
DINAMIČNA ANALIZA – Zaključne naloge

Avtor: Marko ŽNIDARIČ

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETE ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA FIZIKO
2010

Zaključne naloge iz Dinamične analize, 2010

Vrteči se biljardi

1. *Kvadrat*: [■] Kvadratni biljard, znotraj katerega se prožno odbija točkast delec, se vrti s konstantno kotno hitrostjo ω okoli osi, ki gre skozi središče kvadrata. Konstruiraj Poncaréjevo preslikavo in razišči dinamiko pri različnih parametrih. Ali lahko energija delca narašča? Ali obstaja kakšna konstanta gibanja?
2. *Krog*: [■] Krožni biljard, znotraj katerega se prožno odbija točkast delec, se vrti s konstantno kotno hitrostjo ω okoli navpične osi, ki gre skozi obod kroga. Konstruiraj Poncaréjevo preslikavo in razišči dinamiko pri različnih parametrih. Ali lahko energija delca narašča? Ali obstaja kakšna konstanta gibanja?
3. *Trikotnik*: [■] Biljard z mejo v obliki enakostraničnega trikotnika se vrti s konstantno kotno hitrostjo ω okoli navpične simetrijske osi, ki gre skozi težišče trikotnika. Konstruiraj Poncaréjevo preslikavo in razišči dinamiko pri različnih parametrih. Ali lahko energija delca narašča? Ali obstaja kakšna konstanta gibanja?

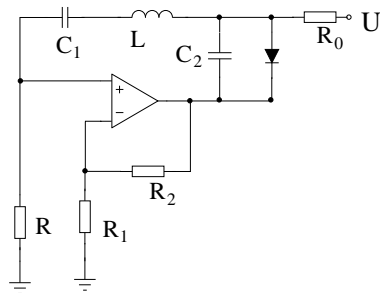
Odprti biljardi

4. *Krožni z luknjico*: [■] V krožni biljard izvrtamo majhno luknjico velikosti ϵ , skozi katero lahko delec pobegne iz biljarda. Kako se verjetnost za preživetje, to je verjetnost, da je delec še vedno v biljardu, spreminja s časom, če na začetku v biljard nasujemo neinteragirajoče delce po enakomerni porazdelitvi v Birkhoffovih koordinatah? Zanima nas predvsem obnašanje za velike čase in vrednost predfaktorja. Kako pa je, če imamo dve enako veliki luknjici zamaknjeni za kot α ? Poizkusiš lahko s kakšnimi enostavnimi koti, npr. $\alpha = \pi, 2\pi/3, \dots$, ali pa iracionalnimi.
5. *Bunimovičev z luknjico*: [■] V steno stadionskega biljarda izvrtamo majhno luknjico velikosti ϵ , skozi katero lahko delec pobegne iz biljarda. Kako se verjetnost za preživetje, to je verjetnost, da je delec še vedno v biljardu, spreminja s časom, če na začetku v biljard nasujemo neinteragirajoče delce po enakomerni porazdelitvi v Birkhoffovih koordinatah? Kje mora biti luknjica, da bo ta največja oz. najmanjša?
6. *“Saturnovi obroči”*: [■] Trdi disk polmera r s konstantno kotno hitrostjo ω kroži okoli fiksnega centra na razdalji R . Proti temu disku pošiljamo točkaste delce v vseh mogočih smereh. Ti lahko disk zgrešijo in pobegnejo v neskončnost, ali pa se od diska prožno odbijejo, nakar se spet lahko sipljejo na krožečem disku. Ali obstajajo delci, ki ostanejo ujeti, to je, ki ne pobegnejo v neskončnost? Kakšna je njihova lega v konfiguracijskem prostoru?

Disipativni sistemi

7. *Vzbujano nihalo*: Točka vpetja dušenega matematičnega nihala niha v navpični smeri kot $A \cos \omega t$. Zanima nas stabilnost nihanja, ko je nihalo postavljeno “na glavo”. Pri kakšnih vrednostih parametrov je takšno nihanje stabilno, kakšen je bazen privlačnosti?

8. *Lorentzov atraktor*: [■] Razišči atraktor v Lorentzovem sistemu $\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y$, $\dot{Y} = -XZ + rX - Y$, $\dot{Z} = XY - bZ$. Izračunaj fraktalno dimenzijo atraktorja, ali je atraktor čuden? Poizkusiš lahko tudi poiskati periodične orbite na atraktorju.
9. *Električno vezje*: [■] Idealno vezje, kot ga prikazuje slika, priključimo na napetost U . Na negativno stran operacijskega ojačevalca vežemo v povratni zanki standardni delilnik napetosti, na pozitivno stran pa resonančni krog. Zveza med napetostjo na diodi U_D in tokom I_D skozi njo je dana z $I_D = I_s[\exp(eU_D/kT) - 1]$ in povzroči nelinearnost vezja. Izberi ustrezne spremenljivke, zapiši sistem diferencialnih enačb in razišči obnašanje rešitev. Zanima nas če in pri kakšnih parametrih pride do kaosa. Ali imamo kaotični atraktor? Realistične vrednosti parametrov so npr. $C_1 = 100 \text{ nF}$, $C_2 = 15 \text{ nF}$, $L = 100 \text{ mH}$, $R = 1 \text{ k}\Omega$, $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 15 \text{ k}\Omega$, $R_0 = 20 \text{ k}\Omega$, $U = 10 \text{ V}$, $I_s = 3 \cdot 10^{-11} \text{ A}$.



Scenariji KAM

10. *Prerezan krog*: [■] Krožnemu biljardu odrežemo krožni odsek širine w ("kapico" kroga med tetivo in obodom, ki je debela w). Analiziraj strukturo faznega prostora v odvisnosti od parametra w . Kako je s stabilnostjo enostavnih periodičnih orbit?
11. *Deformiran krog*: [■] Krožni biljard deformiramo tako, da je oddaljenost stene od središča dana z enačbo $r(\varphi) = 1 + a \sin 2\varphi$. Razišči Poincarejéve sečne ploskve pri različnih jakostih deformacije a . Primerjaj eksakten račun s tistim, kjer pri odbojih upoštevaš le naklon stene, radij pa je vedno kar 1 (Fresnelov približek). Identificiraj kakšne enostavne periodične orbite in si oglej njihovo stabilnost.
12. *Vzbujano nihalo*: [■] Točka vpetja matematičnega nihala se s kotno hitrostjo ω giblje po krožnici s polmerom ϵ . Konstruiraj stroboskopsko preslikavo in razišči fazne portrete pri različnih vrednostih parametrov. Kolikšen je delež kaotične komponente?
13. *Krožni biljard s črvino*: [■] V krožnem biljardu izvrtamo dve luknji, ki sta med seboj zamaknjeni za središčni kot φ , vsaka luknja pa oklepa središčni kot δ . Obe luknji povežemo med seboj z dvema krožnima lokoma, ki sta na mestu lukenj tangentna na krog. Oba loka tako tvorita povezovalni "tunnel" od ene do druge luknje. Razišči dinamiko v takšnem sistemu. Zanimata nas dve stvari, kako se spremeni sama dinamika v biljardu, in kakšna je statistika prehodov skozi tunnel pri majhnih luknjah, ko so le ti redki?

14. *Deformiran trikotnik:* [■] Enakokraki trikotnik s koti $\pi/4, \pi/4, \pi/2$ deformiramo na dva načina. V prvem daljšo stranico, ki leži ob osi x , sinusno nagubamo, tako da je njena oblika dana z $\epsilon \sin(2\pi nx/c)$, $n = 2, 3, \dots$, če je c dolžina stranice. V drugem primeru stranico "nažagamo", $\epsilon f(nx/c)$, kjer je $f(x+1) = f(x)$ periodična šotorska funkcija,

$$f(x) = \begin{cases} 4x & ; 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ -4x + 2 & ; \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{4} \\ 4(x-1) & ; \frac{3}{4} \leq x < 1 \end{cases}$$

Primerjaj dinamiko v obeh biljardih.

Transport

15. *Vrteči se sipalci:* [■] V 1d kanalu širine $4R/\sqrt{3}$ so na heksagonalni mreži postavljeni prosto vrteči se krožni sipalci s polmerom R in vztrajnostnim momentom J . V eni celici kanala imamo tako dva sipalca, v prečni smeri pa imamo periodične robne pogoje. Zanima nas transport točkastih delcev mase m skozi kanal sestavljen iz N celic, če imamo na levem in desnem koncu termični rezervoar s temperaturo $T_{1,2}$, v kanalu pa imamo N delcev. Ko delec prileti v rezervoar, namesto njega v kanal pošljemo nov delec z normalno hitrostjo porazdeljeno po $p(v_n) = m/kTv_n \exp(-mv_n^2/2kT)$, tangento pa po $p(v_t) = \sqrt{m/2\pi kT} \exp(-mv_t^2/2kT)$. Ob trku delca s sipalcem se ohrani skupna energija, vrtilna količina, predznak normalne hitrosti delca pa se obrne. Lokalno temperaturo lahko izračunaš iz lokalne gostote delcev $\rho(x)$ in lokalne kinetične energije delcev $E(x)$ kot $T(x) = E(x)/\rho(x)$. Ali je temperaturni profil linearen, ali velja Fourierov zakon?
16. *Stohastični proces - korelacije:* [■] Imejmo 1d verigo z N mesti. Vsako mesto je lahko ali prazno, ali pa zasedeno z enim delcem. Dinamiko sistema določa naslednji Markovski proces, ki je podan z verjetnostmi za dogodke v kratkem časovnem intervalčku dt : vsak delec skoči z verjetnostjo dt na levo sosednje mesto, če je le to prazno, in z enako verjetnostjo dt na desno sosednje mesto, še je to prazno; sklopitev z dvema neskončnima rezervoarjema pa določata pravili, da z verjetnostjo αdt iz rezervoarja delec skoči na prvo mesto, če je le to prazno, če je pa prvo mesto zasedeno, pa ta delec odstranimo z verjetnostjo $(1-\alpha)dt$; na zadnjem mestu je podobno, če je le to prazno, ga z verjetnostjo δdt zasedemo z delcem iz rezervoarja, in izpraznimo z verjetnostjo $(1-\delta)dt$, če je zasedeno. Pri danih α in δ se po dolgem času vzpostavi neravnovesno stacionarno stanje. Zanimajo nas lastnosti tega stanja. Kakšna je povprečna zasedenost i -tega mesta, torej gostota $\rho_i = \langle n_i \rangle$, kolikšen pa je stacionarni tok delcev? Ali velja Fickov zakon, $j = -\kappa \nabla \rho$. Kakšna pa je korelacijska funkcija gostote, $C(i, j) = \langle n_i n_j \rangle - \langle n_i \rangle \langle n_j \rangle$?

17. *Stohastični proces - fazni diagram:* [■] Imejmo 1d verigo z N mesti. Vsako mesto je lahko ali prazno, ali pa zasedeno z enim delcem. Dinamiko sistema določa naslednji Markovski proces, ki je podan z verjetnostmi za dogodke v kratkem časovnem intervalčku dt : vsak delec skoči z verjetnostjo dt na desno sosednje mesto, če je le to prazno; sklopitev z dvema neskončnima rezervoarjema pa določata pravili, da z verjetnostjo αdt iz levega rezervoarja delec skoči na prvo mesto, če je le to prazno, in če je zadnje mesto zasedeno, ta delec skoči v rezervoar z verjetnostjo βdt . Pri danih α in β se po dolgem času vzpostavi neravnovesno stacionarno stanje. Zanima nas fazni diagram takšnega sistema, to je, naravo stacionarnega stanja pri različnih α in β . Lastnosti stacionarnega stanja lahko opredeliš s preprostimi opazljivkami, npr. povprečno zasedenostjo i -tega mesta, torej gostoto $\rho_i = \langle n_i \rangle$, stacionarnim tokom delcev, korelacijsko funkcijo gostote, $C(i, j) = \langle n_i n_j \rangle - \langle n_i \rangle \langle n_j \rangle \dots$

Večdelčni sistemi, statistično obnašanje

18. *Klasična spinska veriga:* [■] Imejmo periodično verigo N klasičnih spinov \mathbf{S}_i (enotskih vektorjev), katerih dinamiko narekuje Hamiltonova funkcija $H = \sum_i S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y + \Delta S_i^z S_{i+1}^z$ preko gibalnih enačb $\dot{\mathbf{S}}_i = \mathbf{S}_i \times \nabla_{\mathbf{S}_i} H$. Namesto kotov na sferi lahko spin \mathbf{S}_i parametriziramo tudi s kanoničnim parom $p_i = \cos \theta_i$ in $q_i = \varphi_i$, tako da imajo gibalne enačbe obliko $\dot{\mathbf{S}}_i = \{\mathbf{S}_i, H\} = \frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}$. Ali lahko v sistemu najdeš znake kaosa? Poizkusiš lahko z Lyapunovimi eksponenti, ali pa analizo stabilnosti kakšnih enostavnih začetnih pogojev, npr. časovno ali prostorsko neodvisnih rešitev, npr. $\theta_i(t) = \theta(t)$.
19. *Plin trdih kroglic:* [■] V kvadratno posodo zapremo N idealno gladkih trdih kroglic s polmerom R , ki s stenami posode in med seboj prožno trkajo (med trki je sila pravokotna na podlago). Kako začetna neravnovesna porazdelitev, npr. vse kroglice imajo enako velikost hitrosti, relaksira k ravnovesni? Kolikšen je rekalsacijski čas in od česa in kako je odvisen? Ali velja plinska enačba za idealni plin? Kaj se zgodi v limiti $R \rightarrow 0$. Ali lahko iz svojih simulacij oceniš, kolikšen bi bil relaksacijski čas v realnem plinu pri pritisku 1 bar in temperaturi 300 K?
20. *Todina veriga:* [■] Obravnavaj Todino verigo s tremi delci in periodičnimi robnimi pogoji. Zanima nas, kako je kaotičnost odvisna od reda p , do katerega razvijemo eksponentni potencial. Nariši fazne portrete in poglej, kako se le ti spreminjajo, če spreminjaš p . Kako pa je v verigi z N delci?
21. *Poincaréjevi časi povratka:* Študiraj statistiko časov povratka v enostavnih dinamičnih sistemih, npr. v standardni preslikavi za različne K in pa preslikavi Arnoldove mačke. Ali je hitrost pojemanja te porazdelitve za velike čase povezana s kakšnim izmed znanih parametrov, npr. Lyapunovim eksponentom, eksponentom α pri razširjanja paketov ($\sigma^2 \asymp t^\alpha$),...? Anomalno difuzijo v standardni preslikavi pričakujemo za $n < K < n\sqrt{1 + \frac{4}{(\pi n)^2}}$, $n \in \mathcal{N}$.

Atomi

22. *Donor v polprevodniku:* [■] Gibanje elektrona okoli donorskega atoma v polprevodniku (npr. okoli arzena v siliciju) lahko opišemo s Hamiltonovo funkcijo

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m_x} + \frac{p_z^2}{2m_z} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}.$$

Za razliko od vodika je masa anizotropna, še vedno pa imamo cilindrično simetrijo, tako da je ustrezna komponenta vrtilne količine konstanta gibanja. Kako se kaotičnost sistema spreminja z razmerjem mas m_z/m_x (to je v siliciju ≈ 4.8 , v germaniju pa ≈ 20)? Kaotičnost lahko študiraš tako, da skonstruiráš in narišes Poincaréjeve sečne ploskve.

23. *Vodik v magnetnem polju:* [■] Vodik v homogenem magnetnem polju opišemo s Hamiltonovo funkcijo

$$H = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

kjer je $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ vektorski potencial. Konstanti gibanja sta energija in komponenta vrtilne količine v smeri osi z . Razišči dinamiko na primerni Poincaréjevi sečni ploskvi. Ali obstaja kaotični režim in pri kolikšnem magnetnem polju?

24. *Litij v električnem polju:* [■] Gibanje zunanjšega elektrona v litijevem atomu, ki ima tri elektrone, od tega dva v zapolnjeni lupini, v homogenem električnem polju, lahko opišemo s Hamiltonovo funkcijo

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + eEz + V_s(r),$$

kjer je $V_s(r) = -2 \exp(-r/\lambda) \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ približen popravek Coulombskega potenciala jedra zaradi senčenja zapolnjene lupine. Zraven energije je konstanta gibanja tudi Γ_z . Razišči obstoj kaosa v odvisnosti od parametrov in konstant gibanja.

25. *Relativistični nabit delec:* Nabit delec se giblje v homogenem časovno neodvisnem magnetnem polju usmerjenem v smeri osi z in homogenem periodičnem električnem polju v smeri osi y . Kovariantne enačbe gibanja so

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = e F^{\mu\nu} u_\nu,$$

če je $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ relativistična hitrost, $F^{\mu\nu}$ pa tenzor elektromagnetnega polja. Velja $F^{\mu\nu} u_\nu = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}/c, \mathbf{E}u^0/c + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$, kjer je v našem primeru $\mathbf{B} = B\hat{e}_z$, $\mathbf{E} = E\hat{e}_y \cos \omega t$. Poišči konstante gibanja, in analiziraj dinamiko pri različnih vrednostih parametrov. Ali je gibanje vedno regularno? Kako je v nerelativistični limiti?