Višja kvantna fizika — 2011/12

1. izpit

3. 2. 2012

1. Izračunaj in maksimalno poenostavi izraz $\mathrm{e}^{-zc^\dagger} c\, \mathrm{e}^{zc^\dagger}$, kjer sta c in $c^\dagger$ fermionski anihilacijski oz. kreacijski operator, z pa je kompleksno število.

2. Izračunaj korelacijsko funkcijo $\langle x(t)x(t')+x(t')x(t)\rangle_\beta$ v termičnem stanju harmonskega oscilatorja, $H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$, kjer je $[a, a^\dagger] = 1$. Koordinata oscilatorja se z bozonskimi operatorji izraža kot $x(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a \exp(-\mathrm{i}\omega t) + a^\dagger \exp(\mathrm{i}\,\omega t))$. Velja še, da je termično povprečje $\langle a^\dagger a\rangle_\beta = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega}-1}$.

3. Definirajmo stanje $|z\rangle$ (ki mu pravimo koherentno stanje) s predpisom $|z\rangle = \mathrm{e}^{za^\dagger}|0\rangle$, kjer je $a^\dagger$ bozonski kreacijski operator, z kompleksno število, $|0\rangle$ pa lastno stanje $(a^\dagger a)$ z lastno vrednostjo 0. Izračunaj $\langle z|a|z\rangle$ in $\langle z_1|z_2\rangle$.

4. Zanimajo nas nizkoenergijske vzbuditve 1d antiferomagnetne Heisenbergove verige s spinom S (celo ali polcelo število),

$$H = \sum_j 2(S_j^+ S_{j+1}^- + S_j^- S_{j+1}^+) + S_j^{\mathrm{z}} S_{j+1}^{\mathrm{z}}.$$

Dober približek osnovnega stanja je stanje, v katerem je vsak drugi spin obrnjen v nasprotno smer, $|S, -S, S, -S, \ldots\rangle$. Ker želimo uporabiti isto transformacijo Holstein-Primakoffa, kot pri feromagnetu, $S_j^{\mathrm{z}} \approx S, S_j^+ \approx \sqrt{2S}\, a_j$, izvedemo sledeč postopek: (i) na spinskih operatorjih na sodih mestih naredimo kanonično transformacjo $S^{\mathrm{x}} \to S^{\mathrm{x}}$, $S^{\mathrm{y}} \to -S^{\mathrm{y}}$ in $S^{\mathrm{z}} \to -S^{\mathrm{z}}$, (ii) na dobljenem hamiltonijanu uporabimo trasformacjo H.-P., (iii) na nizkoenergijskem hamiltonijanu, zapisanem z bozonskimi operatorji, naredimo Fourierovo transformacijo, (iv) diagonaliziramo dobljeni hamiltonijan. Izvedi korak (i) in pokaži, da je transformacija res kanonična, to je, da ohranja komutacijske zveze. Izvedi tudi (ii) in (iii). Velja $S_j^\pm = \frac{1}{2}(S_j^{\mathrm{x}} \pm \mathrm{i} S_j^{\mathrm{y}})$.