Domače naloge iz dinamične analize, 2006

1. Napravi učinkovit program za izračun Poincaréjeve preslikave za prožno kroglico, ki v homogenem gravitacijskem polju odskakuje prožno od podlage v obliki luknje, ki jo omejuje rob $y_s(x) = -b/(1 + (x/a))^2$, kjer sta a in b neka efektivna širina in globina luknje. Nariši nekaj faznih portretov in jih komentiraj, za različne vrednosti brezdimenzijskih paramtrov. Zanimivo bi si bilo posebej ogledati kaj se dogaja, ko celotna energija prečka prag za razpad sistema $E = 0$. Ali obstajajo vezane kaotične orbite za $E > 0$?

2. Oglej si sledečo disipativno preslikavo na 3-dimenzionalnem torusu:

$$\begin{aligned} x' &= x + y + z \pmod 1 \\ y' &= by + ax' \pmod 1 \\ z' &= bz + ax' \pmod 1 \end{aligned}$$

   kjer je $b \in [0, 1]$ parameter dušenja, $a > 0$ pa parameter vsiljevanja. Numerično konstruiraj attraktor, t.j. množico točk v faznem prostoru kamor konvergira tipična orbita po dolgem času, za nekaj tipičnih vrednosti parametrov (a, b) npr.: $(1, 0.5)$, $(1, 0.9)$, $(0.1, 0.9)$, in ga smiselno grafično predstavi. Npr. z dvodimenzionalnimi preseki ali projekcijami. Oceni še fraktalno dimenzijo atraktorja za različne vrednosti parametrov.

3. Razišči obnašanje invariantne gostote za preslikavo $f : (0, 1] \to (0, 1]$,

$$f(x) = 1/x^\beta \pmod 1,$$

   za različne vrednosti parametra β, npr. $\beta = 1/2, 1, 2$. Invariantno gostoto lahko iščeš kar z iteracijo Perron-Frobeniusovega operatorja, s tem da začneš z enakomerno gostoto $\rho_0(x) = 1$. Ali pa poizkušaš diagonalizirati Perron-Frobenuiusov operator v primerni končni bazi, npr prvih N Fourierovih načinov.

4. Napravi čimjasnejǧrafično ilustracijo stabilne in nestabilne mnogoterosti, ki izhajata iz nestabilne fiksne točke standardne preslikave za primerno vrednost parametra preslikave, npr. $k = 2$.

5. Izračunaj Ljapunov spekter modela verige sklopljenih Harperjevih modelov s koordinatami θ_n in impulzi p_n, opisanega s hamiltonko

$$H = \sum_{n=1}^{N} \left(K \cos p_n + L \cos(\theta_n - \theta_{n+1}) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-m) \right).$$

Upoštevaj periodične robne pogoje, t.j. da je zadnji rotator spet sklopljen s prvim $N+1 \equiv 1$. V numeričnih simulacija vzemi nekaj različnih vrednosti parametrov K, L, npr $K = L = 1, K = L = 10$ in velikosti $N = 2, 3, 10$ in morda še večje vrednosti. Pazljivo preveri časovno konvergenco Ljapunovih eksponentov in vsotna pravila.

6. Izračunaj Ljapunov spekter modela idelanega plina v enodimenzionalni posodi v kateri je z idealno vzmetjo s koeficientom k pričvrščen idealno gibljiv bat z maso M. Obravnavaj $N \gg 1$ molekul z maso $m \ll M$ in jih opiši s koordinatami $0 < x_n < X$, kjer je X koordinata bata. Konstruiraj Poincaréjevo preslikavo med dvema sosednjima trkoma kake molekule z batom in numerično izračunaj njen Ljapunov spekter. Posebej zanimivo je študirati termodinamsko limito v kateri $N \gg 1$ in $M/m \gg 1$, in razmerje $M/(mN)$ fiksno.

7. Preveri ergodičnost in mešanje v dinamičnem sistemu iz zgornje naloge (idealen plin zaprt s harmonično vpetim batom). Kako hitro pojemajo tipične korelacijske funkcije, npr. hitrostna autokorelacijska funkcija bat?

8. Zasleduj zlom KAM torusov pri Harperjevi preslikavi

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + K \cos y_n \pmod{2\pi} \\ y_{n+1} &= y_n + L \sin x_{n+1} \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

v odvisnosti od ovojnega števila $w = \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_0}{2\pi n}$, kjer so $\tilde{x}_n$ 'razgrnjene koordinate' orbite (brez $\pmod{2\pi}$). Npr. fiksiraj parameter $K = 1$ and spreminjaj parameter L, začenši s $L = 0$. Določi npr., vrednosti $L^*(w)$, kjer se zlomita torusa, ki imata predstavitvi z verižnimi ulomki: $w = [1, 1, 1 \ldots]$ (zlati torus) in $w = [1, 2, 3, \ldots]$.

9. Zasleduj dinamiko družine biljardov $r(\varphi) = 1 + a\cos(4\varphi)$, ko povečuješ velikost parametra $a \in [0, 1)$. Nariši nekaj Poincaréjevih presekov za različne vrednosti parametra a. Pri kateri vrednosti a postane ves fazni prostor (skoraj) kaotičen? Poizkusi numerično oceniti relativno prostornino oziroma površino največjekaotične komponente v odvisnosti od parametra a.

10. Pravokotni biljard s stranicama a in b je do polovice v homogenem magnetnem polju z gostoto B, ki kaže pravototno na ravnino biljarda. Naj delec v biljardu nosi naboj e in maso M. Razišči obnašanje sistema (fazni portreti in Ljuapunovi eksponenti) za različne vrednosti (brezdimenzijskega) magnetnega polja, in razmerja stranice a/b, npr. $a/b = 1, (\sqrt{5} - 1)/2$.

11. Enaka naloga kot zgornja, le da za krožni biljard s polmerom R, ki je do polovice potopljen v magnetnem polju.

12. Razišči dinamiko delca v hiperboličnem biljardu, ki ga omejuje hiperbola $xy = 1$ in koordinatni osi $x = 0$ in $y = 0$. Sistem je vezan (nikoli ne pobegne v neskončnost), kljub temu, da je konfiguracijski prostor neskončen.

    Oglej si korelacijske funkcije v tem modelu, npr. komponente hitrosti $C(t) = \langle v_x(t) v_x \rangle$, predvsem njeno asimptotsko obnašanje. Domnevamo da bo korelacijska funkcija pojemala počasi, ker se delec pogosto ujame v korelirano kvaziregularno gibanje v dolgih tankih repih.

    Kako se korelacije spremenijo, če v središče biljarda vstaviš (četrt)krožno oviro s polmerom 1 in središčem v $x = y = 0$? Na ta način učinkovito porušimo korelacije med posameznimi izleti v repe biljarda.

13. Za oba primera hiperboličnih biljardov iz prejšnje naloge (z in brez krožne ovire v sredini), razišči razpad sistema, če odrežemo repe pri $x = 1/\epsilon$ in $y = 1/\epsilon$, kjer je ϵ majhen parameter. Simuliraj verjetnost $P(t)$, da delec ostane znotraj biljarda po času t, če začne iz nekega območja v središču biljarda, npr. enakomerno porazdeljeno po enotskem kvadratu $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

14. Oglej si dinamiko v trikotnih biljardih, potem ko vključiš transverzalno homogeno magnetno polje. Kako se spreminja struktura faznega prostora v odvisnosti od magnetnega polja? Posebej zanimovo bo vzeti t.i. psevdointegrabilni biljard, npr. $\alpha = \pi/5, \beta = 3\pi/10, \gamma = \pi/2$. Ko ni magnetnega polja, je dinamika neergodična (psevdo-regularna). Kaj se zgodi z invariantnimi krivuljami v prisotnosti majhnega magnetnega polja? Podrobno si lahko ogledaš zlom invariantne krivulje z zlatim ovojnim številom.

15. Kvadratne biljarde s stranicami $a = 1$ zložimo skupaj v verigo in jih sklopimo z majnimi luknjicami premera $\epsilon \ll 1$, ki se izmenoma nahajajo na spodnji oziroma zgornji strani stične stranice med sosednjima kvadratoma.

    Razišči transport sistema, t.j. kako se spreminja povprečen kvadrat odmika $\langle(\Delta x(t))^2\rangle = D_\beta t^\beta$, če je x koordinata vzdolž verige, in povprečimo čez, (i) eno samo dolgo orbito, (ii) čez mnogo orbit z naključno in enakomerno posejanimi začetnimi pogoji po faznem prostoru. Pozor: sistem ni ergodičen, saj je za vsako orbito dovoljenih le končno mnogo smeri gibanja.

16. Biljarde v obliki enakokrakih trikotnikov s kotom α pri vrhu zložimo enega poleg drugega tako da vrhovi kažejo izmenoma v eno in drugo smer. Spet jih odpremo z luknjicami relativnega premera ϵ, izmenoma na enem ali drugem skrajem koncu stične stranice.

    Razišči transport sistema, t.j. kako se spreminja povprečen kvadrat odmika $\langle(\Delta x(t))^2\rangle = D_\beta t^\beta$, če je x koordinata vzdolž verige, in povprečimo čez, (i) eno samo dolgo orbito, (ii) čez mnogo orbit z naključno in enakomerno posejanimi začetnimi pogoji po faznem prostoru. Obravnavaj dva primera: $\alpha = \pi/5$ in $\alpha = \pi(\sqrt{5} - 1)/4$

17. Enaka naloga kot ena od zgornjih dveh, le da naj biljardna veriga zdaj leži v homogenem prečnem magnetnem polju z gostoto B in naj delec nosi naboj e in maso m.

18. Ohmov zakon: Spet enak sistem kot predprejšnja naloga (trikotna biljardna veriga), vendar naj se zdaj biljard nahaja v električnem polju jakosti E, vzdolž osi x. Predpostavi, da se pri prehodu skozi luknjico delcu vsakič zmanjša kinetična energija za faktor β, $\beta \in [0, 1)$, pri čemer se ohrani smer vektorja hitrosti.

    Simuliraj dinamiko sistema v odvisnosti od jakosti električnega polja. Električni tok je sorazmeren povprečni hitrosti $\bar{v_x}$ delca vzdolž osi x, namreč $I = en\bar{v_x}$, kjer je n številska gostota delcev. Določi torej $\bar{v_x}$ in preveri če velja $\bar{v_x} = \xi E$, za neko konstanto ξ, pri nekaj različnih vrednostih koeficienta dušenja β. Morda lahko simuliraš še odvisnost $\xi(\beta)$?

19. Napravi preprost model prevajanja toplote V trikotnem verižnem biljardu opisanem zgoraj. Vzemi N členov in jih sklopi z dvema toplotnima rezervoarjema pri različnih temperaturah T_1 in T_N. Sklopitev z rezervoarjem pomeni naslednje: ko delec trči s steno rezervoarja, pozabi longitudinalno komponento hitrosti v_x in jo nadomesti z novo (nasprotnega predznaka), ki jo izžreba po Maxvellowi porazdelitvi.

    $$d\mathcal{P}(v_x)/dv_x = \frac{v_x}{T_{1,N}} \exp(-v_x^2/(2T_{1,2})).$$

    Preveri, če je toplotni tok skozi verižni biljard po dolgem času sorazmeren gradientu temperature $J_Q = -\kappa(T_N - T_1)/N$ in če je temperaturni profil $T_n = \frac{1}{2}\langle v_x^2 + v_y^2 \rangle$ zares linearen po celi verigi. Prepričaj se o neodvisnosti konstante toplotne prevodnosti od dolžine verige N.

20. Numerično obravnavaj integrabilno Toda-jevo verigo (npr. z metodo Runge-Kutta) s periodičnimi robnimi pogoji. Vzemi nekaj orbit s preprostimi začetnimi pogoji, npr. $p_j(0) = \mathrm{konst}\,\delta_{j,0}$ in $q_j(0) = 0$ in spremljaj konstantnost integralov gibanja F_n. Kako se širi takšna motnja po dolgi verigi?

    Ali ostaja sprememba integralov gibanja časovno omejena, ko Toda-jevo verigo perturbiraš, tako da vsako drugo maso pomnožiš s faktorjem $1+\epsilon$, oziroma kaj se dogaja, ko povečuješ ϵ? Numerični eksperiment: študiraj npr $\langle (F_3(t) - F_3(0))^2 \rangle$

21. Opiši biljardni model z dvema končnima diskoma polmera $r < 1/2$, ki se prožno odbijata druga od druge in od krožne ograde s polmerom $R = 1$. Numerično konstruiraj Poincaréjevo preslikavo. Model ima štiri prostostne stopnje, vendar en trivialen integral gibanja, namreč skupno vrtilno količino. Razišči maksimalni Lyapunov eksponent v odvisnosti od r, npr. pri skupni vrtilni količini $L = 0$.