partial (\Delta p)^2}$$

ENTROPIJA

termodinamika:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \leftarrow \text{ni evol. f. stanja}$$

↑
endirek. f. stanja

Clausius
Carnot

statistična:

$$S = k_B \ln \Omega$$

(izoliran sistem)
mikrokanonični

Boltzmann

število mikrostanj, enota dolžine k_B, α, \log

$$T = \frac{\partial S}{\partial U}$$

za klasični plin N-delcev

(v temperaturnem stanju)
kanonični

$$\Omega = \frac{\int d^3p d^3x e^{-\beta H}}{h^{3N} N!}$$

← mekikijski delci: Gibbsov paradoks: je prazen, da je
Gibbs že pred kvantno! S ekstenzivna
 $\propto N$

mera za "nered" porazdelitve $\sim e^{-\beta H}$, saj je ~~funkcija~~ \sim

$$S = k_B \beta \sum f_i E_i - k_B \ln Z, \quad \text{če je } f_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z}$$

$$= -k_B \sum f_i \ln f_i$$

informacija:

porazdelitev $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

$$S = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$$

Shannon
informacijska entropija (v bitih $\Rightarrow \log_2$)

Količina informacije:

npr.: a) lovanec $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow S = \log_2 2 = 1$

en dogodek (glb, cifra) da en bit informacije

b) če je $p_1 = 1, p_2 = 0 \Rightarrow S = 0$

nič informacije; že vnaprej vemo izid

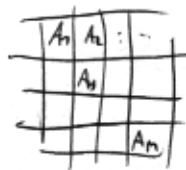
informacijska entropija je vedno $0 < S < \log_2 M$
 ↑
 če so vsi $p_i = \frac{1}{M}$

Vse te so entropije slabj. Mi dinamično entropije, pravzaprav "entropij rate".

Za določene sisteme vedno za teoretično do čaka t , vedno bolj natančno.
 Z.p. Npr. za $t=10$, vedno 2 mesta, za $t=20$, 4 mesta ...

Dinamični sistem "producira informacijo". Kako hitro, to so dinamična entropija.

Particija prostora Ω .



$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j$$

predelki A_i so poljubni.

invariantna mera da verjetnost, da smo v A_i

$$\mu_{i_1} = \mu(A_{i_1})$$

Orbito bomo nadomestili z zaporedjem A_{i_t} , in izračunali količino informacij z tak opis.

$$S_1 = - \sum_{i=1}^n \mu_{i_1} \log_2 \mu_{i_1}$$

$$\mu_{i_1, i_2} = \mu \left(\underbrace{A_{i_2} \cap T^{-1}(A_{i_1})}_{A_{i_1, i_2}} \right)$$



it i1 običajno ~ i2

$$S_2 = - \sum_{i_1, i_2} p_{i_1, i_2} \ln p_{i_1, i_2}$$

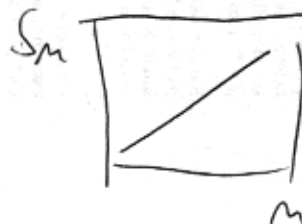
⋮

$$A_{i_1, i_2, \dots, i_m} = A_{i_m} \cap f^{-1}(A_{i_{m-1}}) \dots \cap f^{-(m-1)}(A_{i_1})$$

$$S_m = - \sum_i p_{i_1, i_2, \dots, i_m} \ln p_{i_1, i_2, \dots, i_m}$$

boljše informacije, do opazno vidimo, če nos zamine
ome v laterem predstoku je.

Za različne S_m naravná $\sim m$



$$S_{\infty} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S_m}{m}$$

za določeno zvečno delitev A_i .

S_{∞} se lahko odzime od A_i . Če je zvečna gostota, se vse S_m večeje.

A rate v limiti $m \rightarrow \infty$ ima limito

$$S_{KS} = \sup_{\{A_i\}} S_{\{A_i\}}$$

Kolmogorov-Sinai

dinamična entropija (metrična)

Velja

$$S_{KS} \leq \int d\mu \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i(x)$$

popečna rata po kolmogorov-Ljapunov

K-sistem, če je $S_{KS} > 0$

za tipične Hamiltonske se velja za enakost (Perin)

$$S_{KS} = \left\langle \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i \right\rangle$$

popečna S_{KS} se pritiima max. Ljap.
(ne se čisto enako)

Pri dinamični entropiji so vseine vezjetnosti ju. Če nas zanima le, kateri zapredja so moine, a. kateri A_{i_1, \dots, i_n} so neposame, pten j to TOPOLOŠKA entropija.

N_M y sterilo partij A_{i_1, \dots, i_n} , z katero j $f(A_{i_1, \dots, i_n}) \geq 0$.

↓

topološka

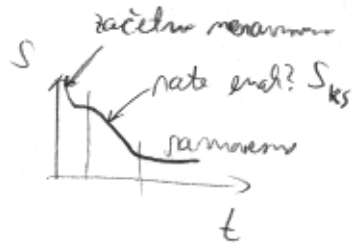
$$S_T = \sup_{\{A_i\}} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \ln N_M$$

velja

$$S_T \geq S_{KS}$$

topološka dinamična

topološka meri # možnih orbit. povezava termodinamske in S_{KS}



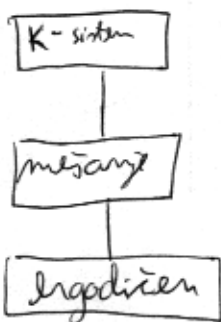
Velja:

$$N_{\text{orbit}} \sim e^{S_T \cdot M}$$

za praktične sisteme $S_T > 0$, število orbit naraste eksponentno s periodo.

za integralne tipično plinamsko.

~~Zgled - izagoda prehitava~~



$$\langle \lambda_{max} \rangle > 0$$
$$S_{KS} > 0$$

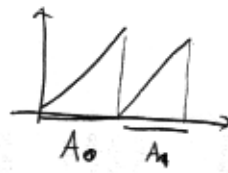
relaksacija

premik na krogu

Zygod

zagosta prostokola

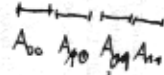
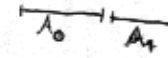
$$x_{n+1} = 2x_n \pmod{1}$$



$$M=2$$

$$A_0 = [0, 1)$$

$$A_1 = [1/2, 1)$$



↳ • 10*

$$A_{i_1, i_2, \dots, i_m} = 0. i_1 i_2 \dots i_m *$$

$$f(A_{i_1, \dots, i_m}) = 2^{-m}$$

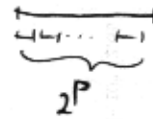
$$S_n = - \sum_{i_1, \dots, i_m} f(A_{i_1, \dots, i_m}) \ln f(A_{i_1, \dots, i_m}) =$$

$$= - \sum_i \frac{1}{2^m} \ln 2^{-m} = + m \ln 2$$

$$S_{\{A_i\}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \ln 2$$

Koja druga zbilna particija? A je li optimalna?

mp: na 2^p velikih delova, $M=2^p$.



posmatrajte je na drugo, let ce ziceno z A_{i_1, \dots, i_p} ,

mp: za $p=2$ z $A_{00}, A_{01}, A_{10}, A_{11}$.

$$\Rightarrow S_n^{(new)} = S_{n+p}$$

$$S_n^{(new)} = (n+p) \ln 2 \Rightarrow S_{\{A_i\}} = \ln 2$$

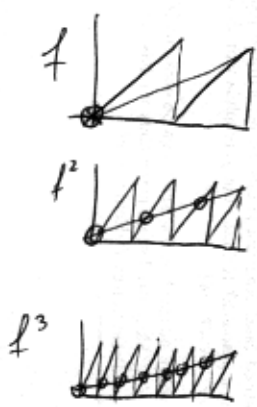
izlaze $\ln 2$, da je $\ln 2$ je maksimum

$$S_{KS} = \ln 2 = \lambda$$

neparnih partacij $N_m = 2^m$, $N_{\emptyset} = 1$

$S_T = \ln 2 = B_{KS}$

cilov



$N(\text{perioda}=1) = 1$

$N_2^{(\text{cilov})} = N(\text{perioda}=2) = 2$

$N(\text{perioda}=3) = 4$

$N(\text{perioda}=t) = 2^{t-1}$

$N(\text{perioda} \leq t) = 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{t-1} = 2^t - 1 \sim e^{t \cdot B_{KS}}$

ni cikla = oblik $\overline{A_0 A_1 \dots A_t}$

\Downarrow
delj $2^t - 1$
 \uparrow 0, 1, ..., t, ki ni $\in \mathbb{N}$!

Kajsa particija A_0, A_1 je par podm. Velja

$f(A_0) = A_0 \cup A_1$

$f(A_1) = A_0 \cup A_1$

$f(A_j) \cap A_i = \emptyset$
ali $A_i \subseteq f(A_j)$

Če velja

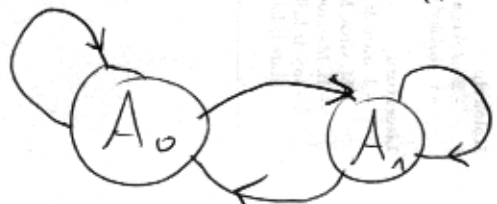
$f(A_j) = \bigcup_k A_k$

, $z \neq j$; korej A_j se preklapa

\cup unija cilih, ne unija velj

$A_k \Rightarrow$ Markovska particija.

\rightarrow simbolična dinamika (ustvarimo $z \in \mathbb{N}$ obsevanje) linearno



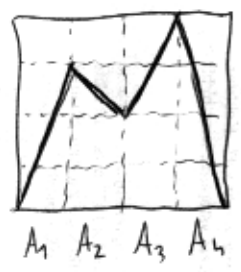
transitivni graf:

ciferi 0 lahko sledi $\{0, 1\}$

ciferi 1 lahko sledi $\{0, 1\}$

Npr.: za graf

Markovska puticija

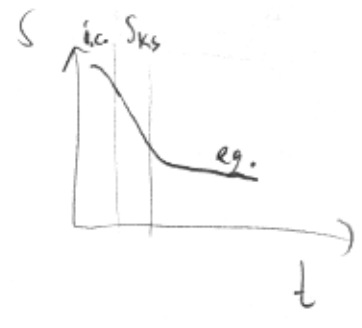
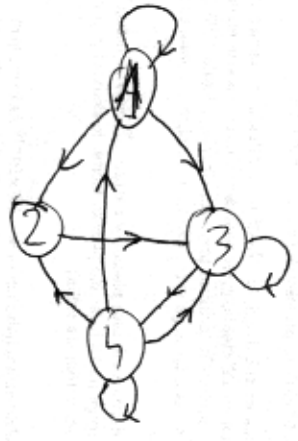


$$f(A_1) = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

$$f(A_2) = A_3$$

$$f(A_3) = A_3 \cup A_4$$

$$f(A_4) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$



MARKOVSKI PROCESI

Dinamični brez spomina:

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$$

$$U A_j = \Omega$$

fazni prostor Ω , partije $A_j, j=1, \dots, m$

verjetnosti $\mu(A_j)$

$$\sum \mu(A_j) = 1$$

(lahko tudi praline na ~~sej~~ partije, in si mislino, da gledamo evolucijo verjetnosti pralidelcev)

Kje bomo ob naslednjem koraku je odvisno le od zdajšnjega stanja, ne pa od zgodovine.

Prehodna matrika P nam da verjetnosti za prehode med "stanji" A_j .

$$P_{m_2 m_1} = \frac{\mu(A_{m_2} \cap \mathcal{F}(A_{m_1}))}{\mu(A_{m_1})}$$



verjetnost, da iz $A_{m_1} \rightarrow A_{m_2}$, če smo bili v A_{m_1} .

stohastični
matrika

$$\sum_{m_2=1}^m P_{m_2 m_1} = 1 = \frac{\mu(\mathcal{F}(A_{m_1}))}{\mu(A_{m_1})} \quad \text{"verjetnosti se druzijo"}$$



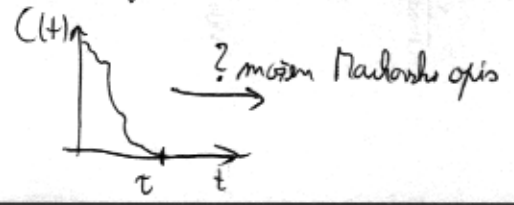
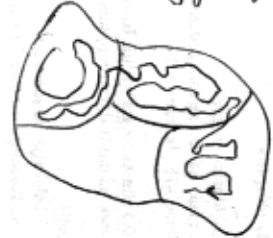
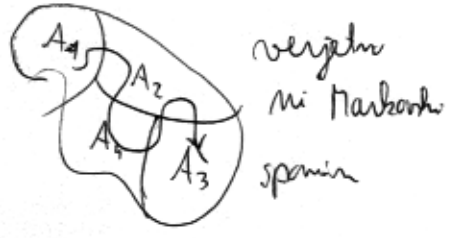
P lahko vedno definiramo, Markovski proces pa je, ko je verjetnost za

$$P_{m_3 m_2 m_1} \equiv (m_1) \rightarrow (m_2) \rightarrow (m_3) \equiv P_{m_3 m_2} P_{m_2 m_1} \quad || \circ$$

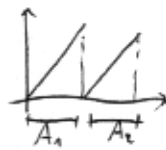
prehoda matrike \equiv ni spomina med koraki

Torej le časovno medlozina P , fazini $M \equiv$ Markov chain

Markovski opis je "enostaven", lepi izred. Zelo pomembno področje (konvergenca algoritmov, google PageRank, fizika)



Npr. za žago prešilavo



$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_1 = 1 \quad \text{invariantni vektor}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \lambda_2 = 0$$

Netočna entropija evokarna: $A_{i_1 i_2} = A_{i_2} \cap f^{-1}(A_{i_1})$

$\mu_i = \nu_i$ (komponente invariantnih vektorjev)

$$S_2 = - \sum_{i,j} \nu_i P_{ji} (\ln \nu_i + \ln P_{ji})$$

$$\mu_{i_1 i_2} = P_{i_2 i_1} \nu_{i_1}, \quad \mu_{i_1 i_2 i_3} = P_{i_3 i_2} P_{i_2 i_1} \nu_{i_1}$$

$$S_n = - \sum_i \nu_i \ln \nu_i - n \sum_i \nu_i \sum_j P_{ji} \ln P_{ji}$$

$$S_{KS} = - \sum_j \nu_j \sum_i P_{ij} \ln P_{ij}$$

za S_3 upoštevaj, da je $P_{i_3 i_2} = P_{i_2 i_1}$

Tudi topološka:

Def: topološka prehodna matrika

$$T_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \quad A_i \cap f^{-1}(A_j) \neq \emptyset \\ 0 & ; \quad \text{nič} \end{cases}$$

st. neposrednih zaporedij poticaj \mathcal{P}

$$N_n = \sum_i \underbrace{T_{i i_2} T_{i_2 i_3} \dots T_{i_{n-1} i_n}}_{n-1} = \sum_{i,k} (T^{n-1})_{i,k}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^T T^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

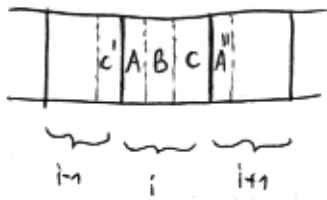
za $n \rightarrow \infty$ pomembna le največja lastna vrednost T , $\mu_i = K$

$$N_n \times K^{n-1} \Rightarrow S_T = \ln K \quad \text{topološka entropija}$$

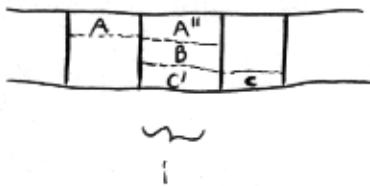
za žago je $T = 2 \cdot P$ in $K = 2 \cdot \lambda_1 = 2 \Rightarrow S_T = \ln 2$

Naloga 18 it vaji: sklopiljene pletenke pozitivne

→ celice



↓ ena iteracija

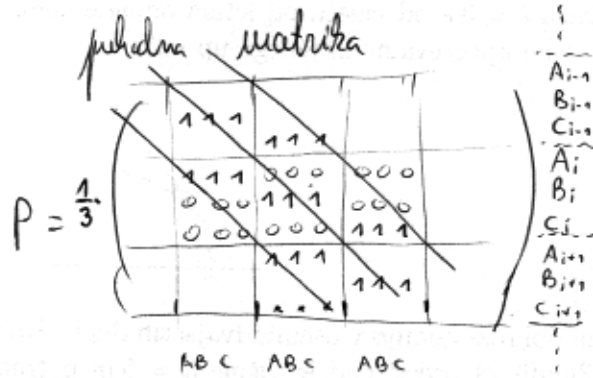


možna analitična obravnava:
~~sklopiljena~~ gradbeno ~ vzhodni deli
 za PBC

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix} = F D F^{-1} \quad F_{mm} = e^{i \frac{m \cdot m}{N} 2\pi}$$

$$\Delta = \left(\frac{2\pi}{N}\right)^2 \begin{cases} D_0 = 1 \\ D_1 = \frac{1}{3}(1 + 2\cos\frac{2\pi}{N}) \end{cases}$$

za celice A_i, B_i, C_i je



blok-tridiagonalna, če je neskončen trakt

Začetni "pulsi" ~ neki celice bo difuzional

$$\langle [i(t) - i(0)]^2 \rangle = D \cdot t$$

$$\sigma^2 \text{ prazdelitve } P\hat{x}(0) \text{ ga } \sim D \cdot t, \quad D = \frac{1}{3}$$

če je linearn sistem velik N , pride do raba $t^* \sim \frac{N^2}{D}$

~ tudi prvi temeljni čas prija Thoulessov čas

$$\sigma. \text{ energija } E^* = \frac{1}{t^*}$$

(vpliv robnih pogojev)

Preziranje karte ("riffle shuffling")

$N=3$ karte ① ② ③. Počasi tako, da kupa razdelimo na dva (4:2 ali 2:1) in zaporedoma jembujemo karte iz druge in drugega kupa.

①|②③ ali ①②|③

To je Richardsonov proces med permutacijami:



↓

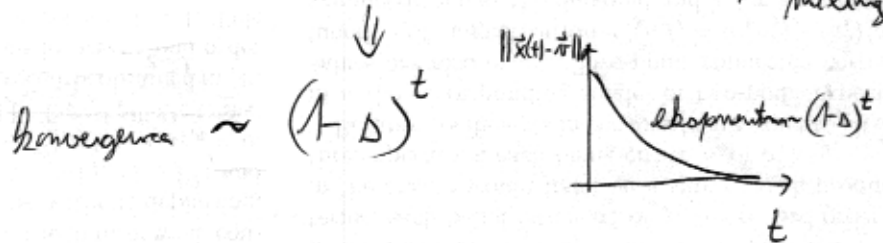
Prehodna matrika P

$$P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 123 & 132 & 213 & 231 & 321 & 312 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 123 \\ 132 \\ \hline 213 \\ 231 \\ 321 \\ \hline 312 \end{array}$$

lastne vrednosti so $\lambda = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, 0$

$\vec{v} = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ vs permutacije vs enakost verjetne

Kako hitro konvergiramo k \vec{v} ? Gap $\Delta = 1 - \lambda_2 = \frac{3}{4}$ določa mixing time



Za 52 fant je potrebnih 5-7 iteracij (P. Diaconis)

Za žepotepom žnli preej itaaintu) ka jf lila dmanika itanofa penih ma simbolit $\{0, 1\}$.

Spleno lakho ~ neritit primat upalno simbolno dinakt.

Bernoullijer premit:

poseben primer Markovitel verig. (diskretni stohastični proces)

imejno dogodbe $A_i = 1, \dots, m$ (m različnih izidov, npr.:

ob vsakem času, j verjetnost za dogodbi A_i p_i , $\sum_{i=1}^m p_i = 1$.

to oznain $B(p_1, p_2, \dots, p_m)$

Npr. fer lovanec $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

ob vsakem času t mor dogodbi $A_i^{(t)}$, ki ga lakho opizemo s cifo $a_t \in \{0, \dots, m-1\}$
 ↑
 simboli = abeceda

itide potazo za ne časa lakho zapizemo z

$$\underline{a} = (\dots \underbrace{a_{-2} a_{-1} a_0 a_1 a_2 \dots}_{\text{preteklost}} \uparrow \underbrace{\dots}_{\text{prihodnost}})$$

trenutni izid

dujano nekončno zaporedje simbolov

časovna evdnaja j peridena σ , ki penkre piba v desno

$$\sigma \underline{a} = (\dots a_{-2} a_{-1} a_0 a_1 a_2 \dots)$$

↑

"shift map"

Vrplconem j $S_{KS} = -\sum_{i=1}^m p_i \ln p_i$

Če so vsi $p_i = \frac{1}{m}$, potm je $B(\frac{1}{m}, \dots) = \text{žaga } \times_{KS} = m \times \ln m$ (mod 1)
 $S_{KS} = S_T = \ln m$

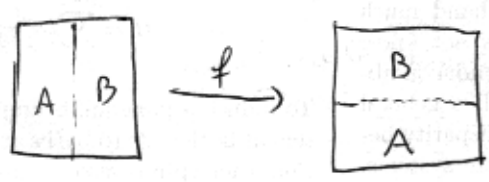
verjetnost za katero zgodnje dogodke je $P(a) = \prod_{j=-\infty}^{\infty} p_j$.

Če ~~mas zrima samo m dogodke~~ Bernoullijev premit so najbolj "različni" sistemi.

Zgled Peharčka preslitara ("bakin's map")

$$\Pi = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$(X_{n+1}, Y_{n+1}) = \begin{cases} (2x_n, \frac{y_n}{2}) & ; 0 \leq x_n \leq \frac{1}{2} \\ (2x_n - 1, \frac{y_n + 1}{2}) & ; \text{sicer} \end{cases}$$



- obravnava površino
- stretch-fold
- je pa nereverzno

če zaledinamo

$$X_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 2^{-k} = (\dots c_1 c_2 \dots)$$

$$Y_n = \sum_{k=0}^{-\infty} c_k 2^{k-1} = (\dots -c_2 c_1 c_0 \dots)$$

$$(X_n, Y_n) = (\underbrace{\dots c_2 c_1 c_0}_{Y} \cdot \underbrace{c_1 c_2 c_3 \dots}_{X})$$

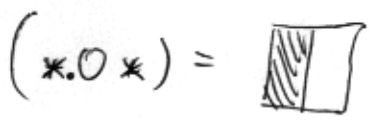
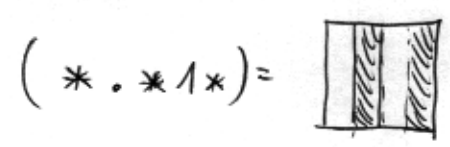
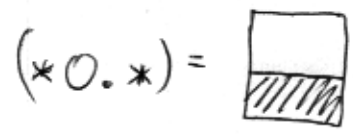
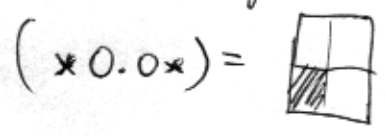
$$f(x_n, y_n) = (x_{n+1}, y_{n+1}) = (c_2 c_1 c_0 c_1 \cdot c_2 c_3 \dots)$$

premit v levo

$$\equiv B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

bakin's map malo podobna žagostli, a:

• je obrnljivo, žagostka ni (stuka prilega): lahko služi konservativnim sistemom



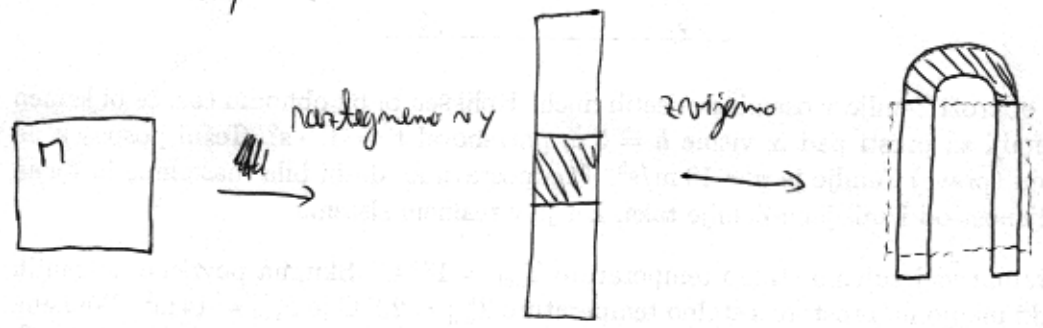
$S_{KS} = \ln 2$

Da se pokaže, da sta Bernoullijeva procesa izomorfna, če imata enako S_{KS} . (dohaj mi motvam; Gutwiler), npr.: $B(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \equiv B(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$

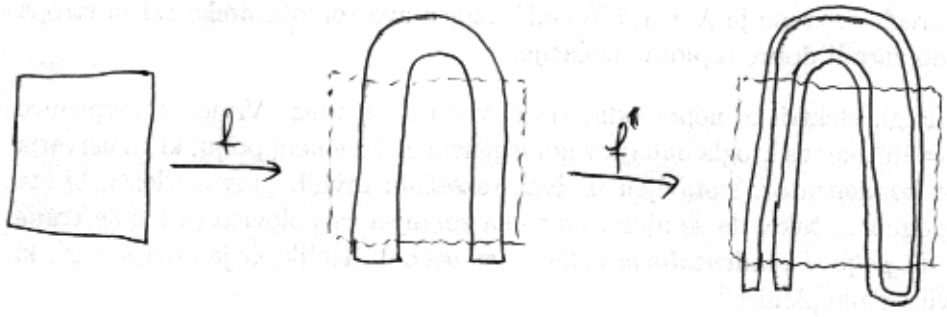
Se boljše bi bilo imeti zvezi sistem s simbolično dinamiko.

Smaleova palček (S. Smale '67) "kovrskoe" map

zvezi stretch & fold



obdržimo le tisto, kar se vnaša v kvadrat



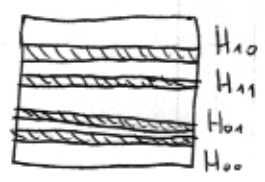
$f^{(2)}$ na kvadratu

Kosi, ki ostanejo po $f^{(n)}$ so Π



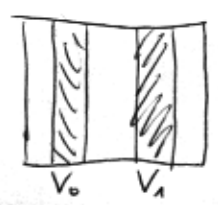
~~ENERGIJA~~

po $f^{(2)}$ so Π



prvi indeks od sedaj smo pisali

skladu H_0, H_1 po $f^{(n)}$ j



$$V_0 = f(H_0) \quad , \quad H_0 = f^{(-1)}(V_0)$$

$$V_1 = f(H_1) \quad , \quad H_1 = f^{(-1)}(V_1)$$

slučaj H_0, H_1 po $f^{(2)}$ j



$$V_{i_2 i_1} = V_{i_1} \cap f(V_{i_2})$$

$$H_{i_1 i_2} = f^{(2)}(V_{i_2 i_1})$$

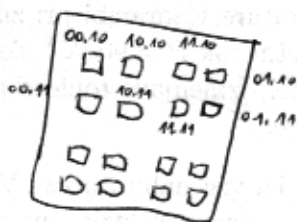
če to nadaljujemo, imamo M iteracij 2^m razp. $V_{i_1 \dots i_m}$ in

2^m vedovanih $H_{i_1 \dots i_m}$.

Točka, ki po $t \rightarrow \infty$ ostane v M so zagotovo v H . Če se pa tudi v $t \rightarrow -\infty$ liče v M , pa morajo biti tudi v V .

Invariantna množica tač B je pesel obeh.

za dva točka so to



Zarodirajmo indele $H_{i_1 \dots i_n} \ni (* \cdot i_1 i_2 \dots)$

$$V_{j_1 \dots j_n} \ni (j_1 \dots j_n \cdot *)$$

$$H_{i_1 \dots i_n} \cap V_{j_1 \dots j_n} = \left(\underbrace{j_1 \dots j_n}_V \cdot \underbrace{i_1 i_2 \dots i_n}_H \right) \equiv \underline{a}$$

vsaka tačka iz B lahko zapišemo z dvojnjo-neskončnim α (presel dveh Cantorjevih množic) H in V

Dinamika:

$$f(\underline{a}) = \text{presel na levo} = (\dots j_n \dots j_1 i_1 \cdot i_2 i_3 \dots)$$

imamo kot petarvka ali $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$! Simbolična dinamika na $\{0,1\}$

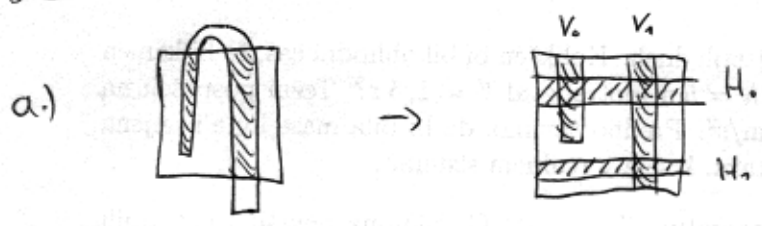
Vse znane predeto periodičnih orbitah

$$f^{(p)}(a) = a, \text{ če } p \text{ ne čife pravi}$$

$$(\dots \overline{a_1 \dots a_p} \cdot \overline{a_1 \dots a_p} \dots)$$

$$\text{lahko je } 2^p \Rightarrow S_T = \ln 2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{jezno je} \\ \text{izomorfno z } B(1,1) \end{array} \right)$$

Kaj pa, če podber ni idealna:

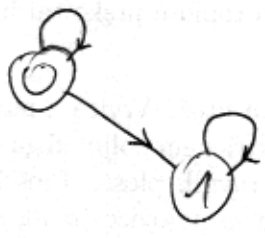


ni prečka; $V_0 \cap H_1 = \emptyset$

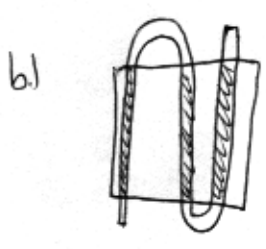
prevedane orbita:

simbolična dinamika
o slavnica

ni zapredja ~~10~~ 10 na, oz.
za 1 pride vedno 1.



1 → 0 prevedane



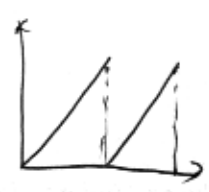
podobno kot prej, le trojiski zapis

Zakaj Smaleova podber?

generično vs bližini homotopijskih
prečišč?

1d perikare -1-

Spremi se žagoto



$\Pi = [0, 1)$ tudi so več D je to prave, (male + goste)

odrekan linearn

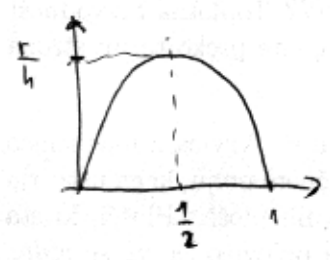
Sedaj bomo pogledali nelinearne 1d, imajo bolj razlogja \rightarrow celice, do parametro premenj.

če moj imamo $\lambda > 0$, mora perikara "nestegano", ker je želimo, da postika $\Pi \rightarrow \Pi$ (konservativna), je mora tudi "prejano" moraj na Π .

\Rightarrow 1d faktorje so strah-fold in neobrnjive

(za obrnjive las so 2d perikar ali 3d flow flow)

Logistična perikara:

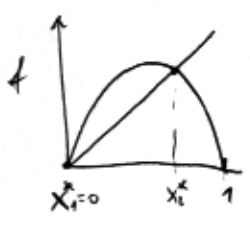


$X_{n+1} = r \cdot X_n (1 - X_n) = f(X_n)$ pri volitih x pa omajita, ppa: mora
 $\Pi = [0, 1)$ \uparrow normalna populacija
 * možna x je mora r-x (ekspozitna racion)

omajno x na $0 \leq v \leq 1$

Perioda p=1 (filma teku)

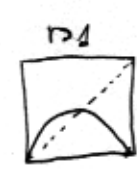
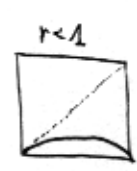
$f' = r(1-2x)$ $f'(0) = r$



če je $|f'(x^*)| > 1$ nestabilna p.o.
 < 1 stabilna p.o.

$x_2^* = r x_2 (1 - x_2) \Rightarrow x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$ $|f'(x_2^*)| = r |1 - 2(1 - \frac{1}{r})| = |2 - r|$

$x_0^* = 0$ $|f'(x_0^*)| = r$



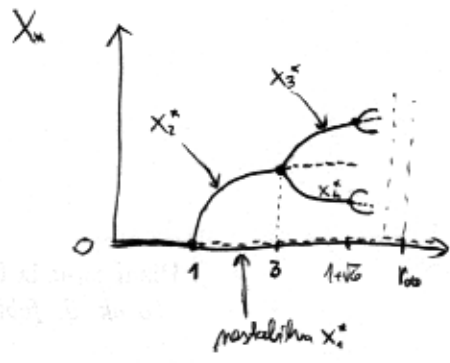
pojani se mora p.o. pri r=1

Perioda $p=2$:

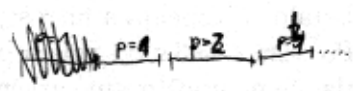
$$x^* = f(f(x^*)) = r^2 [x^*(1-x^*)] \cdot [1-rx^*(1-x^*)]$$

residue $\left. \begin{matrix} x^* = 0 \\ x^* = 1-\frac{1}{r} \end{matrix} \right\}$ se znani $p=1$

$$x_{3,4}^* = \frac{r \pm \sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}$$

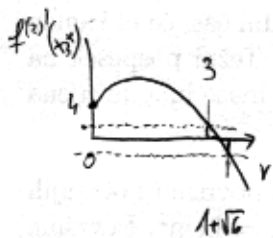


lut

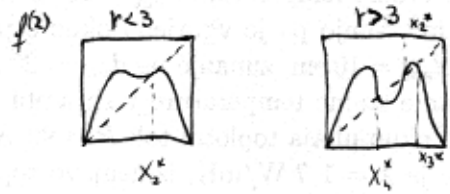


Stabilnost:

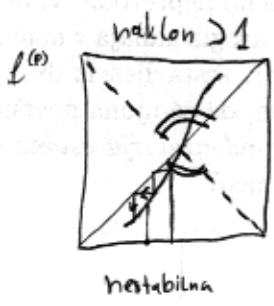
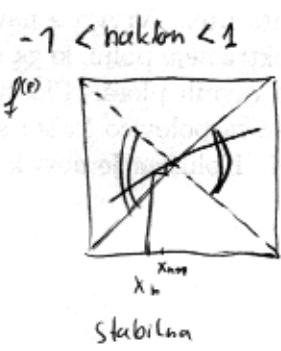
$$f^{(2)'} = f'(x^*) f'(f(x^*)) = r^2 (1-2x_3^*) (1-2x_2^*) = -r^2 + 2r + 4$$



$$\begin{aligned} -r^2 + 2r + 4 = 1 &\Rightarrow (r-3)(r+1) = 0 \Rightarrow r=3 \\ -r^2 + 2r + 4 = -1 &\Rightarrow r = 1 \pm \sqrt{6} \end{aligned}$$



Stabilnost



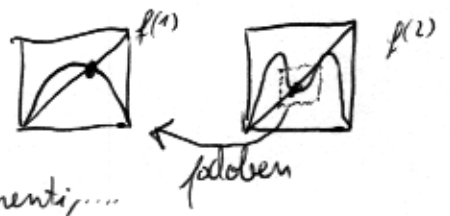
Ob določeni r periodična orbita spremeni stabilnost in nastanejo p.o. z daljšo periodo — BIFURKACIJA.

do sedaj bifurkacije pri $r_1=1$, $r_2=3$, $r_3=1+\sqrt{6}$, Pri r_p se pojavi stabilna p.orbita dolžine 2^p . — prvijeta periodo.

- Kako se obnašajo r_p , ali divergirajo? $r_\infty = ?$

Ne divergira!

zaradi kvadratne oblike



Ube vrste "farni pehal", samopodobnost, stabilni eksponenti, ...

Feigenbaum je pokazal, da

$$\frac{r_p - r_{p-1}}{r_{p+1} - r_p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 4.669... \equiv \delta \quad \{\text{stabilni eksponent}\}$$

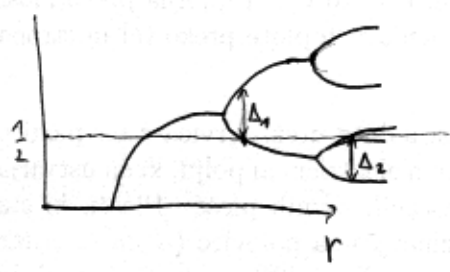
UNIVERZALNA ZA PNOBE NELIN. PRESLIKAVE; ko z dovoljno mali poldoben kvadratni!

delnice stabilnih intervalov se geometrijsko zmanjšujejo!

zato je $r_\infty < \infty$, $r_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} r_p = 3.57...$

$$|r_\infty - r_p| \sim \frac{1}{\delta^p}$$

Naj bo Δ_p razdalja med $x = \frac{1}{2}$ in točko na 2^p ciklu, ki je najbližja $\frac{1}{2}$ točki r_p , kjer je ena izmed točk cikla tudi $\frac{1}{2}$ (o. j. $f^{(2^p)}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$)
 o. j. $x = \frac{1}{2}$ je točka cikla $f^{(2^p)}$!



$$\Delta_p = f^{(2^{p-1})}(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = f^{(2^{p-1})}(\frac{1}{2}) - f^{(2^p)}(\frac{1}{2}) \Big|_{r=r_p}$$

$$\frac{\Delta_p}{\Delta_{p+1}} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} -2.50... \equiv \alpha \quad \{\text{stabilni eksponent}\}$$

Oba eksponenta α in δ sta univerzalna, ne samo za logistično, ampak generično ko pride do podvajanja periode!

• Kaj je ρ za r_∞ ? {skala šilo bifurkacijskega, kjer je delo; atraktor}
 o. j. stabilnosti, ki so v bistvu gola, a dolgih period

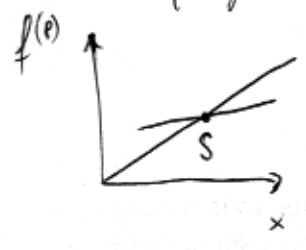
za $r=4$ je kaos: $\lambda = \ln 2$

za $r_\infty < r < 4$ pa kaotični atraktor

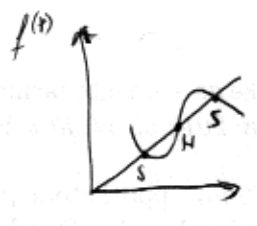
PREHOD V KAOS z BIFURKACIJAMI

Tipi bifurkacij

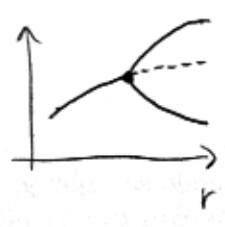
I. podvojitev periode



\Rightarrow

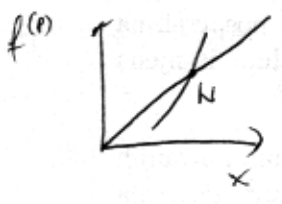


bifurkacijski diagram

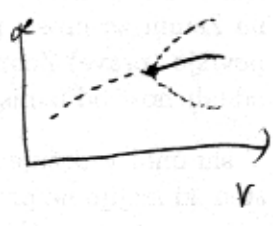
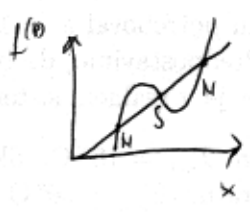


"pitchfork" bifurcation

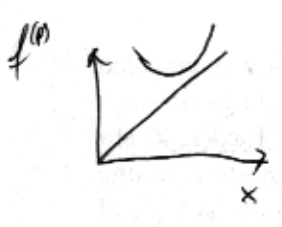
II. obrojna podvojitev



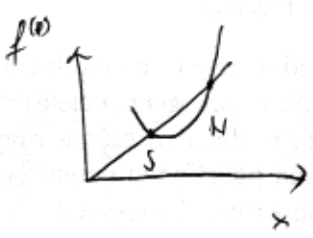
\Rightarrow



III. tangentna



\Rightarrow



- Do vedaj le o cikli periode 2^p , kaj pa ostale?

izrek Šarkovskega (1964): za ^{zvešne} 1d f preslikave

uredimo naravno števila: $S = \underbrace{3, 5, 7, 9, \dots}_{\text{vsaj liha}}, \underbrace{2 \cdot 3, 2 \cdot 5, \dots}_{2 \cdot \text{liha}}, \underbrace{2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5, \dots}_{2^2 \cdot \text{liha}}, \dots, \underbrace{2^3, 2^3 \cdot 2^2, 2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^2, \dots}_{\text{potenca 2}}$

Če imamo cikel s periodo p , $x^* = f^{(p)}(x^*)$, potem \exists tudi cikel s periodo m , za vsaj m , ki so v S za p .

Npr.: cikel 7 \Rightarrow tudi 9, 11, ...; vsaj razen 3 in 5!

Obratno: če imamo \exists zvešne $f(x)$, ki ima cikel p , nima pa nobenega m , ki je pred p !

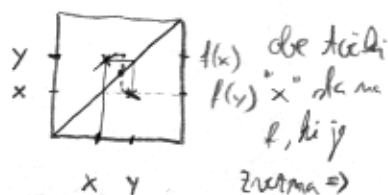
Če imamo cikel $p=3 \Rightarrow$ tudi vse ostale. Za logistično $p=4$ r dve stabilnosti 3

Dokaz: ideja je uporabiti "interval o popolni vrednosti". Ostali nestabilni!

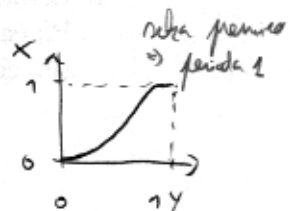
Logistična pri $r=4$:

$p=2$ implicira $m=1$: $\left. \begin{matrix} f(f(x))=x \\ f(x)=y \end{matrix} \right\} f(y)=x$

$$X_{n+1} = 4x_n(1-x_n)$$



nova spremenljivka y_n , $x_n = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} y_n\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos \pi y_n)$



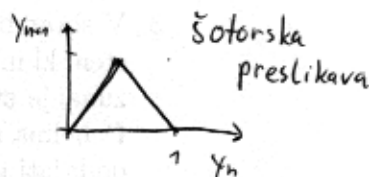
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} y_{n+1}\right) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} y_n\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{2} y_n\right) = \sin^2 \pi y_n$$

\Downarrow

$$y_{n+1} = \pm 2 y_n + 2k \quad k \in \mathbb{Z}$$

če $y_n \in [0, 1) \Rightarrow$

$$y_{n+1} = \begin{cases} 2y_n & ; 0 \leq y_n \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-y_n) & ; \frac{1}{2} \leq y_n < 1 \end{cases}$$



logistična $r=4 \equiv$ šotorski, ki je kaotična (podobna žigasti)

Invariantna mera (gostota) 1d preslikav

• regija $\Omega = [0, 1]$

Kako se meri gostota spremeni s časom:

$$g_{n+1}(x) = \int g_n(y) \delta(x - f(y)) dy$$

{ Frobenius-Bernoulli }
uračba

$$= \sum_{\substack{y_0 \\ f(y_0)=x}} g_n(y_0) \frac{1}{|f'(y_0)|}$$

pri nas dve rešitvi $f(y_0)=x_{n+1}$, im nica x_n in $1-x_n$, ker je f simetrična na $\frac{1}{2}$,

$$g(x_{n+1}) = \frac{g(x_n) + g(1-x_n)}{|f'(x_n)|}$$

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

to meri: nova redčitost invariantne g

Formulu gata propozicija ~~lineare~~ unitaran operator def. nad L^2 funkcijami:

$$f_{n+1} = U f_n$$

Frobenius-Perronov operator U

konstantna vrednost $U \lambda = 1$ ima za lastni vektor invariant. gata.

$$Ug = g \quad \lambda = 1$$

Za ergodicne sisteme f ta lastni v. redgenerisana - invariant. gata f enolična

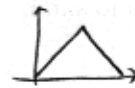
Primer $r=1$:

$$g(4x(1-x)) = \frac{g(x) + g(1-x)}{4|1-2x|} \quad g = ?$$

propozicija α o zatonke preslikave:

$$x = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}y\right)$$

$$y_{n+1} = \begin{cases} 2y_n & 0 \leq y_n \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-y_n) & \frac{1}{2} < y_n \leq 1 \end{cases}$$



invarianta za to f konstantna, $g(y) = 1$

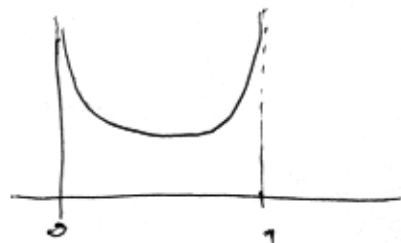
preobrazila α $\frac{dx}{dy} = \pi \sqrt{x} \sqrt{1-x}$

$$g(x) = g(y) \left| \frac{dy}{dx} \right|$$

$$dx = 2 \sin \frac{\pi}{2}y \cos \frac{\pi}{2}y \cdot \frac{\pi}{2} dy = \pi \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} dy$$

invariant. gata

$$g(x) = 1 \cdot \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}$$



Kako računamo f ricar:

$$F-P. \text{ značka } \lim_{n \rightarrow \infty} U^n g_0 = \text{invar.}$$

Hamiltonski sistemi

$\vec{X} = (\vec{q}, \vec{p})$

$\dot{\vec{X}} = J \frac{\partial H}{\partial \vec{X}}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

posledica konzervativnosti (Liouville) in obrnljivosti

Pomembnejši izrek o prvotnosti:

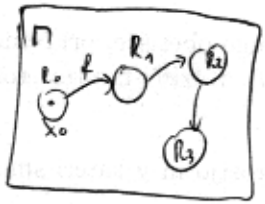
omejen sistem ($E = H(\vec{z}, \vec{p}) = \text{konst.}$ je končna; mi $\vec{z} \rightarrow \infty$ ali $\vec{p} \rightarrow \infty$)

vzamin. točka $\vec{x}_0 = (\vec{z}, \vec{p})$ v fiksni prostori Π in E -odloca R_0

za $\forall E$ in x_0 velja, da je za zadosti velik t $R_0 \cap f^{(t)}(R_0) \neq \emptyset$

{ po zadosti velikem t in točki iz odloce \vec{x}_0 vrnemo poljubno blizu \vec{x}_0 }

D.:



periodična = nek čas t

$R_j = f^{(j)}(R_0) \quad \mu(R_j) = \mu(R_0)$

ker je $\mu(\Pi)$ omejen, mora veljati, da je za vel t presli R_n z enim prekrivanjem množic

$R_n \cap R_s \neq \emptyset$

(ni medveljnih presli ne morejo biti = 0)

\Rightarrow tudi $f^{(n)}(R_n) \cap f^{(n)}(R_s) \neq \emptyset = R_{n+n} \cap R_{s+n}$

$\Rightarrow R_{n+n} \cap R_0 \neq \emptyset$

Posledica: ~~Hitrost~~ entropijsko združenje



skj ho prej in zdaj tudi $\frac{dS}{dt} < 0$!

Hitrost pomen



če so vsi v eni sferi, je $\mu(R_0) \sim 2^{-N} \Rightarrow$ čas, ko se sistem vrne v R_0 je astronomsko velik (več kot vesolje) \Rightarrow ne opazimo

Simetrije in integrali gibanja

Simetrija Noether \rightarrow ohranjene količine

- Npr.: • ciklična koordinata: L ni odvisna od $q_r \Rightarrow p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \text{konst.}$
- invariančnost na prečiščeni času \Rightarrow ohranjena sila $\Rightarrow H = \text{konst.}$

Povezava pa velja za splošne transformacije (\vec{q}, \vec{p}) , pod katerimi ostane L invariantna.

Teorema Noetherjeve (Emmy N.): { Simetrije \leftrightarrow integrali gibanja }

vsaka transformacija koordinat $\vec{z}' = \vec{g}_s(\vec{z}) \quad s \in \mathbb{R}$
 $\vec{g}_0(\vec{z}) = \vec{z}$

moj bo

$$L(\vec{z}', \dot{\vec{z}}') = L_s(\vec{g}_s(\vec{z}), \frac{d}{dt} \vec{g}_s(\vec{z})) = L(\vec{z}, \dot{\vec{z}})$$

\Rightarrow potem je $I = \frac{\partial L(\vec{z}, \dot{\vec{z}})}{\partial \dot{\vec{z}}} \cdot \frac{\partial \vec{g}_s(\vec{z})}{\partial s} \Big|_{s=0}$ konstanta gibanja

$$\frac{dI}{dt} = 0$$

Velja za bolj splošno: $L_0 = L + \frac{d}{dt}(\vec{p}(s, \vec{z}, \dot{\vec{z}}))$ { različna stabilna vrednost }

$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{z}}} \cdot \frac{\partial \vec{g}_s}{\partial s} \Big|_{s=0} - \frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \Big|_{s=0}$ gauge invariance
 { npr. $A \rightarrow A - \nabla \chi, \psi \rightarrow \psi e^{i\chi}$ }

Dobro:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{z}}} \cdot \frac{\partial \vec{g}_s}{\partial s} \Big|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{z}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{g}_s}{\partial s} \Big|_{s=0} \right) \right) =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{z}}} \frac{\partial \vec{g}_s}{\partial s} \Big|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{z}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{g}_s}{\partial s} \Big|_{s=0} \right) \Big|_{s=0}$$

$$= \frac{\partial L(\vec{g}_s(\vec{z}), \frac{d}{dt} \vec{g}_s(\vec{z}))}{\partial \dot{\vec{z}}} \cdot \frac{\partial \vec{g}_s}{\partial s} \Big|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{z}}}$$

inert, ker ni odvisna od s

$$\frac{d}{ds} \left(L(\vec{g}_s, \frac{d}{dt} \vec{g}_s) \right) \Big|_{s=0} = 0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{z}}} \frac{\partial \vec{g}_s}{\partial s} \Big|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{z}}} \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \vec{g}_s \Big|_{s=0} =$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{z}}} \cdot \frac{\partial \vec{g}_s}{\partial s} \right) \Big|_{s=0} = \frac{d}{dt} (I)$$

Primeri:

I.) invarianca na premil enega delca

$$\vec{g}_0 = \vec{g} + v \vec{e}_1$$

$$\Downarrow$$

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \cdot \dot{e}_1 = \vec{p}_1$$

II.) premik vseh delcev

$$\vec{g}_0 = \vec{g} + v \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_N$$

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (1, 1, \dots, 1) = \sum_{j=1}^N p_j$$

IV.) gauge invarianca

$$L = \frac{\mu \dot{x}^2}{2} - \mu g x$$

; ni invar. na premil
 $g_0 = x + v$, jf pa gauge

$$L_0 = \frac{\mu \dot{x}^2}{2} - \mu g(x+v) = \frac{\mu \dot{x}^2}{2} - \mu g x - \underbrace{\frac{d}{dt}(\mu g v t)}_{\Phi}$$

$$\Downarrow$$

$$I = \text{konst.} = \mu \dot{x} \cdot 1 - \mu g t$$

III.) invar. na rotaciji

$$\vec{g}_0 = R_0 \vec{g}$$

$$R_0 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{g}_0}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} R_0 \right) \vec{g} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{g} = \begin{pmatrix} -g_1 \sin \alpha + g_2 \cos \alpha \\ -g_1 \cos \alpha - g_2 \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} g_2 \\ -g_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I = \vec{p} \cdot \begin{pmatrix} g_2 \\ -g_1 \\ 0 \end{pmatrix} = p \cdot g_2 - p_2 \cdot g_1 = L_3$$

$$\text{spinna rotacija } L = \vec{p} \times \vec{g}$$

Vsak integral gibanja zmanjša možnost $\sim \mathbb{R}^{2N}$ za 1 dimenzijo, OT.

prostostnih stopenj za 1.

Npr.: $P = \{p_j = \text{konst.}\} \Rightarrow$ tudi $Q = \{q_j\} = Q(0) + P \cdot t$ je trivialen.

• Koliko konstant gibanja nalina, da bo celotno gibanje $\sim \mathbb{R}^{2N}$ evolutivno?

na $2N$, kar mora vsaka konst. prelo evolutivno gibanje, ki je lahko integrirano da se eno evolutivno zvezo

\Rightarrow LE N konstant gibanja je potrebnih

Integrabilni sistem:

- 1) $\exists N \neq$ integralov gibanja
- 2) so vsi involucijski

$$\{F_j, H\} = 0$$

$$F_j, j=1, \dots, N$$

$(\frac{\partial F}{\partial \vec{p}}, -\frac{\partial F}{\partial \vec{z}})$ je tangenta na $E = \text{konst.}$
 $(\frac{\partial H}{\partial \vec{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \vec{z}})$ je tangenta na $F = \text{konst.}$
 (globalno analitične f.)

$$\{F_i, F_j\} = 0 \quad \forall i, j$$

* neodvisni = gradienti F_j so linearno neodvisni za skoraj vsi \vec{z}
 \Rightarrow tudi vektorske polje ∇F_j so neodvisni

P.O. $\equiv \{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial \vec{z}} \frac{\partial B}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial A}{\partial \vec{p}} \frac{\partial B}{\partial \vec{z}} = \frac{\partial A}{\partial \vec{z}} \cdot \frac{\partial B}{\partial \vec{z}} = (\nabla A) \cdot (\nabla B)$

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Liouville: \Rightarrow potem se da sistem prevesti na kvadrature.

~~z~~ orbita za integrabilni sistem je omejena na $2N - N = N$ dim. prostor!

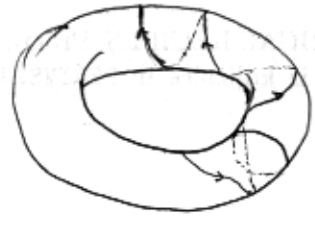
Kral (Arnold):

topologije te plošče je N -dim. torus ($\equiv N$ -lečka o PBC)

{ \Rightarrow treba ne mešati, ker se morajo prenesti meričnega polja}

oz. poskušaj N plošč $F_j(\vec{x}) = c_j$ je torus!

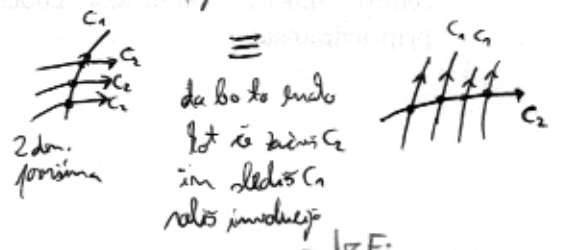
šele po 5. listu, ko greš na integrabilnost.



bres dokaza

Pogoj 2) je pomenben:

c_i so redne polje F_i

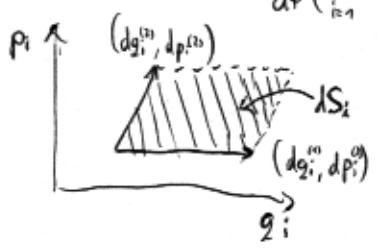


da bo to enako kot se zdi c_2 im sledi c_1 sledi involuciji ∇F_j vekt. polje, ki ga določa $F_j = \text{konst.}$ je tangenta na $F_i = \text{konst.}$

S_j polje je invarianta:

Pri kanoničnih transformacijah smo pokazali, da je $d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2$ simplektni invarianta ("simplektna površina")

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (d\vec{q}_1 \cdot d\vec{p}_2 - d\vec{p}_1 \cdot d\vec{q}_2) = 0 = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N (d\vec{q}_i)_i (d\vec{p}_i)_i - (d\vec{p}_i)_i (d\vec{q}_i)_i \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_i S_i \right)$$

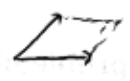


S_i = površina paralelogramnih projekcij $d\vec{x}_1, d\vec{x}_2$ na ravni z_i, p_i

$$dS_i = (d\vec{q}_i)_i (d\vec{p}_i)_i - (d\vec{p}_i)_i (d\vec{q}_i)_i = (d\vec{x}_1)_i \cdot (d\vec{x}_2)_i = \left| \begin{pmatrix} dq_i^{(1)} & dp_i^{(1)} \\ dq_i^{(2)} & dp_i^{(2)} \end{pmatrix} \right|$$

a površino dS_i lahko zapisemo tudi kot

$$dS_i = \oint_{\partial(\Gamma_i)} \vec{p} \cdot d\vec{q}_i = \int_{\Gamma_i} dp_i dq_i$$



↑
površino znatno
kmalo $d\Gamma_i$

$$\sum_{i=1}^N dS_i = \oint_{d\Gamma} \vec{p} \cdot d\vec{q} = \text{invar.}$$

po Stokesu $\oint_{d\Gamma} (a,b) \cdot (dq, dp) = \int_{d\Gamma} \nabla_x(a,b) dq_i dp_i$

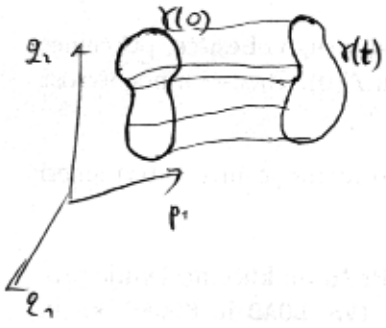
za $(a,b) = (p, 0)$

ddimo $\nabla_x(p, 0) = \left(\frac{\partial p}{\partial p} - \frac{\partial 0}{\partial q} \right) \hat{e}_i$

$\nabla_x(a,b) = (a_y - b_x) \hat{e}_z$

dS_i je diferencialna invarianta, če integriramo \oint neke ne-majhne zanke γ v faznem prostoru \mathbb{R}^{2N} imamo integralsko invarianto (Poincaréjevo):

$$\oint_{\gamma} \vec{p} \cdot d\vec{q} = \text{invar.} = \int_i dS_i$$



zanke \vec{x} -ov ob času $\Theta \equiv \gamma(0)$



več $\vec{x}(0)$ popogni \rightarrow čas $t \equiv \gamma(t)$

$$\oint_{\gamma(0)} \vec{p} \cdot d\vec{q}$$

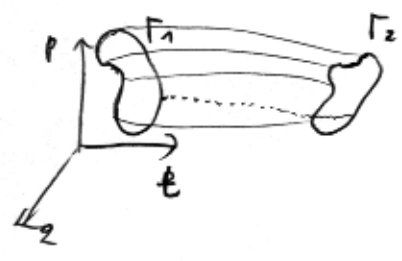


$$\oint_{\gamma(t)} \vec{p} \cdot d\vec{q}$$

• če neč, $\oint_{\Gamma_1} (\vec{p} \cdot d\vec{q} - H dt)$ je invarianta

Γ_1 zanka v razširjenem faznem prostoru (\vec{q}, \vec{p}, t) , $\dim = 2N+1$

$p_{N+1} = -H$
 $q_{N+1} = t$
 $\vec{H} = H(\vec{q}, \vec{p}, t) - H$
 in $\oint \vec{p} \cdot d\vec{q}$



Γ_1 in Γ_2 lahko ob različnih časih, le da objemata isti množ trajektorij

$$\oint_{\Gamma_1} (\vec{p} \cdot d\vec{q} - H dt) = \oint_{\Gamma_2} (\vec{p} \cdot d\vec{q} - H dt)$$

Poincaré-Cartanova integralna invarianta

podobni pima: če H ni odvisen od časa in če sta obe zanki pri enaki energiji

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma_1} \vec{p} \cdot d\vec{q} = \oint_{\Gamma_2} \vec{p} \cdot d\vec{q}$$

kolj plesmo kot Poincaréjeva, ker sta Γ_1 in Γ_2 lahko ob različnih časih

Integralnost hamiltonskih sistema

List 4. (def., izuk Arnolda o torusu)

Integralne invariante (Poincaré, Poincaré-Cartan) nam ne omejuje dimenzija mnogoterosti na kateri se giblje orbita.

Na N -torusu imamo N inducibilnih zank $\Gamma_i, i=1, \dots, N$.

Po Poincaré-Cartanu so vse $\oint_{\Gamma_i} \vec{p} \cdot d\vec{q}$ invariantne.

Če lahko zanko zveemo deformiramo v drugo, objema enak mejo trajektorij.

Kako "preostanimo" enačbe gibanja za integralni sistem? Kanonična transformacija na nove spremenljivke: $(\vec{q}, \vec{p}) \rightarrow (\vec{q}', \vec{p}')$

lahko bi npr.: $p'_i \equiv F_i(\vec{q}, \vec{p})$, v katerih bi imeli $\dot{p}'_i = 0$,

a ena izbrina \vec{q} se posebno lepa - kanonične ekvije in kati $(\vec{q}', \vec{p}') = (\vec{\Theta}, \vec{I})$

~ teh novih koordinat $\vec{\Theta}$ na torusu, je ∇H konstanten \vec{f} in enak $\nabla H = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N, 0)$

H.-). enačbe ~ $\dot{\vec{\Theta}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{I}} = \vec{\omega}$, $\dot{\vec{I}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{\Theta}} = 0$

loti $0 \sim 2\pi$
lepo na torusu
konstante gibajo,
dolžajo torus na katerem smo

Če podostavimo obtočje teh $\vec{\Theta}$, potem vemo

$$\oint_{\Gamma_i} \vec{I} \cdot d\vec{\Theta} = \text{invar} = I_i \cdot 2\pi = \oint_{\Gamma_i} \vec{p} \cdot d\vec{q}$$

Če lahko ekvije izračunamo kot $I_j = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_j} \vec{p} \cdot d\vec{q}$

Ker so I_j konstantni, neodvisni od časa, so funkcije F_j ; $\vec{I} = \vec{I}(\vec{F})$

∃ delov in ekvije:

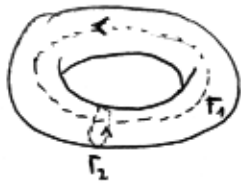
- $\nabla F_j \sim \hat{e}_j$ so baza postna \perp na torusu (torus je površina $F_j = \text{konst.}$)
 - $\nabla F_j \sim \hat{f}_j$ so baza na torusu (tangencialna ravnina), og $\hat{f}_j \cdot \hat{e}_k = \nabla F_j \cdot \nabla F_k = \{F_j, F_k\} = 0$
- Če nekaj izberemo basis \hat{e}_j , recimo I_j , in basis $\hat{f}_j = \vec{\Theta}_j$, potem, ker je $(\nabla H) \cdot \hat{e}_j = -\nabla H \cdot \nabla F_j = \{H, F_j\} = 0$,
je projekcija tega ∇H na $I_j \equiv 0 \Rightarrow$ logj $\dot{I}_j = 0$ in $\dot{\vec{\Theta}}_j = \frac{\partial H(\vec{\Theta})}{\partial I_j} = \omega_j(\vec{I})$, ker H ni odvisna od $\vec{\Theta}$: $\nabla H \cdot \hat{f}_j = \frac{\partial H}{\partial \vec{\Theta}} \cdot \hat{f}_j = \nabla H \cdot \nabla F_j = 0$

n novih kanoničnih spremenljivkah $\vec{\Theta}$ in \vec{I} , \vec{y}

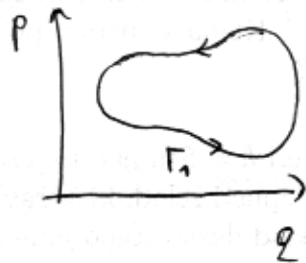
$$H = H(\vec{I})$$

\Downarrow

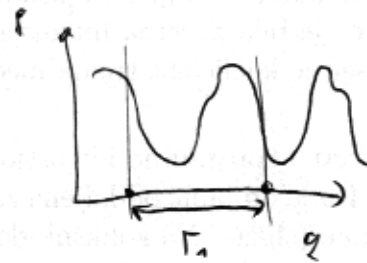
$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{\Theta}} &= \frac{\partial H}{\partial \vec{I}} = \vec{\omega}(\vec{I}) \\ \dot{\vec{I}} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{\Theta}} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \vec{\Theta}(t) &= \vec{\Theta}(0) + \vec{\omega}(t)t \\ \vec{I}(t) &= \vec{I}(0) \end{aligned}$$



Integral $\oint \Gamma_i$ je \oint enemu obhodu, n kd to libracija ali rotacija



libracija

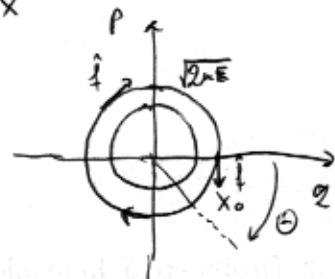


rotacija



Zgled: Harmonični oscilator $n=1d$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\mu \omega^2}{2} x^2$$



$$x = x_0 \sin \omega t$$

$$p = \sqrt{2\mu E} \cos \omega t$$

lopus je kar krožnica; vedno rotacija

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq = \frac{1}{\pi} \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{2\mu E - \mu^2 \omega^2 x^2} dx = \frac{E}{\omega}$$

oz. $H = E = I \cdot \omega$

$$\frac{\partial H}{\partial I} = \omega$$

rešitev $I(t) = I(0)$
 $\Theta(t) = \Theta(0) + \omega t$

$$q = \sqrt{\frac{2I}{\mu\omega}} \sin \Theta = x_0 \sin \Theta$$

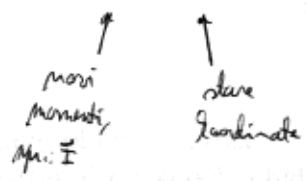
$$p = \sqrt{2I\mu\omega} \cos \Theta$$

Kako x in Θ izraža (q, p) ? Najbolje preko geometrije, vedaj pa kar Θ vedno vektorja
 $\vec{f} = J \nabla H = \left(+\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right) = \left(+\frac{p}{\mu}, -\mu\omega x \right)$, ki je tangenta na krožnico $\rightarrow \tan \Theta = \frac{1}{\mu\omega} \frac{p}{p}$

Hamilton-Jacobi formalizam

kočeno generativna kanonična transformacija iz $(\vec{q}, \vec{p}) \rightarrow (\vec{q}', \vec{p}')$.

Ta naj bo $S(\vec{p}', \vec{q}, t)$



$$\vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{q}} \quad \vec{q}' = \frac{\partial S}{\partial \vec{p}'}$$

kanonična transformacija je kanonična, če obstaja funkcija $K(\vec{q}', \vec{p}')$ za

$$\text{katere velja} \quad \dot{\vec{q}}' = \frac{\partial K}{\partial \vec{p}'} \quad \dot{\vec{p}}' = -\frac{\partial K}{\partial \vec{q}'}$$

velja pa, da je $K = H + \frac{\partial S}{\partial t}$ { variacijske princip, analitičen }
Goldstein

Hamiltonove bodo linearno res, če bo $K=0$.

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \text{a.}$$

$$H\left(\underbrace{\vec{q}}_{\vec{p}}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Hamilton-Jacobijska enačba za $S = S(\vec{q}, \vec{p}, t)$
 H integracijski konstant

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial \vec{q}} \cdot \dot{\vec{q}} + \frac{\partial S}{\partial t} = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} + H = L$$

za H neodvisen od časa je $S = \int dS = \int \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} dt - \text{konst.} \cdot t$

Torej lahko S dolimo tudi kot

akcija

$$S(\vec{p}', \vec{q}) = \int_{\vec{q}_0(\vec{E}, \vec{p}')}^{\vec{q}} \vec{p} \cdot d\vec{q}$$

$\vec{q}_0(\vec{E}, \vec{p}')$ ← začetni pogoj pri f. E in nekem \vec{p}' . To integriramo do \vec{q} .

a to ni koristno, razen če že poznamo vesitev $\vec{q}(t), \vec{p}(t)$!

$$\oint d\theta = \oint_{\vec{I}} d\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{I}}\right) = \oint_{\vec{I}} \frac{\partial^2 S}{\partial \vec{I}^2} d\vec{I} = \frac{\partial}{\partial \vec{I}} \oint_{\vec{I}} \vec{p} d\vec{q} = \frac{\partial(\oint \vec{p} d\vec{q})}{\partial \vec{I}} = 2\pi \quad \checkmark \text{ res } \text{got.}$$

Za 1d. H.-O. li imeli

$$S(\mathbf{p}', q) = S(\mathbf{I}, q) = \int_0^q \vec{p} d\vec{q} = \int_0^q \sqrt{2\mu E - \mu^2 \omega^2 x^2} dx =$$

$$= \int_0^q \sqrt{2\mu \omega I - \mu^2 \omega^2 x^2} dx = \mu \omega \int_0^q \sqrt{\frac{2I}{\mu \omega} - x^2} dx$$

od koder dolimo kot

$$\Theta = \frac{\partial S}{\partial I} = \frac{\mu \omega}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2I}{\mu \omega} - x^2}} \frac{dx}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \arcsin \frac{q}{x_0}$$

Reševanj H.-J. Enačbe, ki je za avtonomni H-kan

$$H\left(\frac{\vec{q}}{2}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}\right) = \text{konst.} = \alpha_n$$

ni enostavno.

Izjema so separabilni sistemi, kjer reda S zapisati kot vsoto

~~$$S(\vec{q}, \vec{z}, t) = S_1(q_1, \vec{z}, t) + S_2(q_2, \vec{z}, t) + \dots$$~~

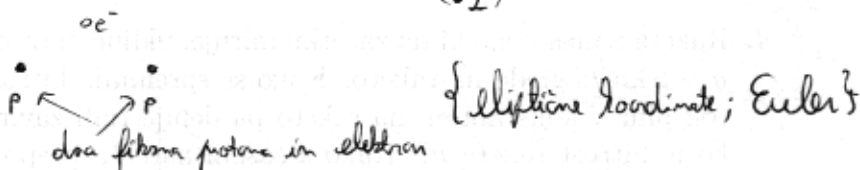
V takem primeru rešujemo vsako koordinato posebej \Rightarrow en integral. Če je H kvadratna funkcija momentov \rightarrow kvadrature in eliptični integrali v najhujšem primeru; vse F_j kvadratne funkcije \vec{p}_j

Integracijske konstante so funkcije $\vec{z} = \vec{z}(\vec{F}) = \vec{z}(\vec{z})$

Separabilni integrali so npr.: • H.-O., • matematično nihalo (Lichtenberg), • Kepler (Goldstein)

• vsi 1d : $H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \Rightarrow V(q) + \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 \frac{1}{2m} = \text{konst.} = E(\mathbf{p}') = E(\mathbf{I})$

• "roditarska ves" :



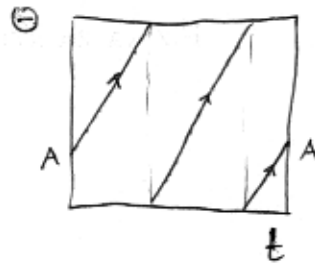
Ni pa separabilnost enako kot integralnost! \exists sistemi, kjer določene gibanja niso kvadratna v gibalnik, npr.: večdelni sistem Todine vrige.

Ne \exists enostaven test, ali je dan sistem integralen, \exists pa "umetni" načini, kako konstruirati integral. sistem (Lichtenberg, p. 39)

Periodično gibanje:

$$\vec{\Theta}(t) = \vec{\Theta}(0) + \vec{\omega}(\vec{I}) \cdot t \pmod{2\pi}$$

$$\vec{I}(t) = \vec{I}(0)$$



kad se merna "ujeti"

$$\omega_1 T = 2\pi m_1 \quad \omega_2 T = 2\pi m_2, \dots$$

Odnosima $\omega_1 : \omega_2 : \dots : \omega_n = m_1 : m_2 : \dots : m_n$

To velja le pri določenih \vec{I} , saj so $\vec{\omega}(\vec{I})$, torej na določenih točkah.

Def: Točka je rezonantna $\Leftrightarrow \vec{\omega}(\vec{I}) \cdot \vec{m} = 0$. • Na takem točkah je gibanje periodično.

≈ 20 to pomeni $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{M}$ - racionalni točki • Gibanje na točkah je ergodično \Leftrightarrow točka ni rezonantna

{ dokaz s Fourierjem, polarno število premet na krogu }

• Lyapunov eksponenti za integralni sistem so = 0.

Dokaz: jemo, ker le linearna divergenca

$$(\vec{I}_0, \vec{\Theta}_0) \quad (\vec{I}_0 + \delta\vec{I}_0, \vec{\Theta}_0 + \delta\vec{\Theta}_0)$$

$$\xrightarrow{t} \vec{\Theta}(t) = \vec{\Theta}_0 + \delta\vec{\Theta}_0 + \vec{\omega}(\vec{I}_0 + \delta\vec{I}_0)t$$

$$= \vec{\Theta}_0 + \vec{\omega}(\vec{I}_0)t + \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \vec{I}} \delta\vec{I}_0 \cdot t + \delta\vec{\Theta}_0$$

$$|\delta\vec{\Theta}(t)| \approx \left| \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \vec{I}} \delta\vec{I}_0 \right| \cdot t$$

Biljardi



Zanimni modeli:

- erostoni : analitično in numerično
- al pletu generičnih lastnosti
- mosterna konstrukcija Primarijone pletitave
- studij kvantnih lastnosti ("valovni ras", kvantne plet, ...)

Prvini tibi kvadratski delca \rightarrow steno (kvadrat = odbojema) $\vec{p}' = \vec{p} - 2(\vec{p} \cdot \vec{m})\vec{m}$

Dimenzija odbojema le od oblike roba.



Γ_1 le $\approx 2D$

Trinarna konstanta je E , ki jo lahko namizimo na $\frac{4}{3}$ ($|\vec{p}|=1$)

Integralni biljardi

1) krog



konstanti : E in rotirna helična doli rediša
 fukvoni :
 • $\omega_1 \sim$ ena rotacija
 • $\omega_2 \sim$ kvadratna tla z majo

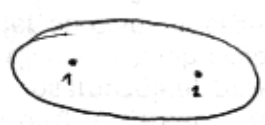
2) pravokotnik



separabilni gibaji $\sim x, y$ oses (kot)
 konstanti : p_x^2, p_y^2

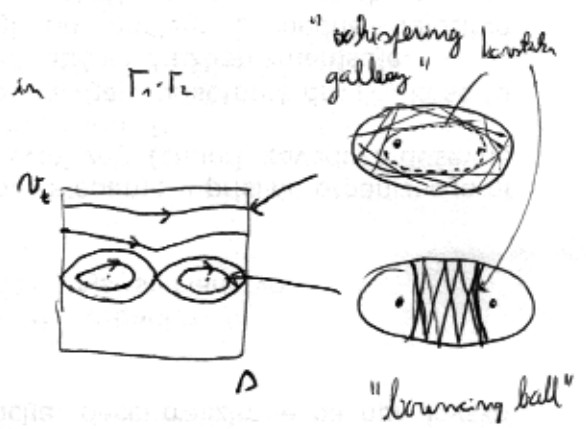
tride Δ_{60}^{60} , Δ_{45}^{45} , Δ_{30}^{30} so integralni

3) elipsa




Primarijone rešine pletkov


konstanti : E in Γ_1, Γ_2



kvadrat : gladki biljard brez potencala je integrabilen \Rightarrow je elipsa

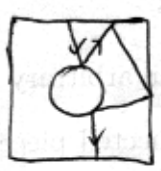
če damo \rightarrow zunanji potencial imamo \rightarrow se drugje $-2-$

4.)  parabola (edini "parabolični" z gladko steno)

"whispering gallery" orbita je "bouncing ball" so pomembna tudi v optičnih aplikacijah
 \downarrow
 stabilna v konveksnih aplikacijah \downarrow stabilna $\&$ $R_1 + R_2 > d$ 

Ergodični aplikaciji:

1) Sinajev aplikacija



je kaotična ($\lambda > 0$)

haci zmad defekativna

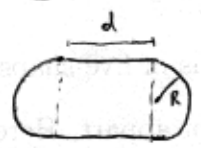
ima "bouncing ball" orbita

2) Diamant



tudi defekativna, a brez stabilnih p.o. \Rightarrow bolj kaotična od Sinajevga
 \downarrow
 hiperbolizacija

3) Bunimovič



tudi kaotična, a ni defekativna.

ima "bouncing ball" orbita

za $d=0$ integrabilna

$d > 0$ kaotična \leftarrow orbita \approx obkroži "d" so manjša stabilna \Rightarrow slabša "kolobarna" ergodičnost
 podoben $\&$ kranjski haci



podoben

• Lahko možno deformirajo roba,



$$r(\varphi) = 1 + \varepsilon f(\varphi)$$

za $\varepsilon \ll 1$: $r' = r - 2x$
 $x = \varepsilon f'(\varphi)$

kanonični par φ in radijus $\Gamma = \frac{r}{1} \sin \varphi$

$$\Gamma' = \sin \varphi' = \sin(\varphi - 2x) =$$

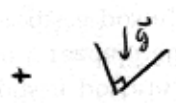
$$\Gamma' = \Gamma - \sqrt{1-\Gamma^2} 2\varepsilon f'$$

$$\varphi' = \varphi + \pi - 2 \arcsin \Gamma = \varphi + \pi - 2\varphi$$

KAN xenanij

• Biljardi o poljmi:

+ magnetno



integral

• nekladna meja, npr: poligonski

↳ entropija = 0
 so prečni razloži

le linearno nestabilni

Taki = racionalni deli $\varphi_i = \frac{m_i}{n_i} \cdot \pi$

so kvaziintegralni (ne torus, ampak genus g - #luknj)

$$g = 1 + \frac{n}{2} \sum \frac{m_i - 1}{m_i}$$

n = najmanjši skupni večkratnik m_i

Npr:



$$g = 2$$



regular

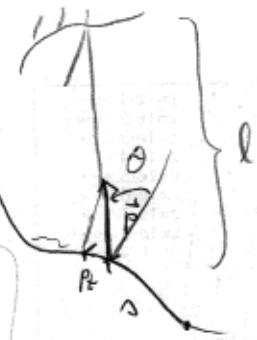


chaotic

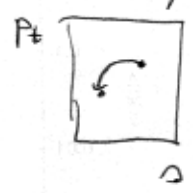
Birkhoffove koordinate

$$\frac{\partial p_1'}{\partial s} = \frac{l - R \cos \theta - R' \cos \theta'}{R R'}, \quad \frac{\partial s'}{\partial s} = \frac{l - R \cos \theta}{R \cos \theta'}$$

$$\frac{\partial p_2'}{\partial p_2} = \frac{l - R \cos \theta'}{R' \cos \theta}, \quad \frac{\partial s'}{\partial p_2} = \frac{l}{\cos \theta \cos \theta'}$$



naravná Poincaréjova sekčna plošina

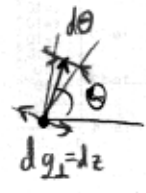


$p_2 = p \cdot \sin \theta$
tangentna gibanja

$\mathcal{N}(s, p_2)$ je predstava Lagrangiana (v npr. (s, θ) ni!).
↳ odnosa prištevno

Stabilnost v krogliniji:

- v fibraciji na Δ (smo na energijski plošini)
- druga smer, v kateri je zadeva trivialna je vzdolž orbite, kjer je $\delta z_{||}$ mehanizem od časa



⊙ kot o fibraciji smeri je preveč razdeljen

↳ le dve koordinati, npr. $\delta \theta, z_{\perp} = dz$

$(\delta z, \delta \theta)$ tako z spremenjata o časom ("smer" in "debelina")

- ↳ + prosti evoluciji
- + kot o steno odbij na steni

+ prosti evolucija: $\frac{d}{dt} \delta \theta = 0 \quad \frac{d}{dt} \delta z = \delta \theta v = \delta \theta$

$$\begin{pmatrix} \delta \theta_{k+1} \\ \delta z_{k+1} \end{pmatrix} = \Pi_F \begin{pmatrix} \delta \theta_k \\ \delta z_k \end{pmatrix}$$

↑ free flight

$$\delta \theta_{k+1} = \delta \theta_k$$

$$\delta z_{k+1} = \delta z_k + \tau_k \delta \theta_k$$

$$\Pi_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau_k & 1 \end{pmatrix}$$

↳ čas letu za k-ti segment



* odboj na steni:



$$\delta z_2^+ = \delta z_2^-$$

$$\delta \theta_2^+ = -\delta \theta_2^- - \frac{2}{R_2 \cos \psi_0} \delta z_2^-$$

↳, kotana normala in odbojni zasuk



$$M_2 = - \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{R_2 \cos \psi_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 & r_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

det M_2 = 1, det M_F = 1 : vata polje le "strog", ni nestabilnosti

Celotna stabilnostna matrica p veči tistik j

$$M = \prod_k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r_k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

det M = 1 ⇔ ohranja površino

- a so tipični sistemi integralni, ko mi ne znamo "rešiti"?
- a so tipični kaotični? $H_0 + \epsilon H_1$

He mo ne drugo (novi sistem)

Naj bo H_0 integralen, torej $H_0 = H_0(\mathbb{I})$.

Če li bil tudi $H_\epsilon = H_0(\mathbb{I}) + \epsilon H_1(\mathbb{I}, \mathbb{O})$ integralen, bi morala \exists globalne rešitve H^{-1} enačbe, oz. nove abaje in faze \mathbb{I}', \mathbb{O}' za H_ϵ .

$$H_\epsilon(\mathbb{I}, \mathbb{O}) = H_\epsilon(\mathbb{I}') = H_0(\mathbb{I}) + \epsilon H_1(\mathbb{I}, \mathbb{O})$$

Isčemo generatorko $S(\mathbb{I}', \mathbb{O})$ transformacije na nove faze in abaje $\left(\mathbb{I} = \frac{\partial S}{\partial \mathbb{O}}, \mathbb{O}' = \frac{\partial S}{\partial \mathbb{I}'} \right)$

$$H_\epsilon \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbb{O}}, \mathbb{O} \right) = H_\epsilon(\mathbb{I}') = \text{konst.}$$

Perturbacijska vrsta:

$$S = S_0 + \epsilon S_1 + \epsilon^2 S_2 + \dots$$

$$S_0 = \mathbb{I}' \cdot \mathbb{O} \quad \left\{ \text{identična transformacija } \mathbb{I}' = \mathbb{I}, \mathbb{O}' = \mathbb{O} \right\}$$

$$H_0 \left(\mathbb{I}' + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \mathbb{O}} + \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial \mathbb{O}} + \dots \right) + \epsilon H_1 \left(\mathbb{I}' + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \mathbb{O}} + \dots, \mathbb{O} \right) = H_\epsilon(\mathbb{I}') = \text{konst.}$$

najnižji red

$$H_0(\mathbb{I}') + \epsilon \underbrace{\frac{\partial H_0}{\partial \mathbb{I}}}_{\omega_0(\mathbb{I}')} \frac{\partial S_1}{\partial \mathbb{O}} + \epsilon H_1(\mathbb{I}') \mathbb{O} = H_\epsilon(\mathbb{I}')$$

Fourierova vrsta za $S_1(\mathbb{I}', \mathbb{O})$ in $H_1(\mathbb{I}', \mathbb{O})$

$$S_1(\mathbb{I}', \mathbb{O}) = \sum_{\vec{m}} S_{1, \vec{m}}(\mathbb{I}') e^{i \vec{m} \cdot \mathbb{O}}, \quad H_1 = \sum_{\vec{m}} H_{1, \vec{m}}(\mathbb{I}') e^{i \vec{m} \cdot \mathbb{O}}$$

\Downarrow

$$H_0(\mathbb{I}') + i \epsilon \sum_{\vec{m}} \omega_0(\mathbb{I}') \cdot \vec{m} S_{1, \vec{m}}(\mathbb{I}') e^{i \vec{m} \cdot \mathbb{O}} + \epsilon \sum_{\vec{m}} H_{1, \vec{m}}(\mathbb{I}') e^{i \vec{m} \cdot \mathbb{O}} = H_\epsilon(\mathbb{I}')$$

Če naj bo desna stran neodvisna od θ , torej konst., se morata mediji dva člena pokazati, da sta členu.

⇓

$$S_{1, \vec{m}} = \frac{i H_{1, \vec{m}}(\vec{I}')}{\vec{m} \cdot \vec{\omega}_0(\vec{I}')}$$

problem majhnih imenov!! konsta ne konvergira, če je $\vec{\omega}_0 \cdot \vec{m} = 0$

~~RESONANČNI TORUS~~ RESONANČNI TORUS

podoben kot divergira
kd resonančno obližina p.o.

Na resonančnem torusu nemotenega sistema H_0 perturbacijska meta divergira.

⇓

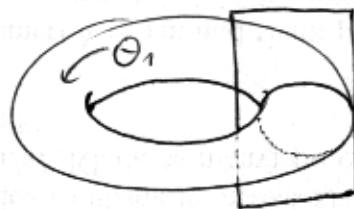
za nek $\epsilon > 0$ ~~so~~ imajo tipični resonančni torus. Ti so gosti v faze prostoru, a jih je sistem ϵ mero 0.

Dva izreda nam prista, bolj bolj podrobno, kaj se zgodijo.

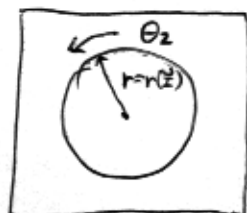
Poincaré - Birkhoffov σ resonančnih, KAN μ σ neresonančnih, ki nekatere preživijo.

Poincaré - Birkhoffov izred

imejmo dve prostorni stopnji



in Poincaréjevo rešino flosker za neperturniran integralni sistem H_0 .



$$\theta_1(t) = \theta_1(0) + \omega_1 t$$

$$\theta_2(t) = \theta_2(0) + \omega_2 t$$

na rešini floskeri pa

$$f = \left\{ \begin{array}{l} \theta_2' \\ \vec{I}' = \vec{I} \end{array} \right.$$

$$\theta_2' = \theta_2 + \omega_2 t_0 = \theta_2 + \frac{\omega_2}{\omega_1} 2\pi \quad (\text{mod } 2\pi)$$

$$\vec{I}' = \vec{I}$$

$$\lambda \equiv \frac{\omega_2(\bar{I})}{\omega_1(\bar{I})} \text{ ovojno število}$$

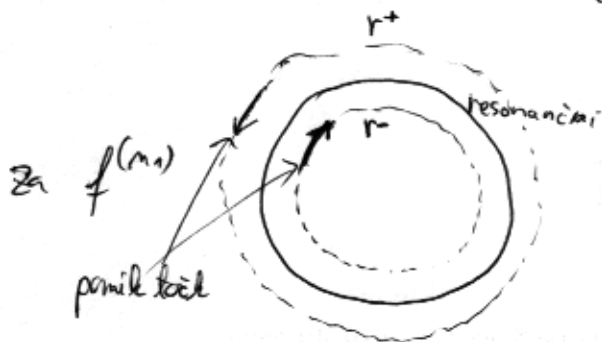
Na rezonančnem tokusu (racionalnem), je to $\lambda = \frac{M_2}{M_1}, M_{2,1} \in \mathbb{Z}$

To pa pomeni, da je $f^{(m_1)}$ identiteta. Vse točke so fiksne točke m_1 -te iteracije preslikave.

Kajne zgoledi za $H_0 + \epsilon H_1 = H_\epsilon$?

$$f_\epsilon = \begin{cases} \theta_2' = \theta_2 + 2\pi\lambda(\bar{I}) + \epsilon h(\bar{I}, \theta) \pmod{2\pi} \\ \bar{I}' = \bar{I} + \epsilon \bar{g}(\bar{I}, \theta) \end{cases}$$

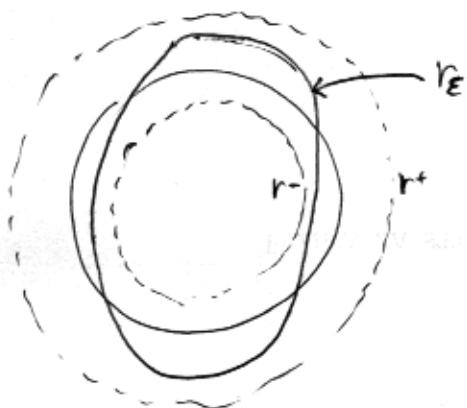
recimo, da je λ naraščajoča funkcija r (plnava toksa).



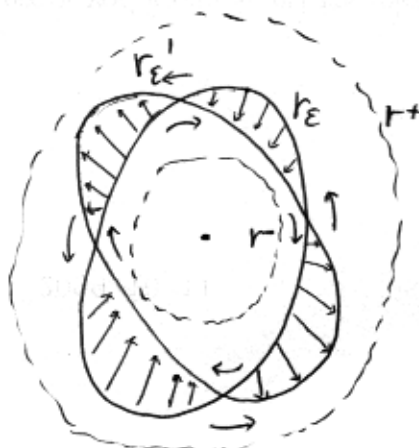
Glejmo še dva toksa r^+ in r^- na drugem radiju

za dovolj majhen ϵ bo tudi $f_\epsilon^{(m_1)}$ imela točke na r^- in desno, na r^+ pa v levo. Na nekem omejenem radiju je točka, ki jo $f_\epsilon^{(m_1)}$ nič ne zasvoiti, ampak la preselimo v radialni smeri. To krivuljo točk

označimo z r_ϵ



$$f_\epsilon^{(m_1)}(r_\epsilon) = r_\epsilon'$$

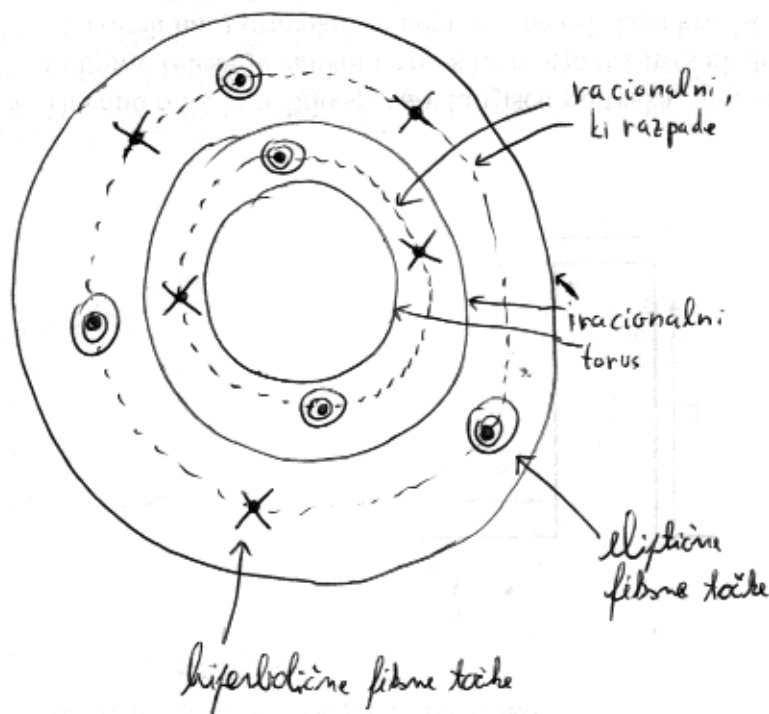


Ker je sistem konservativen se ohrani površina $r = r_\epsilon \Rightarrow$ se morata sekati, in to v sodo točkah!

\hookrightarrow to so fiksne točke $f_\epsilon^{(m)}$

Nemesto kontinuumu fiksnih točk za $f^{(m)}$ (na r) dolimo sodo skleno fiksnih točk $f_\epsilon^{(m)}$.

Iz slike jasno vidimo, da jih je polovica eliptičnih, polovica pa hiperboličnih.



eliptičnih fiksnih točk

$\neq m_1$ oz. večkratnik m_1

Hiperbolične točke rodijo homo/heteroklinična presečišča \rightarrow polkrožno preslikavo \Rightarrow kaksno vrzno majhnih območij oboli le teh. (slika iz Lichtenberga p. 100)

Ali sploh kateri torusi preživijo?

DA, to je KAM izrek.

Izrek KAN ('54, '63)

- Integralni sistem z nedegeneriranimi frekvencami $|\det \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{I}}| \neq 0$
 { to ne velja za sklopiljene H.O., kjer je $H = \mathbf{I} \cdot \vec{\omega}$ in $\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{I}} = \vec{\omega}$ }

- neresonančni - iracionalni-torus, za katerega velja

$$|\vec{m} \cdot \vec{\omega}| > \frac{K(\omega, \epsilon)}{|\vec{m}|^{\nu}} \quad \text{za } \vec{m} \neq \vec{0}$$

- analitične motnje H_1 , da $H_{1,\epsilon}$ npr. eksponentno konvergira z \vec{m} .

\Rightarrow potem perturbacijska vrsta z S v ϵ konvergira

\Rightarrow torus preživi, na njem lahko definiramo loto.

|| Za majhne ϵ večina torusov preživi (mera uničenih resonančnih je 0 v primerju o tisti neresonančnih)

Primer: v 2 DOF

$$|m_1 \omega_1 - m_2 \omega_2| > \frac{K}{(|m_1| + |m_2|)^{\nu}} \quad \left\{ \vec{m} = (m_1, -m_2) \right\}$$

$$\text{oe. } m_1 \omega_2 \left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{m_2}{m_1} \right| > \frac{K}{-11-}$$

$$\left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{m_2}{m_1} \right| > \frac{K/\omega_2}{|m_1| (|m_1| + |m_2|)^{\nu}} \sim \frac{K'}{|m|^{1+\nu}}$$

večji kot je ν , bolj "iracionalen" je torus.

Kakšen je maksimalen ν ?

Predstavitel $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \lambda$ z verižnimi ulomki:

za $\lambda \in [0, 1)$

$$\lambda = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} = [a_1, a_2, a_3, \dots]$$

Racionalna števila imajo kratké reprezentacijo, iracionalne pa ne.

npa: ~~$\sqrt{2} = \frac{A}{B}$~~ ... $\sqrt{2} - 1 = [2, 2, \dots, 2, \dots]$

aproximacija λ s prvimi n a_n -ji, nam da $\lambda_n = [a_1, a_2, \dots, a_n, 0, \bar{0}]$

$\lambda_n = \frac{A_n}{B_n}$, rekursivno ~~$A_n = A_{n-1} + a_n A_{n-2}$~~

~~$B_n = B_{n-1} + a_n B_{n-2}$~~

$A_{n+1} = a_{n+1} \cdot A_n + A_{n-1}$

$B_{n+1} = a_{n+1} B_n + B_{n-1}$, $A_1 = 1, B_1 = a_1$

velja $|\lambda - \lambda_n| < \frac{1}{2B_n^2} \sim \frac{1}{2|n|!}$

ot. $\nu = 1$

To je največji ν , kar jih je lahko 2. d. o. p.

Za več kot 2 dof ni popolne verjetne ukonke, zato velika težje ocenit hitrost konvergence. A velja, če je $\nu \geq N-1$, potem je mera konver, ki me zadovoljuje pogoj, $\rightarrow 0$, to je $\epsilon \rightarrow 0$.

$\forall N=2$ je "najbolj" iracionalno tisto, ko je B_n minimalno, to je \approx
 $[1, 1, \dots, 1, \dots] = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ zlati rez.

$\forall N=2$ bo tisto? Ovirni števila $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ zadnji razpade?

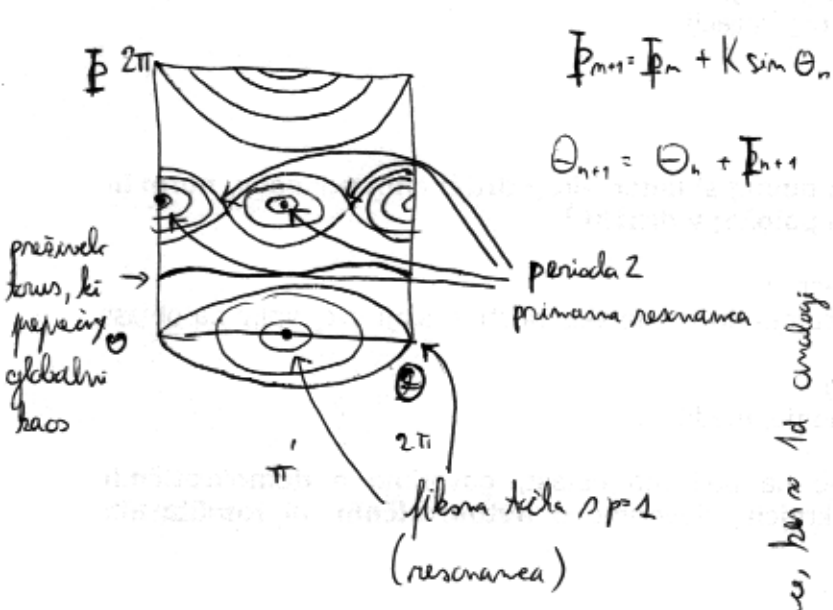
Prehod v globalni kaos

Izdel KAM nam pove, da za majhno motnjo večina sistemov preide, P.-B. pa, da imajo lahko nekateri raspedejo.

Kolaj pa raspedejo tudi najbolj izolirani sistemi? *skladat poteka celi fraktal postre poverena*

Eden izmed načinov to ugotoviti je n.t.i. kritičnim Chirikova-pokritvenje resnanc.

Poglejmo na primeru 2DOF in kvadratnega perturbacije, npr.: standardne perturbacija



$$I_{n+1} = I_n + K \sin \theta_n$$

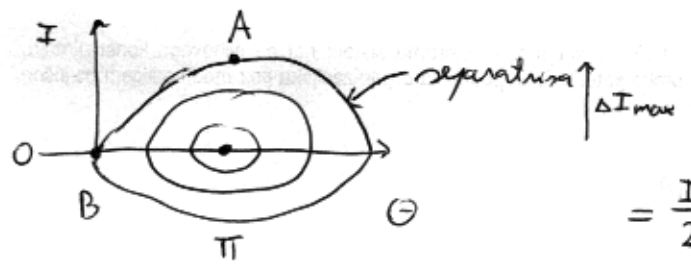
$$\theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}$$

Resonance, kjer je $\omega(I) \cdot \frac{2\pi}{K} = 0$

Fiksne točke:

- p=1
- $\bar{I} = 2\pi k$
 - $\bar{\theta} = 0, \pi$
 - stabilnost $\pm n \frac{\partial^2 H}{\partial I^2} = 2 \pm K$ {za 2d prediktor}
 - $|2 \pm K| < 2$
 - $\theta = 0$ vedno nestabilna
 - $\theta = \pi$ nestabilna za $K > 4$
- p=2: sicer to celotno odvisno od k, kar se pojavi z bifurkacijami. Naloga pa dostopajo tudi v $K \rightarrow 0 \equiv$ primarni cikli (resonanca).
- Ta so: $\bar{I} = 2\pi(k + \frac{1}{2}), \bar{\theta} = \pi, 0$
 $\bar{I} = 2\pi(l + \frac{1}{2}), \bar{\theta} = \pm \frac{\pi}{2}$

Okoli okoli resonance ima nek širina/μp: p=1 resonanca



$$H = \frac{I^2}{2} + K \cos \theta \sum_n \delta(t-n) =$$

$$= \frac{I^2}{2} + K \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi n t} \quad \{ \text{Fourier} \}$$

$$= \frac{I^2}{2} + K \cos \theta + 2K \cos \theta \cos 2\pi t + \dots$$

členi z |n| > 1

Če se faza v času preči spenja, $\frac{d\theta}{dt} \ll 1$, lahko H pričamo
 da čas in imamo $\bar{H} = \frac{I^2}{2} + K \cos \theta$, matematično nitalo.

Širino resonančne sedaj dolimo:

$$\bar{H}(A) = \bar{H}(B)$$

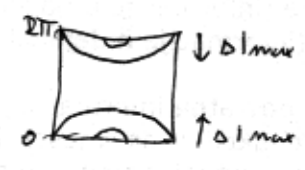
$$K \cos 0 = \frac{\Delta I_{max}^2}{2} + K \cos \pi$$

$$\Delta I_{max} = 2\sqrt{K}$$

Ko preučujemo K (perturbacije), postaja resonanca (separacija) večja.

Med dvema resonanca, npr. pri $I=0$ in $I=2\pi$, so prešlele torusi.
 Ko se ti dve resonanci začneta prekrivati, in tudi obe lastična krakova
 ob separaciji (homo/heteroklinična presečišča!), se mora ta dotik
 umakniti tudi torus. Ponavadi je ta kriterij prstov, se zgodi že prej!

Če gledamo prekrvanje med dvema $p=1$



$$2 \Delta I_{max} \sim 2\pi \Rightarrow 2\sqrt{K} = \pi \quad \Leftrightarrow \quad K_{crit} \sim \frac{\pi^2}{4} \approx 2.47$$

Vendar pa pride že prej do dotika $p=1$ resonanc z $p=2$ pri $I = \pi$.

to da $(\Delta I_{max})_{p=1} + (\Delta I_{max})_{p=2} \sim \pi$

raun da (Lichtenberg p. 259) $(\Delta I_{max})_{p=2} = \frac{1}{2}K \Rightarrow K_{crit} \approx 1.46$

To je še vedno preči. Če nadaljujemo z višjimi resonancami, $p=3, 4, \dots$, dajmo
 še boljše oceno. Chirikov je dobil $K_{crit} \approx 0.97$

↑ zlom zadnjega torusa
 ≡ globalni kaos

OK, to je za standardno, kaj pa za splošen sistem?

Poincaréjeva za splošni 2DOP: gledamo preslik (I_1, θ_1) , to je $\theta_2 = \text{konst.}$

dva zaporedna "prehoda" po $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_2}$, po katerem je

$$\Delta \theta_1 = \omega_1 \Delta t = 2\pi \frac{\omega_1}{\omega_2} = 2\pi \alpha(I_1)$$

$$\alpha_1(I_1) = \frac{\omega_1}{\omega_2} \text{ obojno število}$$

to je Poincaré preslikava

$$\theta_1' = \theta_1 + 2\pi \alpha(I_1')$$

$$I_1' = I_1$$

} "twist map"

sedaj dodamo motnjo $\epsilon(x)$:

$$\theta_1' = \theta_1 + 2\pi \alpha(I_1') + \epsilon \cdot g(I_1', \theta_1)$$

$$I_1' = I_1 + \epsilon \cdot f(I_1', \theta_1)$$

velikokrat lahko izberemo koordinato tako, da je $g \equiv 0$, f pa je samo funkcija θ

=>

$$\theta_1' = \theta_1 + 2\pi \alpha(I_1')$$

$$I_1' = I_1 + \epsilon f(\theta_1)$$

"radial twist map"
(dobro Poincaré-Birkhoffa)

$p=1$ resonanca je pri $\alpha(I_1^*) = \text{celo število} = k$ in $f(\theta_1^*) = 0$

linearizacija okoli θ_1^*, I_1^* da

$$\Delta \Phi \equiv I_1 - I_1^*$$

$$\theta_1' = \theta_1 + 2\pi (\alpha(I_1^*) + \alpha'(I_1^*) \Delta \Phi + \dots) = \theta_1 + 2\pi \alpha' \Delta \Phi$$

$$\Phi_1' = \alpha \Phi_1 + \epsilon f(\theta_1)$$

$$2\pi \alpha' \mid$$

nova spremenljivka
 $2\pi \alpha' \Delta I_1 \equiv p_1$

=>

$$\theta_1' = \theta_1 + p_1'$$

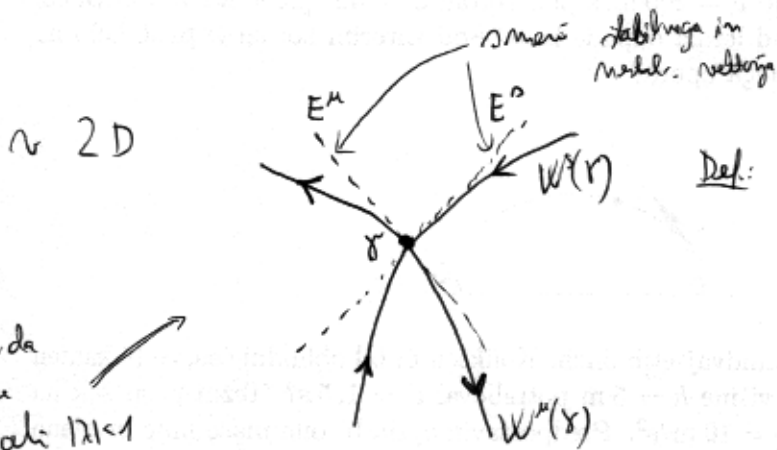
$$p_1' = p_1 + K f(\theta_1)$$

} podobno standardni preslikavi
 $K = 2\pi \alpha' \cdot \epsilon$

Heteroblimbke in Homoblimbke točke ali presična

Generični kaos in Spaleva polka.

Opazimo stacionarno točko, ki ima vsaj eno nestabilno smer in obrnjeno privlačno.
 (ali pa cikl) → je sta. točka Poincaréjeve problemne



Def: stabilna množica točke x je množica točk \tilde{x} , da je $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(\tilde{x}) = x$ (privlačno) in $n \rightarrow +\infty$ privlačno x . $W^s(x)$

nestabilna μ, \tilde{x} , ki x $n \rightarrow -\infty$ privlačno x . $W^u(x)$

primarnino, da so vse lastne ali $|\lambda| > 1$ ali $|\lambda| < 1$ [molekule ni $|\lambda|=1$] \Leftrightarrow hiperbolična točka

Da x plosadi, da točki množicosti \exists in sta "gladki".

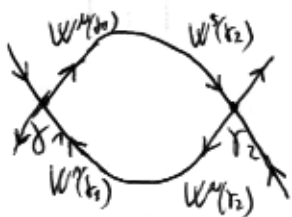
- Kaj je f obrnjena, velja $W^s(x) \cap W^u(y) = \emptyset$
 $W^u(x) \cap W^s(y) = \emptyset$ } (povsod v faznem prostoru!)
 zvezo medaljevag obdaja x (otk)
- Kaj pa dve realni sta. točki x_1, x_2 ?

+ zagotovo $W^u(x_1) \cap W^u(x_2) = \emptyset$ { it presična ki $n \rightarrow +\infty$ o morati konvergirat k x_1 in $x_2 \rightarrow \leftarrow$ }

+ podobno $W^s(x_1) \cap W^s(x_2) = \emptyset$

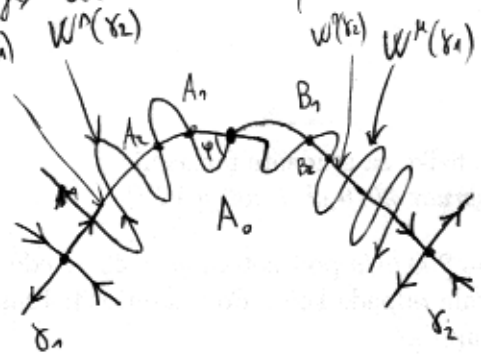
+ $W^s(x_1)$ in $W^u(x_2)$ pa se lahko sekata:

lahko



Če kaj se $W^u(x_1)$ in $W^s(x_2)$ sekata pod kotom 0.0. Npi so integralnih (mikalo) ali blizu integralnosti. \Rightarrow ni kaosa v bližini separatis.

druga možnost je da se selata $f \neq 0$ potam:



$\varphi \neq 0$ v A_0 .

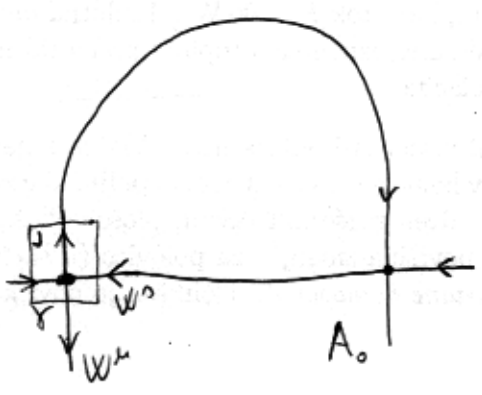
Če imamo eno presečišče A_0 ,
jih lahko nastavimo, le iteriramo
pulsirajo naprej in nazaj.

$A_i = f(A_{i-1})$ Presečišča se zgodajo v
 $B_i = f^{(i)}$ bližini δ_1 in δ_2 .

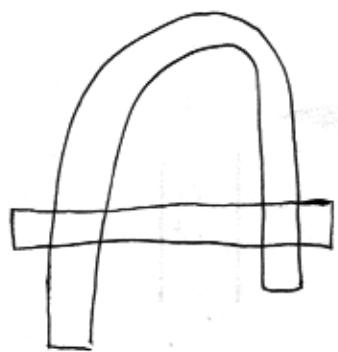
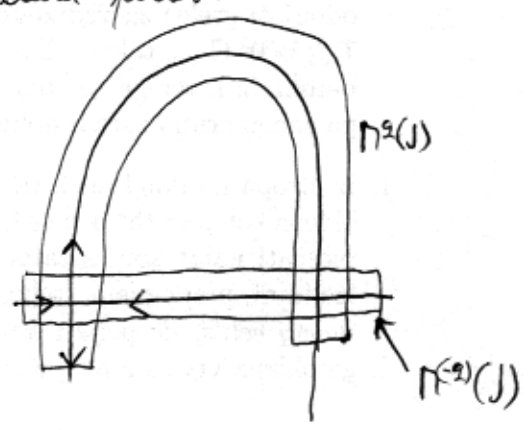
Taka presečišča med $W^u(x_1)$ in $W^s(x_2)$ so heteroklinična točka.

Če gre za $\delta_1 = \delta_2 \Rightarrow$ homoklinična točka.

Smale je pokazal, da če lineariziramo f v okolici x_1 , npr. $\frac{\partial f}{\partial x} = \pi$, da je če
imamo homoklinična točka $\Rightarrow \pi^2$ je Smaleova polkrog:






$\pi^2(J) \Rightarrow \pi^{(2)}(J)$



Smaleova
polkrog !

integralen

čas

- homo/heteroklinična točka \Rightarrow  \Rightarrow  \Rightarrow Brouwer
- Smaleova zvezna  \Rightarrow simbolna dinamična teorija
- lokalna struktura otokov in hiperboliziranih točk \Rightarrow globalni kaos



v bližini separata hiperboliziranih točk

Velja spletni izred: če imamo matriko $L(t)$, za katero najdemo drugo Γ , da

velja
$$\frac{dL}{dt} = L\Gamma - \Gamma L$$
 Lax-ov pa

\Rightarrow lastne vrednosti L so neodvisne od t . {tudi koeficienti karakterističnega polnoma}

Za Todaevno verigo imamo Laxov pa \Rightarrow sledi vsak polne L so konstante.

$$F_j = t_j L^j \quad j=1, \dots, m$$

$$F_1 = \sum b_i = \sum p_i = \Gamma \quad \text{trajanje}$$

$$F_2 = f(\text{energija}, F_1)$$

$F_j =$ polinom reda j v momentih p_i

in sleden za Todaevno verigo

$$g_j = \log \left[\frac{1 + \frac{\gamma}{1-e^{-2x}} \exp(-2Kj + 2\sigma hK \cdot t)}{1 + \frac{\gamma}{1-e^{-2x}} \exp(-2K(j+1) + 2\sigma hK \cdot t)} \right]$$

hitrost $\frac{\sigma hK}{K}$, širina $\sim \frac{1}{K}$

N več kot 2 DOF \rightarrow kovanj več ne omajujejo globalnega libarja v fiksni postavi;
 N -den kovanj ne "deli" $2N-1$ dimen energijske ploske
 $N=2$ 2...3 ✓
3 3...5 //
 \Downarrow
Arnoldova difuzija, ki pa j lahko zelo počasna

Normalizirani pogoji: piheloni pogoji za normalno difuzijo, Fourierov zakon, ... ?
 $\sigma^2 \sim t$ $j = -K \frac{AT}{N}$

a je potreben kaos?, mešanje?, samo linearna nestabilnost?

Kerel in lokalizacija