Domače naloge iz dinamične analize, 2007

1. Zapiši stroboskopsko preslikavo za brcan Harperjev sistem, ki pod določenimi pogoji opisuje elektron v dvodimenzionalnem periodičnem potencialu in homogenem električnem polju

$$H(p, q, t) = K \cos p + L \cos q \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau).$$

   Napravi nekaj faznih portretov sistema in kvalitativno opiši gibanje pri različnih vrednostih parametrov K in L, npr. za $K < L$, $K > L$ in $K = L$.

2. Imejmo nabit delec z maso m in nabojem e, ki prožno odskakuje od sten enodimenzionalne potencialne jame širine a. Nato začnemo periodično vklapljati homogeno električno polje jakosti E, tako da pol periode τ smer električnega polja kaže v desno in je konstantna v času, za drugo polovico periode pa smer polja obrnemo, da kaže v levo. Zapiši stroboskopsko preslikavo sistema za eno periodo električnega polja. V odvisnosi od nekaj tipičnih vrednosti brezdimenzijskih parametrov nariši nekaj faznih portretov sistema in komentiraj.

3. Zapiši Poincaréjevo preslikavo za prožno kroglico, ki v homogenem gravitacijskem polju odskakuje prožno od podlage v obliki klina, ki ga omejuje rob $y_s(x) = k|x|$. Nariši nekaj faznih portretov in jih komentiraj, za različne vrednosti brezdimenzijskega parametra.

4. Zapiši Poincaréjevo preslikavo za prožno kroglico, ki v homogenem gravitacijskem polju odskakuje prožno od podlage v obliki parabole $y_s(x) = kx^2$. Nariši nekaj faznih portretov in jih komentiraj, za različne vrednosti brezdimenzijskega parametra.

5. Oglej si dinamični sistem, ki je podan s sledečo preslikavo

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad f(x) = a(x^3 - x)$$

na faznem prostoru $\mathcal{M} = [-1, 1]$. Pri $a > a_c = 3\sqrt{3}/2$ postane sistem odprt in orbite lahko uhajajo iz intervala $\mathcal{M}$. Oceni fraktalno dimenzijo odbijača (repellerja) in razpadni zakon, t.j. verjetnost $P(n)$, da sistem preživi čas n, za nekaj tipičnih vrednosti parametra $a > a_c$.

6. Oglej si sledečo disipativno preslikavo na torusu $\mathcal{M} = [0, 1) \times [0, 1)$:

$$\begin{aligned} x' &= x + y \pmod 1 \\ y' &= by + ax' \pmod 1 \end{aligned}$$

kjer je $b \in [0, 1]$ parameter dušenja, $a > 0$ pa parameter vsiljevanja. Numerično konstruiraj attraktor, t.j. množico točk v faznem prostoru kamor konvergira tipična orbita po dolgem času, za nekaj tipičnih vrednosti parametrov (a, b) npr.: $(1, 0.5)$, $(1, 0.9)$, $(0.1, 0.9)$. Oceni še fraktalno dimenzijo atraktorja.

7. Simuliraj Ljapunov eksponent za standardno preslikavo pri različnih vrednostih parametra k (npr. $k = 0.5, 1.0, 7.0$) in pri različnih začetnih pogojih. Ali je v kaotični komponenti faznega prostora eksponent neodvisen od začetnega pogoja? Opazuj časovno konvergenco Ljapunovega eksponenta! Kakšna pa je odvisnost od parametra k?

8. Izračunaj Ljapunov spekter štiridimenzionalnih preslikav na območju $[0, 1)^4$ (pokaži, da so simplektične), podanih z enačbo

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = \mathcal{M}_{1,2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \frac{\beta}{2\pi} \begin{bmatrix} \sin(2\pi x_3) \\ \sin(2\pi x_4) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

kjer je

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

in β prost parameter (tipično reda 0.1). Poglej, kako se spekter spreminja s parametrom β in primerjaj rezultate z lastnimi vrednostmi matrik $\mathcal{M}_{1,2}$.

9. Izračunaj Ljapunov spekter modela verige sklopljenih brcanih rotatorjev s koordinatami θ_n in impulzi p_n, opisanega s hamiltonko

$$H = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2} p_n^2 + k \cos(\theta_n - \theta_{n+1}) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - m) \right).$$

Upoštevaj periodične robne pogoje, t.j. da je zadnji rotator spet sklopljen s prvim $N+1 \equiv 1$. V numeričnih simulacija vzemi nekaj različnih vrednosti parametra k, npr $k = 1, 3, 10$ in velikosti $N = 2, 3, 10$. Pazljivo preveri časovno konvergenco ljapunovih eksponentov in vsotna pravila.

10. Izračunaj Ljapunov spekter modela idelanega plina v enodimenzionalni posodi na katero pod vplivom teže pritiska idealno gibljiv bat z maso M. $N \gg 1$ molekul z maso $m \ll M$ opiši z njihovimi vertikalnimi koordinatami $0 < z_n < Z$, kjer je Z koordinata bata. Vpliv gravitacijskega polja na molekule zanemari, torej vzemi, da se molekule gibljejo po ravnih tirih in prožno trkajo med seboj, z dnom posode in z batom. Zapiši Poincaréjevo preslikavo med dvema sosednjima trkoma kake molekule z batom in numerično izračunaj njen Ljapunov spekter. Posebej zanimivo je študirati termodinamsko limito v kateri $N \gg 1$ in $M/m \gg 1$, in razmerje $M/(mN)$ fiksno.

11. Čimbolj točno določi dinamično entropijo za preslikavo Arnoldove mačke

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \pmod 1$$

12. Izračunaj dinamične entropije, metrično in topološko, za sledečo preslikavo na enotskem intervalu $[0, 1)$,

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

kjer je

$$f(0 \le x < 1/2) = 2x \pmod 1,$$
$$f(1/2 \le x < 1) = 4x \pmod 1.$$

13. Simuliraj difuzijo gibalne količine p_n za standardno preslikavo

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + k\sin(\varphi_n), \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + p_{n+1} \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

Numerično oceni vrednost difuzijske konstante $D = \langle (p_n - p_0)^2 \rangle/(2n)$: (a) z neposredno simulacijo, (b) s korelacijskimi funkcijami, za nekaj vrednosti parametra k. Kakšna je odvisnost za velike vrednosti parametra k?

14. Preveri ergodičnost in mešanje za preslikavo Arnoldove mačke

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \pmod 1$$

na enotskem torusu $[0, 1) \times [0, 1)$. Za opazljivke vzemi nekatere od Fourierovih načinov, npr. $u_{n,m}(x, y) = \sin(2\pi nx)\sin(2\pi my)$.

15. Numerično razišči pojemanje korelacijskih funkcij v preslikavi na enotskem torusu $x, y \in [0,1) \times [0,1)$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n \pmod{1}, \\ y_{n+1} &= y_n + k(x_{n+1} - 1/2) \pmod{1}, \end{aligned}$$

kjer mora biti parameter k pozitiven, da je preslikava kaotična. Če predpostaviš, da je pojemanje korelacij eksponentno $C(t) \sim \exp(-rt)$, kakšna je odvisnost konstante r od parametra k?

16. Napravi bifurkacijski diagram za sledečo enodimenzionalno preslikavo

$$x_{n+1} = x_n + a\sin(2\pi x_n) \pmod{1},$$

ko povečuješ vrednosti parametra a. Če fazni prostor sprostiš na celo realno os, potem gornja preslikava definira difuzijski proces $\langle (x_n - x_0)^2 \rangle \sim 2Dn$. Razišči ga in oceni vrednost difuzijske konstante $D(a)$ in 'kritično vrednost' paramtera a pri kateri pride do normalne difuzije.

17. Razišči obnašanje invariantne gostote za preslikavo $f : [0,1] \to [0,1]$,

$$f(x) = |4x(1-x)|^{\beta},$$

za različne vrednosti parametra β, npr. $\beta = 1/2, 2$. Ali lahko kaj poveš o zvezi med parametrom β in naravo singularnosti invariantne gostote v točkah $x = 0$ in $x = 1$? Invariantno gostoto lahko iščeš kar z iteracijo Perron-Frobeniusovega operatorja, s tem da začneš z enakomerno gostoto $\rho_0(x) = 1$.

18. Simuliraj *makroskopsko ireverzibilne* transportne pojave z *mikroskopsko reverzibilno* razširjeno pekarsko preslikavo (angl. multi-baker map). Preslikavo $(x_{t+1}, y_{t+1}) = M(x_t, y_t)$ definiramo na traku $(x, y) \in [0, N] \times [0, 1]$, $N \in \mathbb{Z}$

$$M(x,y) = \begin{cases} ([x] - 1 + 3\{x\}, y/3) & 0 \le \{x\} < 1/3, \\ ([x] + 3(\{x\} - 1/3), (y+1)/3) & 1/3 \le \{x\} < 2/3, \\ ([x] + 1 + 3(\{x\} - 2/3), (y+2)/3) & 2/3 \le \{x\} < 1 \end{cases}$$

$[x]$ in $\{x\}$ sta celi del (največje celo število, ki ni večje od x) in decimalni del števila x, $x = [x] + \{x\}$. Kvadratu $[n-1, n] \times [0, 1]$ recimo n. celica. Fazni prostor sestalja N celic z oznakami $1 \ldots N$. Dogovoriti se moramo še, kaj narediti kadar delec skoči ven iz pasu $x < 0$ ali $x > N$, npr. postavimo lahko periodične robne pogoje v x.

V povprečju gre delec v enem koraku preslikave za eno celico v levo z verjetnostjo 1/3, za eno celico v desno z verjetnostjo 1/3, ali ostane v isti celici. Transport med celicami je torej 'random walk' v eni dimenziji z difuzijsko konstanto $D = 1/3$.

Za nalogo s simulacijo preveri veljavnost Fickovega zakona: da je tok delcev sorazmeren gradientu koncentracije $j = D(\partial/\partial x)c(x)$. To napravi tako, da sistem vložiš med dva rezervoarja (oziroma "pol-prepustni membrani"). Ko npr. delec skoči v 0. celico ($x < 0$), ali pa v $N+1$. celico ($x > N$), ažuriraš tok j nato pa nanj pozabiš: takoj v naslednjem trenutku (iteraciji) pa v sistem injektiraš nov delec, z verjetnostjo p enakomerno v 1. celico, oziroma z verjetnostjo $1-p$ enakomerno v N. celico. Če je $p \neq 1/2$, se po dolgem času v sistemu ustvari gradient koncentracije $c(x)$, ki jo meriš lahko kot verjetnost $c(x)dx$, da se delec nahaja v pasu $[x - dx/2, x + dx/2] \times [0, 1]$. Za preučevanje termodinamske limite $N \to \infty$ moraš normalizirati (oz. fiksirati) gostoto delcev, računaj npr. kot da imaš v vsakem trenutku v sistemu N delcev, tako da končni rezultat za verjetnost $c(x)dx$ pomnožiš z N.

Preveri, da je profil koncentracije zares linearen, in da je skupni tok delcev skozi sistem sorazmeren gradientu koncentracije za različne N. Ali se tako izračunana vrednost transportnega koeficienta D ujema z random-walk modelom $D = 1/3$?

19. Konstruiraj kanonične akcije in kote, ter poišče frekvence kot funkcije kanoničnih akcij za krožni biljard. Poišči pogoje, da bo gibanje periodično.

20. Podobna naloga za eliptični biljard. Upoštevaj, da je drugi integral gibanja v eliptičnem biljardu kar produkt vrtilnih količin glede na gorišči elipse, ki opisuje rob biljarda.

21. Obravnavaj model Fermijevega pospeševanja: Masna kroglica (v eni dimenziji) prožno odskakuje med dvema paralelnima ploščama na razdalji d, od katerih ena harmonično niha, npr kot $x_{pl}(t) = x_a \cos\omega t$. Upoštevaj, da je amplituda majhna $x_a \ll d$. Zapiši Poincaréjevo preslikavo (za koordinati: x_n — položaj nihajoče plošče in kroglice ob n-tem trku, v_n — hitrost kroglice tik po $n-$tem trku) in razišči fazni prostor. Ali lahko energija neomejeno narašca, ali pa obstaja KAM bariera? Poišči jo. Ali lahko rezultate analitično razložiš? Pomagaj si z lokalno aprksimacijo Poincarejeve preslikave s standardno preslikavo in uporabi kriterij Chirikova o prekrivanju resonanc.

22. Zasleduj zlom KAM torusov pri standardni preslikavi

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n \pmod{2\pi} \\ y_{n+1} &= y_n + k \sin x_{n+1} \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

v odvisnosti od ovojnega števila $w = \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_0}{2\pi n}$, kjer so $\tilde{x}_n$ ‘razgrnjene koordinate’ orbite (brez $\pmod{2\pi}$). Določi npr., vrednosti $k^*(w)$, kjer se zlomita torusa, ki imata predstavitvi z verižnimi ulomki: $w = [1, 1, 1 \ldots]$ (zlati torus) in $w = [1, 2, 3, \ldots]$.

23. Oglej si Ljapunove eksponente v Sinaiovem biljardu, kvadrat s stranico a v katerem je krožna ovira s polmerom ρ, v odvisnosti od parametra ρ. Opiši (nariši) nekaj krajših periodičnih orbit in izračunaj njihove stabilnostne eksponente.

24. Zasleduj dinamiko družine biljardov $r(\varphi) = 1 + a\cos(3\varphi)$, ko povečuješ velikost parametra $a \in [0, 1)$. Nariši nekaj Poincaréjevih presekov za različne vrednosti parametra a. Pri kateri vrednosti a postane ves fazni prostor (skoraj) kaotičen? Poizkusi numerično oceniti relativno prostornino oziroma površino največjekaotične komponente v odvisnosti od parametra a.

25. Razišči dinamiko delca v hiperboličnem biljardu, ki ga omejuje hiperbola $xy = 1$ in koordinatni osi $x = 0$ in $y = 0$. Sistem je vezan (nikoli ne pobegne v neskončnost), kljub temu, da je konfiguracijski prostor neskončen.

    Oglej si korelacijske funkcije v tem modelu, npr. komponente hitrosti $C(t) = \langle v_x(t) v_x \rangle$, predvsem njeno asimptotsko obnašanje. Domnevamo da bo korelacijska funkcija pojemala počasi, ker se delec pogosto ujame v korelirano kvaziregularno gibanje v dolgih tankih repih.

    Kako se korelacije spremenijo, če v središče biljarda vstaviš (četrt)krožno oviro s polmerom 1 in središčem v $x = y = 0$? Na ta način učinkovito porušimo korelacije med posameznimi izleti v repe biljarda.

26. Za oba primera hiperboličnih biljardov iz prejšnje naloge (z in brez krožne ovire v sredini), razišči razpad sistema, če odrežemo repe pri $x = 1/\epsilon$ in $y = 1/\epsilon$, kjer je ϵ majhen parameter. Simuliraj verjetnost $P(t)$, da delec ostane znotraj biljarda po času t, če začne iz nekega območja v središču biljarda, npr. enakomerno porazdeljeno po enotskem kvadratu $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

27. Oglej si dinamiko v trikotnih biljardih, potem ko vključiš transverzalno homogeno magnetno polje. Kako se spreminja struktura faznega prostora v odvisnosti od magnetnega polja? Posebej zanimovo bo vzeti t.i. psevdointegrabilni biljard, npr. $\alpha = \pi/5, \beta = 3\pi/10, \gamma = \pi/2$. Ko ni magnetnega polja, je dinamika neergodična (psevdo-regularna). Kaj se zgodi z invariantnimi krivuljami v prisotnosti majhnega magnetnega polja? Podrobno si lahko ogledaš zlom invariantne krivulje z zlatim ovojnim številom...

28. Študiraj fazni portret biljarda v obliki atletske tekaške steze stadiona, ki je sestavljen iz dveh odsekov ravnih kanalov dolžine a in širine $b < 1$ in dveh koncentričnih polkrožnih lokov s polmeroma 1 in $1-b$. Takšni biljardi, ki imajo popolnoma vzporedne stene, imajo zanimivo dinamično lastnost enosmernega transporta: gibanje v eni smeri ves čas vztraja v isti smeri. Vzemi npr. $a = 1, b = 0.2$. Zanimivo je, da je gibanje na polovici faznega prostora (s pozitivno/negativno komponento hitrosti vzdolž stene) lahko povsem kaotično in ergodično. Preveri ergodičnost na obeh polovičkah faznega prostora za omenjeni biljard, in še morda za druge, ko spreminjaš vrednost parametra a.

29. Oglej si dinamiko v biljardu v obliki stadiona (npr. krožni lok $r = 1$, ravni odsek $a = 1$), v katerem vključiš homogeno magnetno polje B pravokotno na ravnino biljarda. Točkast delec pa naj ima velikost hitrosti $v = 1$ in naj nosi naboj $e = 1$. Kako izgleda struktura faznega prostora v odvisnosti od parametra B. Vemo, da je pri $B = 0$, biljard povsem ergodičen. Pri kako velikem B_c se pojavijo zaznavne komponente regularnega gibanja?

30. Opiši biljardni model z dvema končnima diskoma polmera $r < 1/2$, ki se prožno odbijata druga od druge in od krožne ograde s polmerom $R = 1$. Numerično konstruiraj Poincaréjevo preslikavo. Model ima štiri prostostne stopnje, vendar en trivialen integral gibanja, namreč skupno vrtilno količino. Razišči maksimalni Lyapunov eksponent v odvisnosti od r, npr. pri skupni vrtilni količini $L = 0$.

31. Razišči gibanje delca v biljardu z obliko kvadrata s stranico 1 v katerem je kvadratna ovira (z zunanjim kvadratom vzporednimi stenami in simetrično pozicionirana) s stranico $a < 1$. Zasleduj difuzijo števila ovojev okrog malega kvadrata $N(t)$, ki jih naredi naključno izbrana orbita. Zanima nas odvisnost $\langle N(t)^2 \rangle = Dt^\alpha$ in še posebej eksponent α. Kako je slednji odvisen od dejstva, če je a racionalno ali iracionalno število. Izberi npr. $a = (\sqrt{5} - 1)/2$ in $a = 3/5$. Pomemben podatek je tudi začetni kot pod katerim se orbita odbije od zunanje stene biljarda. Ta namreč določa invariantno mnogoterost (psevdo-torus), na katerem leži orbita.

32. Kaj se zgodi z difuzijo iz prejšnje naloge, če v si mislimo, da je delec nabit in vklopimo prečno magnetno polje, tako da tiri delca dobijo krivinski radij R? Oglej si oba primera, $a = (\sqrt{5} - 1)/2$ in $a = 3/5$ in razišči kako majhen R mora biti, da dobimo normalno difuzijo ($\alpha = 1$).

33. Oglej si dinamiko nabitega delca v eliptičnem biljardu, ki se nahaja v homogenem na ravnino biljarda pravokotnem magnetnem polju. Izberi primerne brezdimenzijske spremenljivke in kvalitativno opiši prehod v kaos z variacijo gostote magnetnega polja in/ali ekscentričnostjo elipse. Upoštevaj, da je eliptični biljard brez magnetnega polja integrabilen za vsako ekscentričnost.

34. Oglej si dinamiko v krožnem biljardu, v katerem vključiš enakomerno električno polje. Določi parameter od katerega je odvisna dinamika sistema. Pri kateri vrednosti parametra je kaos najmočnejši?

35. Napravi preprost model prevajanja toplote v verižnem *cik-cak* billjardu, ki ga omejujeta dve splošni žagasti krivulji, ki se lomita pod kotoma α in β in sta med seboj v razmiku h (en členek verige pa naj ima dolžino 1). Vzemi N členkov in jih sklopi z dvema toplotnima rezervoarjema pri različnih temperaturah T_1 in T_N. Sklopitev z rezervoarjem pomeni naslednje: ko delec trči s steno rezervoarja, pozabi longitudinalno komponento hitrosti p_x in jo nadomesti z novo (nasprotnega predznaka), ki jo izžreba po Maxvellowi porazdelitvi.

$$d\mathcal{P}(p_x)/dp_x = \frac{p_x}{T_{1,N}} \exp(-p_x^2/(2T_{1,2})).$$

Preveri, če je toplotni tok skozi verižni biljard po dolgem času sorazmeren gradientu temperature $J_Q = -\kappa(T_N - T_1)/N$ in če je temperaturni profil $T_n = \frac{1}{2}\langle p_x^2 + p_y^2 \rangle$ zares linearen po celi verigi. Prepričaj se o neodvisnosti konstante toplotne prevodnosti od dolžine verige N.

36. Enako kot prejšnja naloga le da za verižni biljard, ki ga sestavljajo v raven kanal širine 1 izmenoma zgoraj in spodaj vstavljene krožne ovire s polmerom $R < 1$.

37. Sestavi verižni biljard iz stadionov (dva nasprotna polkroga polmera R, ki sta zamaknjena za a), ki jih zložiš skupaj, tako da se stikajo vzdolž ravnih stranic. Ravne stranice nato odstrani, tako da dovoliš transport po verigi. Analiziraj difuzijo delcev $d(t) = \langle (x(t) - x(0))^2 \rangle$, kjer je $x(t)$ koordinata delca vzdolž verige. Zanima nas predvsem: (1) Ali je difuzija normalna, t.j ali $d(t) \approx 2Dt$ in poišči odvisnost $D = D(\epsilon)$, kjer je $\epsilon = a/R$, za male ϵ. (2) Če difuzija ni normalna, potem najbrž velja $d(t) \propto t^{\beta}$ in bi bilo lepo analizirati odvisnost eksponenta β od ϵ.

38. Podobna naloga kot prejšnja, le da naj bo verižni biljard sestavljen iz pravokotnikov, s stranicama a in b, v katerih mejnih ploskvah naj bodo luknjice velikosti ϵ. Pozicije luknjic so lahko (a) ali povsod na istem mestu (npr. v sredini stranice), (b) ali pa izmenoma zamaknjene gor/dol v vsaki drugi stranici.

39. Numerično obravnavaj integrabilno Toda-jevo verigo (npr. z metodo Runge-Kutta) s periodičnimi robnimi pogoji. Vzemi nekaj orbit s preprostimi začetnimi pogoji, npr. $p_j(0) = \text{konst}\,\delta_{j,0}$ in $q_j(0) = 0$ in spremljaj konstantnost integralov gibanja F_n. Kako se širi takšna motnja po dolgi verigi?

    Dodatno vprašanje: ali ostaja sprememba integralov gibanja časovno omejena, ko Todajevo verigo perturbiraš, tako da vsako drugo maso pomnožiš s faktorjem $1 + \epsilon$? Numerični eksperiment: študiraj npr $\langle (F_3(t) - F_3(0))^2 \rangle$