Naloge iz teorije dinamičnih sistemov, 2012

1. Študiraj ravninsko gibanje delca s Hamiltonovo funkcijo

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + ax^2y^2.$$

Z računalniškim programom konstruiraj Poincarejevo preslikavo in razišči fazni prostor v odvisnosti od energije $E = H$. Poišči brezdimenzijsko kombinacijo energije E in konstante a, ki določa dinamiko sistema, in ilustriraj kaotično naravo dinamike sistema, npr. z računanjem Ljapunovih eksponentov, korelacijskih funkcij, itn.

2. Podobna naloga kot prejšnja, le da za Hamiltonovo funkcijo oblike

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + a(x^4 + y^4).$$

[Poklinek]

3. Razišči gibanje splošne gravitacijske vrtavke s Hamiltonovo funkcijo

$$H = \sum_{s=1}^{3} \left(\frac{1}{2I_s} l_s^2 + mga_s n_s \right)$$

kjer so l_1, l_2, l_3 komponente vrtilne količine vzdolž lastnih osi tenzorja vzrtajnostnega momenta J, $\vec{e}_s$, in $J\vec{e}_s = J_s\vec{e}_s$, n_1, n_2, n_3 pa so verikalne komponente lastnih osi, $n_s = (0, 0, 1) \cdot \vec{e}_s$. $\vec{l}$ in $\vec{e}$ predstavljajo kanoničen set dimamičnih spremenljivk s sledečo (Liejevo) algebro Poissonovih oklepajev

$$\{l_r, l_s\} = \sum_t \epsilon_{rst} l_t, \quad \{l_r, n_s\} = \sum_t \epsilon_{rst} n_t, \quad \{n_r, n_s\} = 0, \quad r, s, t \in \{1, 2, 3\}$$

kjer je ϵ_{rst} popolnoma antisimetričen Levi-Civitajev tenzor. Vzemi npr. perturbirano Lagrangeovo vrtavko, s parametri (Δ, a, λ), $J_1 = J_2 = 1$ in $J_3 = \Delta$, ter $a_1 = \lambda$, $a_2 = 0$, $a_3 = a$, tako da je za $\lambda = 0$ vrtavka integrabilna [1] Napravi smiselno predstavitev dinamike s Poincarejevo preslikavo in poskusi določiti relativen delež kaotičnega faznega prostora (energijske lupine, pri neki energiji E) v odvisnosti od perturbacijskega parametra λ. [Čančula]

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange,_Euler_and_Kovalevskaya_tops

4. Razišči gibanje sistema dveh sklopljenih "Eulerjevih" vrtavk, z vektorjema vrtilnih količin $\vec{l}$, $\vec{j}$, ki ubogata Poissovove oklepaje

$$\{l_r, l_s\} = \sum_t \epsilon_{rst} l_t, \quad \{j_r, j_s\} = \sum_t \epsilon_{rst} j_t, \quad \{l_r, j_s\} = 0, \quad r, s, t \in \{1, 2, 3\},$$

in hamiltonko

$$H = \frac{1}{2J_1} l_1 j_1 + \frac{1}{2J_2} l_2 j_2 + \frac{1}{2J_3} l_3 j_3.$$

Ali obstaja kombinacija vztrajnostnih momentov J_1, J_2, J_3, za katero je gibanje regularno (integrabilno)? Sicer numerično konstruiraj Poincaréjevo preslikavo in razišči indikatorje kaosa (Ljapunive eksponente, delež kaotični orbit, pojemanje korelacij) v odvisnosti od parametrov J_1, J_2, J_3. [Mavri?]

5. Študiraj brcano Eulerjevo vrtavko s Hamiltonovo funkcijo

$$H(t) = \frac{1}{2} l_3^2 + h l_1 \sum_{m=-\infty} \delta(t - m).$$

Izpelji stroboskopsko preslikavo in študijar njene ergodične lastnosti v odvisnosti od parametra h. Ali obstaja vrednost, pri kateri je preslikava skoraj povsem kaotična?

6. Študiraj periodično verigo (obroč) brcanih Eulerjevih vrtavk s Hamiltonovo funkcijo

$$H(t) = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{2} l_{j,3} l_{j+1,3} + h l_{j,1} \sum_{m=-\infty} \delta(t - m) \right)$$

$\vec{l}_{N+1} \equiv \vec{l}_1$, $\{l_{j,s}, l_{k,r}\} = \delta_{j,k} \sum_t \epsilon_{srt} l_{j,t}$. Simuliraj celoten Ljapunov spekter verige za nekaj vrednosi N in h. Zanimivo je predvsem vprašanje termodinamske limite $N \to \infty$ Ljapunovega spektea, je zveze, ali se pojavijo kake izolorane (singularne) vrednosti?

7. Razišči dvo-frekvenčni brcani rotator s časovno odvisno (brezdimenzijsko) hamiltonko

$$H(t) = \frac{p^2}{2} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{k\delta(t - m) + k'\delta(t - m\tau - \theta)\} \cos\varphi$$

Zanimiva je predvsem dinamika za inkomenzurabilno razmerje brcanih frekvenc (t.j. τ iracionalen, npr $\tau = (\sqrt{5}-1)/2$). Oglej si pojemanje korelacij, difuzijsko konstanto $\langle (p_t - p_0)^2 \rangle/(2t)$, $t \to \infty$, ter Ljapunov eksponent v odvisnosti od konstant k, k' in nekaj tipičnih vrednosti razmerja frekvenc τ. Ali ima fazni zamik θ kak vpliv? Ali obstaja kaka zanimiva predstavitev dinamike v faznem prostoru (pozor: koncept običajne stroboskopske preslikave tu zaradi aperiodičnosti odpove)?

8. Razišči dvo-frekvenčni brcani rotator s časovno odvisno (brezdimenzijsko) hamiltonko

$$H(t) = \frac{p^2}{2} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{k\delta(t-m)\cos\varphi + k'\delta(t-m\tau)\cos 2\varphi\}$$

Oglej si pojemanje korelacij, difuzijsko konstanto $\langle (p_t - p_0)^2 \rangle/(2t)$, $t \to \infty$, ter Ljapunov eksponent v odvisnosti od konstant k, k' in nekaj tipičnih vrednosti razmerja frekvenc τ (npr. $\tau = 2$, ali $\tau = (\sqrt{5}-1)/2$). Ali ima fazni zamik θ kak vpliv? Ali obstaja kaka zanimiva predstavitev dinamike v faznem prostoru (pozor: koncept običajne stroboskopske preslikave tu zaradi aperiodičnosti odpove)?

9. Študiraj Fibonaccijev brcani rotator, ki je definiran takole, nad faznim prostorom $\mathcal{M} = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \ni (\varphi, p)$: Naj bosta T_0 in T_1 preslikavi, ki predstavljata prosto rotacijo in brco:

$$T_0(\varphi, p) := (\varphi + p, p), \qquad T_1(\varphi, p) = (\varphi, p + k\sin\varphi).$$

Nato zgradimo Fibonaccijevo simbolično zaporedje F_n, $n \to \infty$, z rekurzijskim predpisom

$$F_{n+1} = F_n F_{n-1}$$

(kjer "produkt" pomeni zaporedje dveh končnih podzaporedij), z začetnim pogojem $F_0 = (0)$ in $F_1 = (1)$. Tako dobimo npr.

$$F_2 = (01),\ F_3 = (010),\ F_4 = (01001),\ F_5 = (01001010),$$

itd. Naj $f_j \in \{0, 1\}$ predstavlja $j-$ti člen zaporedja F_∞, šteto z leve (kjer se vsa delna zaporedja F_n, ki imajo vsaj j členov, ujemajo). Fibonaccijev brcani rotator je potem definiran kot

$$(\varphi_j, p_j) = T_{f_j}(\varphi_{j-1}, p_{j-1})$$

oziroma $(\varphi_t, p_t) = (T_{f_t} \circ T_{f_{t-1}} \circ \cdots T_{f_1})(\varphi_0, p_0)$. Oglej si pojemanje korelacij, ter Ljapunov eksponent v odvisnosti od konstante k Ali obstaja kaka zanimiva predstavitev dinamike v faznem prostoru (pozor: koncept običajne stroboskopske preslikave tu zaradi aperiodičnosti odpove)?

10. V zgornjem modelu Fibonaccijevega brcanega rotatorja študiraj stabilnost zlatega torusa (z zlatim ovojnim številom) na majhne motnje k. Ali obstaja kritični k^*, kjer gibanje z zlatim ovojnim številom ostane stabilno, za $k < k^*$? [Hladnik]

11. Pravokotni biljard s stranicama a in b je do polovice v homogenem magnetnem polju z gostoto B, ki kaže pravototno na ravnino biljarda. Naj delec v biljardu nosi naboj e in maso M. Razišči obnašanje sistema (fazni portreti in Ljuapunovi eksponenti) za različne vrednosti (brezdimenzijskega) magnetnega polja, in razmerja stranice a/b, npr. $a/b = 1, (\sqrt{5} - 1)/2$. [Grošelj]

12. Biljardni model Fermijevega pospeševanja. Vzemimo Sinaijev Biljard: Kvadrat s stranico $a = 1$ in v središču krožno oviro. V nekem trenutnu naj krožna ovira začne "dihati", t.j. njen polmer naj se spreminja kot periodična funkcija časa $r(t) = r_0 + r_1 \cos \omega t$. Razišči kako se spreminja povprečna energija ensembla orbit s časom, v asimptotski dolgočasovni limiti? Vzemi npr $r_0 = 0.3$, $r_1 = 0.03$, $\omega = 1$. [Marin]

13. Podobna naloga kot zgornja, le za kvadratno oviro. [Štorgelj]

14. Podobna naloga kot predprej, le da naj se premika x-koordinata središča krožne ovire kot $x(t) = r_1 \cos \omega t$, medtem ko naj njen polmer r_0 ostaja konstanten. [Bohinec]

15. Podobna naloga kot prešnja, le za kvadratno oviro. [Brecelj]

16. Pasivni časovno odvisni biljard. Vzemimo trikotni biljard s kotoma α,β ob stranici $c = 1$. Pravokotno na stranico c iz kota pri vrhu periodično postavljajmo steno: v prvi polovici periode τ, naj ne bo stene, v drugi polovici periode τ pa naj stena bo. Primerjaj pojemanje korelacijskih funkcij, npr. avtokorelacijske funkcije x-komponente hitrosti v_x, v takšnem biljardu, z navadnim trikotnim biljardem brez središčne stene. Ali vklapljajoča stena pospeši pojemanje korelacij, in kako? Ali

je odgovor morda odvisen od racionalnosti oz. iracionalnosti kotov α, β v razmerju s π?

17. Fermijevo pospeševanje v idealnem enodimenzionalnem plinu. Med dve steni v razdalji l postavi izmenoma toge prečke dveh vrst, masami m_1 in m_2, ki se gibljejo le v eni smeri (prečno na steve), in med seboj ter s stenami prožno trkajo. V nekem trenutku začnemo tresti eno od sten, tako da se njena koordinata spreminja kot $x(t) = x_0 \cos \omega t$. Simuliraj dinamko sistema in razišči, kako se po dolgem času spreminja skupna energija takšnega enodimenzionalnega plina s časom? Kako je rezultat odvisen od števila delcev (prečk) pline N? [Zaplotnik]

18. Podobna naloga kot prejšnja, le da naj imajo vse prečke enake mase, povezane pa naj bodo z neraztegljivimi lahkimi vrvicami dolžine a, ki prožno preprečujejo, da bi se dve sosednji masi oddaljili za več kot a. [Aplinc]

19. Biljarde v obliki enakokrakih trikotnikov s kotom α pri vrhu zložimo enega poleg drugega tako da vrhovi kažejo izmenoma v eno in drugo smer. Nato jih odpremo z luknjicami relativnega premera ϵ, izmenoma na enem ali drugem skrajem koncu stične stranice. [Zmrzlikar]

    Razišči transport sistema, t.j. kako se spreminja povprečen kvadrat odmika $\langle (\Delta x(t))^2 \rangle = D_\beta t^\beta$, če je x koordinata vzdolž verige, in povprečimo čez, (i) eno samo dolgo orbito, (ii) čez mnogo orbit z naključno in enakomerno posejanimi začetnimi pogoji po faznem prostoru. Obravnavaj dva primera: $\alpha = \pi/5$ in $\alpha = \pi(\sqrt{5}-1)/4$

20. Napravi preprost model prevajanja toplote V trikotnem verižnem biljardu opisanem zgoraj. Vzemi N členov in jih sklopi z dvema toplotnima rezervoarjema pri različnih temperaturah T_1 in T_N. Sklopitev z rezervoarjem pomeni naslednje: ko delec trči s steno rezervoarja, pozabi longitudinalno komponento hitrosti v_x in jo nadomesti z novo (nasprotnega predznaka), ki jo izžreba po Maxvellowi porazdelitvi.

    $$d\mathcal{P}(v_x)/dv_x = \frac{v_x}{T_{1,N}} \exp(-v_x^2/(2T_{1,2})).$$

    Preveri, če je toplotni tok skozi verižni biljard po dolgem času sorazmeren gradientu temperature $J_Q = -\kappa(T_N - T_1)/N$ in če je temperaturni profil $T_n = \frac{1}{2}\langle v_x^2 + v_y^2 \rangle$ zares linearen po celi verigi. Prepričaj se o neodvisnosti konstante toplotne prevodnosti od dolžine verige N.

21. Ohmov zakon: Spet enak sistem kot predprejšnja naloga (trikotna biljardna veriga), vendar naj se zdaj biljard nahaja v električnem polju jakosti E, vzdolž osi x. Predpostavi, da se pri prehodu skozi luknjico delcu vsakič zmanjša kinetična energija za faktor β, $\beta \in [0,1)$, pri čemer se ohrani smer vektorja hitrosti.

    Simuliraj dinamiko sistema v odvisnosti od jakosti električnega polja. Električni tok je sorazmeren povprečni hitrosti $\bar{v_x}$ delca vzdolž osi x, namreč $I = en\bar{v_x}$, kjer je n številska gostota delcev. Določi torej $\bar{v_x}$ in preveri če velja $\bar{v_x} = \xi E$, za neko konstanto ξ, pri nekaj različnih vrednostih koeficienta dušenja β. Morda lahko simuliraš še odvisnost $\xi(\beta)$? [Kranjnc]

22. Obravnavaj model difuzije v neskončno ravnini z lokalno Arnoldovo mačko. Definirajmo preslikavo na celotni ravnini (x, y):

    $$\begin{aligned} x_{t+1} &= \{x_t\} + a(x_t - \{x_t\}) + b(y_t - \{y_t\}) \\ y_{t+1} &= \{y_t\} + c(x_t - \{x_t\}) + d(y_t - \{y_t\}) \end{aligned}$$

    kjer $\{x\}$ označuje 'najbljižje celo število' k x. a, b, c, d so cela števila, ki zadoščajo pogoju $ad - bc = 1$. Ali je deterministična difuzija v tem modelu izotropna? Definirajmo difuzijski tenzor

    $$D = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t} \langle (x_t - x_0, y_t - y_0) \otimes (x_t - x_0, y_t - y_0) \rangle_{x_0, y_0}$$

    Poskusi ga izračunati! [Fabjan]

23. Numerično obravnavaj integrabilno Toda-jevo verigo (npr. z metodo Runge-Kutta) s periodičnimi robnimi pogoji. Vzemi nekaj orbit s preprostimi začetnimi pogoji, npr. $p_j(0) = \mathrm{konst}\,\delta_{j,0}$ in $q_j(0) = 0$ in spremljaj konstantnost integralov gibanja F_n. Kako se širi takšna motnja po dolgi verigi?

    Ali ostaja sprememba integralov gibanja časovno omejena, ko Toda-jevo verigo perturbiraš, tako da vsako drugo maso pomnožiš s faktorjem $1 + \epsilon$, oziroma kaj se dogaja, ko povečuješ ϵ? Numerični eksperiment: študiraj npr $\langle (F_3(t) - F_3(0))^2 \rangle$

24. Opiši biljardni model z dvema končnima diskoma polmera $r < 1/2$, ki se prožno odbijata druga od druge in od krožne ograde s polmerom

$R = 1$. Numerično konstruiraj Poincaréjevo preslikavo. Model ima štiri prostostne stopnje, vendar en trivialen integral gibanja, namreč skupno vrtilno količino. Razišči maksimalni Lyapunov eksponent v odvisnosti od r, npr. pri skupni vrtilni količini $L = 0$.