# Zaključne domače naloge iz dinamične analize, 2009

1. *Magnetna steklenica I:* Razišči gibanje nabitih delcev v "magnetni steklenici". Magnetno steklenico lahko npr. ustvariš v področju med dvema tuljavama, ki ležita na isti osti in po katerih teče tok v isto smer.

   Da bo račun lažju aproksimiraj tuljavi s točkastima magnetnima dipolomoa $p_m$, ki ležita v isti osi ($z$), npr pri koordinatah $h/2$ in $-h/2$ in kažeta v isto smer. Počasni nabiti delci so potem ujeti v področju v okolici izhodišča koordinatnega sistema.

   Poišči drugi integral gibanja (kot posledico cilindrične simetrije problema) in ga pravilno upoštevaj pri izločitvi para koordinat. Definiraj primerne brezdimensijske koordinate, ter konstruiraj (numerično) Poincarëjevo preslikavo. Razišči fazne portrete za nekaj tipičnih vrednosti brezdimenzijske energije delca. Poišči kritično hitrost pri kateri delec (skoraj vedno pobegne)

2. *Magnetna steklenica II:* Podobna naloga kot prejšnja le da magnetno steklenico tokrat ustvarja šest dipolov, ki jih zložiš na vsako od koordinatnih osi $(x, y, z)$ (v smeri osi) pri koordinatah $\pm h/2$. Zdaj ni več nobene simetrije in torej tudi drugega integrala gibanja ni več, zato Poincaréjevih presekov ni več mogoče nazorno risati.

   Napravi numerično analizo Ljapunovih eksponentov za ta sistem. Pri kateri vrednosti energije je Ljapunov eksponent maksimalen?

3. *Vodikov atom v homogenem električnem polju:* študiraj klasično gibanje elektrona v Coulombskem polju ob prisotnosti homogenega električnega polja v smeri osi $z$ s Hamiltonko

   $$H = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + eE_z z$$

   Uvedi primerne brezdimenzijske spremenljivke. Zaradi cilindične simetrije je komponenta vrtilne količine $\Gamma_z$ integral gibanja. Predstavi dinamiko v primernih koordinatah, npr. na Poincaréjevi sečni ploskvi in razišči njeno regularnost (integrabilnost) oziroma kaotičnost v odvisnosti od brezdimenzijskih spremenljivk (ki vkjučujejo tudi vrednosti integralov gibanja $\Gamma_z$ in $E$). Ali obstaja režim v katerem je dinamika povsem kaotična?

4. *Vodikov atom v homogenem magnetnem polju:* študiraj ravninsko ($x-y$) klasično gibanje elektrona v Coulombskem polju ob prisotnosti homogenega magnetnega polja v smeri osi $z$, s Hamiltonko

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

kjer je $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$ vektorski potencial za homogeno magnetno polje $\vec{B} = (0, 0, B)$. Uvedi primerne brezdimenzijske spremenljivke. Zaradi cilindične simetrije je komponenta vrtilne količine $\Gamma_z$ integral gibanja. Predstavi dinamiko v primernih koordinatah, npr. na Poincaréjevi sečni ploskvi in razišči njeno regularnost (integrabilnost) oziroma kaotičnost v odvisnosti od brezdimenzijskih spremenljivk (ki vkjučujejo tudi vrednosti integralov gibanja $\Gamma_z$ in $E$). Ali obstaja režim v katerem je dinamika povsem kaotična?

5. Vodikova molekula $H_2^+$: študiraj klasično gibanje elektrona v Coulombskem polju v okolici dveh protonov, ki ležita na osi $z$ razmaknjena v razdalji $d$, torej sistem opiše cilindrično simetrična hamiltonka:

$$H = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d/2)^2}} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d/2)^2}}$$

Uvedi primerne brezdimenzijske spremenljivke. Zaradi cilindične simetrije je komponenta vrtilne količine $\Gamma_z$ integral gibanja. Predstavi dinamiko v primernih koordinatah, npr. na Poincaréjevi sečni ploskvi in razišči njeno regularnost (integrabilnost) oziroma kaotičnost v odvisnosti od brezdimenzijskih spremenljivk (ki vkjučujejo tudi vrednosti integralov gibanja $\Gamma_z$ in $E$). Ali obstaja režim v katerem je dinamika povsem kaotična?

6. *Vsiljeno nihanje ravninskega matematičnega nihala v viskozni tekočini*: Zapiši enačbe gibanja za matematično nihalo, ki ga obesimo v viskozno tekočino (na koncu lahke prečke dolžine $l$ je kroglica z maso $m$ in polmerom $r$, upoštevaj linaren zakon upora za tekočino z viskoznostjo $\eta$). Vrtljiv zgornji konec prečke se giblje v vertikalni smeri, $z(t) = z_0 \cos\omega t$. Vpelji primerne brezdimenzijske spremenljivke in konstruiraj stroboskopsko preslikavo.

   Nato numerično študiraj lastnosti rešitev, meri npr. Ljapunov eksponent. Ali obstajajo pogoji pod katerimi dobimo kaotični atraktor? Oceni njegovo fraktalno dimenzijo.

7. *Brcan sistem rotatorjev, relaksacija v ravnovesje:* Obravnavaj relaksacijo v ravnovesje za brcan sistem rotatorjev s kanoničnimi koordinatami $p_j, \varphi_j$ in s Hamiltonko

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} p_j^2 + \sum_{j,k=1}^{N} \Gamma_{jk} \cos(\varphi_j - \varphi_k) \sum_m \delta(t-m).$$

   Najprej zapiši ustrezno večdimenzionalno stroboskopsko preslikavo. Obravnavaj dve 'topologiji': interakcije zgolj med sosedi $\Gamma_{j,k} = \Gamma(\delta_{j,k+1} + \delta_{j,k-1})$ in periodični robni pogoji $N+1 \equiv 1$, ali pa interakcijo vseh z vsemi $\Gamma_{jk} = \Gamma$. Izračunaj časovne korelacijske funkcije, npr $C(t) = \langle \cos\varphi_1(t) \cos\varphi_1(0) \rangle$ za različne $\Gamma$, npr. $0.1, 1, 10.$ in nekaj različnih velikosti npr. $N = 4, 16, 64$. Kako je s časovno dinamiko celotne energije $E(t)$ ali narašča neomejeno ($\propto t$) ali ne?

8. *Kvadratni biljard z vrtečim robom.* Vzami kvadrato biljardno mizo (s stranico $a$), katere rob se enakomerno vrti okrog svojega geometrijskega središča s kotno hitrostjo $\omega$.

   Opiši gibanje prožnega točkastega delca z maso $m$ v takšnem biljardu, npr. s primerno izbranim faznim prostorom in Poincaréjevo preslikavo. Pod kakšnimi pogoji je energija sistema s časom omejena, oziroma neomejena, oziroma kdaj je gibanje kaotično?

9. *Šibko sklopljena krožna biljarda:* Dva regularna krožna biljarda (enakih polmerov) šibko sklopi tako da v njun rob izreži kratko luknjico dolžine $\epsilon$ ter biljarda staknji vzdolž luknjic. Potem študiraj dinamiko delca, s poudarkom na prehodih skozi luknjico. Čimveč povej o statističnih lastnostih vste $\{t_1, t_2, t_3, \ldots\}$ casov, ob katerih se delec sprehodi skozi luknjico? Npr. povprečen čas med dvema prehodoma $\tau = t_{n+1} - t_n$, porazdelitev časov $\tau$, itn. Posebej si oglej režim malih $\epsilon$, kasneje pa morda še režim, ko *epsilon* ni veç majhen. Rezultati so seveda odvisni od začetnih pogojev in konstant gibanja, razen morda pri večjih $\epsilon$. Kako?

10. *Šibko sklopljena regularna biljarda:* Podobna naloga kot prejšnja, le da sklopi različna regularna biljarda, npr. krog s polmerom $r$ in kvadrat s stranico $a = 2r$.

11. *Lorentzov plin:* Študiraj dinamiko točkastega delca, ki se giblje v heksakogalni mreži krogelnih sipalcev (ovir). Krogelne ovire naj bodo

torej centrirane v ogliš čih heksagonalne mreže. Numerično izmeri difuzijsko konstanto kot funkcijo polmera ovir. Kaj se zgodi z difuzijsko konstanto, ko se "odpre horizont", t.j. ko postanejo možni poljubno dolgi sprehodi brez sipanja?

12. *Neurejen Lorentzov plin:* Ravnino prekrijmo z naključno razmetanimi krožnimi ovirami (a vse enakih polmerov). Dve oviri se lahko tudi prekrivata. Študiraj dinamiko točkastega delca, ki se giblje v takšnem okolju. Predpostavi edino, da je gostota ovir zadosti majhna, da delec ni morda ujet v zaprtem področju med ovirami. Numerično izmeri difuzijsko konstanto kot funkcijo gostote ovir.

13. *Neurejen Lorentzov plin v d dimenzijah:* $d$-dimenzionalni (hiper)prostor prekrijmo z naključno razmetanimi $d-$kroglastimi ovirami (a vse enakih polmerov). Dve oviri se lahko tudi prekrijeta Študiraj dinamiko točkastega delca, ki se giblje v takšnem okolju. Predpostavi edino, da je gostota ovir zadosti majhna, da delec ni morda ujet v zaprtem področju med ovirami. Numerično izmeri difuzijsko konstanto kot funkcijo dimenzije prostora $d$ za majhne gostote ovir.

14. *"Poligonski" Lorentzov plin:* Podobna naloga kot prejšnja, le da naj bodo ovire zdaj iz šestkotnikov. Kaj se zgodi z difuzijo? Kako je narava gibanja odvisna od žačetnih pogojev? Vzemi primera, da so šestkontniki poravnani z osnovno heksagonalno mrežo ali pa zasukani za nek kot glede na osnovno mrežo.

    Ali lahko najdeš pogoje pod katerimi pride do normalne difuzije?

15. *Inkomenzurabilni brcan rotator I:* Študiraj brcan rotator, ki ga brcaš z dvema sekvencama sunkov z inkomenzurabilnima periodama:

$$H(p,\varphi,t) = p^2/2 + k_1 \cos\varphi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-m\tau_1) + k_2 \cos\varphi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-m\tau_2)$$

    Vzemi npr $\tau_2/\tau_1 = (\sqrt{5}-1)/2, \tau_1 = 1$ in $k_1 = k_2 = k$. Razišči možnost deterministične difuzije v energiji rotatorja za šibko brcanje (male $k$). Npr. oglej si $\langle E(t)\rangle$ povprečeno po začetnih pogojih z $E = 0$, oz. $p = 0$, za različne $k$. Ali gre za normalno difuzijo ali je morda gibanje omejeno, in pri katerih vrednosti $k_c$ postane difuzija normalna?

16. *Inkomenzurabilni brcan rotator II:* Študiraj brcan rotator, ki ga brcaš z dvema sekvencama sunkov z inkomenzurabilnima periodama:

$$H(p,\varphi,t) = p^2/2 + k_1 \cos\varphi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - m\tau_1) + k_2 \cos\varphi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - m\tau_2)$$

Vzemi npr $\tau_2/\tau_1 = (\sqrt{5}-1)/2, \tau_1 = 1$ in $k_1 = k_2 = k$. S simulacijami izračunaj Ljapunove eksponente v odvisnosti od moči brcanja $k$, za tipične orbite. Dodatno vprašanje: Kaj se zgodi če je razmerje frekvenc 'manj iracionalno'?

17. *Zlom zadnjega KAM torusa v deformiranem krožnem biljardu.* Razišči zlom zadnjega primarnega KAM torusa v deformiranem krožnem biljardu katerega rob ima v polarnih koordinatah obliko $r(\phi) = 1 + a\cos n\phi$, in oceni ustrezno kritično vrednost perturbacijskega parmetra $a_c(n)$. Napravi simulacije za nekaj manjših vrednosti $n$.

    *Trikotni biljard.* Gibanje in prožno trkanje treh različnih točkastih mas $m_1$, $m_2$, in $m_3$, na obroču z enotskim obsegom, lahko preslikaš na biljard trikotne oblike. Razišči pojemanje časovnih korelacij za tipične opazljivke, npr hitrost posameznega delca, in bolj splošno lastnost mešanja in ergodičnost v takšnem sistemu.

18. *Tetraedričen biljard.* Gibanje in prožno trkanje treh različnih točkastih mas $m_1$, $m_2$, in $m_3$, med dvema trdima stenama, lahko preslikaš na 3D biljard v tetraedru. Razišči pojemanje časovnih korelacij za tipične opazljivke, npr hitrost posameznega delca, in bolj splošno lastnost mešanja in ergodičnost v takšnem sistemu.

19. *Enodimenzionalni plin:* Obravnavaj model enodimenzionalnega plina trdih elasti cnih kroglic, ki se gibljejo vzdolž osi $x$, npr. med trdima prožnima stenama pri $x_1 = 0$ in $x_2 = 1$, in med seboj prožno trkajo. Vzemimo $N$ molekul ($N$ sod) od tega naj bo $N/2$ molekul mase $m_1$ in $N/2$ molekul mase $m_2$. Vzemimo da imajo molekule "končen presek za sipanje", kar pomeni da se dve molekuli ki se srečata sipljeta (prožno odbijeta) z verjetnostjo $p$, medtem ko se z verjetnostjo $1-p$ "sprehodita mimo". Za $p = 1$ imamo povsem determinističen sistem, za $p = 0$ pa povsem neinteragirajoč sistem. V sistemu imamo poleg števila delcev $N$, tako dva zanimiva brezdimenzijska parametra: $p$ in $r = m_2/m_1$.

    Oglej si hitrost relaksacije v ravnovesje v odvisnosi od $N$, pri nekaj tipičnih vrednostih $p$ in $r$, npr. $r = (\sqrt{5}-1)/2, 1/2$ in $p = 1, 0.95, 0.5, 0.05$.

Hitrost relaksacije (mešanja) meri npr. z hitrostno avtokorelacijsko funkcijo $C(t) = \langle v_1(t) v_1(0) \rangle$ za eno od molekul.

20. *Fourierov zakon:* Razišči veljavnost Fourierovega zakona o prevajanju toplote za balistične delce, ki potujejo znotraj kvazi-enodimenzionalnega razsežnega biljardnega kanala, ki ga v ravnini $x-y$ omejujeta krivulji $y_1 = 1/2 + a\cos(2\pi x)$ in $y_2 = -1/2 + a\cos(2\pi x + \delta)$. Kanal je prekinjen z dvema vertikalnima prečkama $x = 0$ in $x = l$, $l$ velik. Ko delec trči s kako od vertikalnih prečk, z njima izmenja energijo, t.j. po trku dobi Maxwellsko porazdeljeno hitrost $dP/dv = Cv\exp(-v^2/(2T))$ s kanonično temperaturo $T_L$ $(x = 0)$ ali $T_R$ $(x = l)$. Meri temperaturni profil vzdolž kanala (t.j. povprečno kinetično energijo na določenem mestu, med $x$ in $x + \Delta x$), ter zasleduj toplotni tok kot funkcijo temperaturne razlike in/ali dolžine kanala $l$, za primera $\delta = 0$ in $\delta = \pi$. Ali obstaja kritična vrednost deformacije $a_c$ pri kateri Fourierov zakon nenadoma začenja veljati?