Domače vaje iz Teorije dinamičnih sistemov (l. 2013/2014)

1. Zapiši stroboskopsko preslikavo za brcan Harperjev sistem, ki pod določenimi pogoji opisuje elektron v dvodimenzionalnem periodičnem potencialu in homogenem električnem polju

   $$H(p, q, t) = K \cos p + L \cos q \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau).$$

   Napravi nekaj faznih portretov sistema in kvalitativno opiši gibanje pri različnih vrednostih parametrov K in L, npr. za $K < L$, $K > L$ in $K = L$.

2. Imejmo nabit delec z maso m in nabojem e, ki prožno odskakuje od sten enodimenzionalne potencialne jame širine a. Nato začnemo periodično vklapljati homogeno električno polje jakosti E, tako da pol periode τ smer električnega polja kaže v desno in je konstantna v času, za drugo polovico periode pa smer polja obrnemo, da kaže v levo. Zapiši stroboskopsko preslikavo sistema za eno periodo električnega polja. V odvisnosi od nekaj tipičnih vrednosti brezdimenzijskih parametrov nariši nekaj faznih portretov sistema in komentiraj.

3. Zapiši Poincaréjevo preslikavo za prožno kroglico, ki v homogenem gravitacijskem polju odskakuje prožno od podlage v obliki klina, ki ga omejuje rob $y_s(x) = k|x|$. Nariši nekaj faznih portretov in jih komentiraj, za različne vrednosti brezdimenzijskega parametra.

4. Zapiši Poincaréjevo preslikavo za prožno kroglico, ki v homogenem gravitacijskem polju odskakuje prožno od podlage v obliki parabole $y_s(x) = kx^2$. Nariši nekaj faznih portretov in jih komentiraj, za različne vrednosti brezdimenzijskega parametra.

5. Oglej si dinamični sistem, ki je podan s sledečo preslikavo

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad f(x) = a(x^3 - x)$$

na faznem prostoru $\mathcal{M} = [-1, 1]$. Pri $a > a_c = 3\sqrt{3}/2$ postane sistem odprt in orbite lahko uhajajo iz intervala $\mathcal{M}$. Oceni fraktalno dimenzijo odbijača (repellerja) in razpadni zakon, t.j. verjetnost $P(n)$, da sistem preživi čas n, za nekaj tipičnih vrednosti parametra $a > a_c$.

6. Oglej si sledečo disipativno preslikavo na torusu $\mathcal{M} = [0, 1) \times [0, 1)$:

$$\begin{aligned} x' &= x + y \pmod 1 \\ y' &= by + ax' \pmod 1 \end{aligned}$$

kjer je $b \in [0, 1]$ parameter dušenja, $a > 0$ pa parameter vsiljevanja. Numerično konstruiraj attraktor, t.j. množico točk v faznem prostoru kamor konvergira tipična orbita po dolgem času, za nekaj tipičnih vrednosti parametrov (a, b) npr.: $(1, 0.5)$, $(1, 0.9)$, $(0.1, 0.9)$. Oceni še fraktalno dimenzijo atraktorja.

7. Simuliraj Ljapunov eksponent za standardno preslikavo pri različnih vrednostih parametra k (npr. $k = 0.5, 1.0, 7.0$) in pri različnih začetnih pogojih. Ali je v kaotični komponenti faznega prostora eksponent neodvisen od začetnega pogoja? Opazuj časovno konvergenco Ljapunovega eksponenta! Kakšna pa je odvisnost od parametra k?

8. Izračunaj Ljapunov spekter štiridimenzionalnih preslikav na območju $[0, 1)^4$ (pokaži, da so simplektične), podanih z enačbo

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = \mathcal{M}_{1,2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \frac{\beta}{2\pi} \begin{bmatrix} \sin(2\pi x_3) \\ \sin(2\pi x_4) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

kjer je

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

in β prost parameter (tipično reda 0.1). Poglej, kako se spekter spreminja s parametrom β in primerjaj rezultate z lastnimi vrednostmi matrik $\mathcal{M}_{1,2}$.

9. Izračunaj dinamične entropije, metrično in topološko, za sledečo preslikavo na enotskem intervalu $[0,1)$,

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

kjer je

$$f(0 \leq x < 1/2) = 2x \pmod 1,$$
$$f(1/2 \leq x < 1) = 4x \pmod 1.$$

10. Simuliraj difuzijo gibalne količine p_n za standardno preslikavo

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + k\sin(\varphi_n), \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + p_{n+1} \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

Numerično oceni vrednost difuzijske konstante $D = \langle (p_n - p_0)^2 \rangle / (2n)$: (a) z neposredno simulacijo, (b) s korelacijskimi funkcijami, za nekaj vrednosti parametra k. Kakšna je odvisnost za velike vrednosti parametra k?

11. Preveri ergodičnost in mešanje za preslikavo Arnoldove mačke

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \pmod 1$$

na enotskem torusu $[0,1) \times [0,1)$. Za opazljivke vzemi nekatere od Fourierovih načinov, npr. $u_{n,m}(x,y) = \sin(2\pi nx)\sin(2\pi my)$.

12. Numerično razišči pojemanje korelacijskih funkcij v preslikavi na enotskem torusu $x, y \in [0,1) \times [0,1)$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n \pmod 1, \\ y_{n+1} &= y_n + k(x_{n+1} - 1/2) \pmod 1, \end{aligned}$$

kjer mora biti parameter k pozitiven, da je preslikava kaotična. Če predpostaviš, da je pojemanje korelacij eksponentno $C(t) \sim \exp(-rt)$, kakšna je odvisnost konstante r od parametra k?

13. Napravi bifurkacijski diagram za sledečo enodimenzionalno preslikavo

$$x_{n+1} = x_n + a\sin(2\pi x_n) \pmod 1,$$

ko povečuješ vrednosti parametra a. Če fazni prostor sprostiš na celo realno os, potem gornja preslikava definira difuzijski proces $\langle (x_n - x_0)^2 \rangle \sim 2Dn$. Razišči ga in oceni vrednost difuzijske konstante $D(a)$ in 'kritično vrednost' paramtera a pri kateri pride do normalne difuzije.

14. Razišči obnašanje invariantne gostote za preslikavo $f : [0,1] \to [0,1]$,

$$f(x) = |4x(1-x)|^\beta,$$

za različne vrednosti parametra β, npr. $\beta = 1/2, 2$. Ali lahko kaj poveš o zvezi med parametrom β in naravo singularnosti invariantne gostote v točkah $x = 0$ in $x = 1$? Invariantno gostoto lahko iščeš kar z iteracijo Perron-Frobeniusovega operatorja, s tem da začneš z enakomerno gostoto $\rho_0(x) = 1$.

15. Simuliraj *makroskopsko ireverzibilne* transportne pojave z *mikroskopsko reverzibilno* razširjeno pekarsko preslikavo (angl. multi-baker map). Preslikavo $(x_{t+1}, y_{t+1}) = M(x_t, y_t)$ definiramo na traku $(x, y) \in [0, N] \times [0, 1]$, $N \in Z$

$$M(x,y) = \begin{cases} ([x] - 1 + 3\{x\}, y/3) & 0 \leq \{x\} < 1/3, \\ ([x] + 3(\{x\} - 1/3), (y+1)/3) & 1/3 \leq \{x\} < 2/3, \\ ([x] + 1 + 3(\{x\} - 2/3), (y+2)/3) & 2/3 \leq \{x\} < 1 \end{cases}$$

$[x]$ in $\{x\}$ sta celi del (največje celo število, ki ni večje od x) in decimalni del števila x, $x = [x] + \{x\}$. Kvadratu $[n-1, n] \times [0, 1]$ recimo n. celica. Fazni prostor sestalja N celic z oznakami $1 \ldots N$. Dogovoriti se moramo še, kaj narediti kadar delec skoči ven iz pasu $x < 0$ ali $x > N$, npr. postavimo lahko periodične robne pogoje v x.

V povprečju gre delec v enem koraku preslikave za eno celico v levo z verjetnostjo 1/3, za eno celico v desno z verjetnostjo 1/3, ali ostane v isti celici. Transport med celicami je torej 'random walk' v eni dimenziji z difuzijsko konstanto $D = 1/3$.

Za nalogo s simulacijo preveri veljavnost Fickovega zakona: da je tok delcev sorazmeren gradientu koncentracije $j = D(\partial/\partial x)c(x)$. To napravi tako, da sistem vložiš med dva rezervoarja (oziroma "pol-prepustni membrani"). Ko npr. delec skoči v 0. celico ($x < 0$), ali pa v $N + 1$. celico ($x > N$), ažuriraš tok j nato pa nanj pozabiš: takoj v naslednjem trenutku (iteraciji) pa v sistem injektiraš nov delec, z verjetnostjo p enakomerno v 1. celico, oziroma z verjetnostjo $1 - p$ enakomerno v N. celico. Če je $p \neq 1/2$, se po dolgem času v sistemu ustvari gradient koncentracije $c(x)$, ki jo meriš lahko kot verjetnost $c(x)dx$, da se delec nahaja v pasu $[x - dx/2, x + dx/2] \times [0, 1]$. Za preučevanje termodinamske limite $N \to \infty$ moraš normalizirati (oz. fiksirati) gostoto delcev, računaj npr. kot da imaš v vsakem trenutku v sistemu N delcev, tako da končni rezultat za verjetnost $c(x)dx$ pomnožiš z N.

Preveri, da je profil koncentracije zares linearen, in da je skupni tok delcev skozi sistem sorazmeren gradientu koncentracije za različne N. Ali se tako izračunana vrednost transportnega koeficienta D ujema z random-walk modelom $D = 1/3$?