VIŠJA KVANTNA FIZIKA — 2011/12

2. kolokvij

24. 1. 2012

1. Izračunaj Debye-Wallerjev faktor $W = \frac{1}{2}\langle[\mathbf{q}\cdot\mathbf{u_R}(t)]^2\rangle_\beta$, kjer je

$$\mathbf{u_R}(t) = \sum_{\mathbf{k},s}\sqrt{\frac{\hbar}{2NM\omega_s(\mathbf{k})}}\left(a_s(\mathbf{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega_s(\mathbf{k})t} + a_s^\dagger(-\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_s(\mathbf{k})t}\right)\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{kR}},$$

odmik atoma iz ravnovesne lege, $a_s(\mathbf{k})$ pa so standardni bozonski operatorji s komutatorjem $[a_s(\mathbf{k}), a_{s'}^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_{s,s'}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ (vsi ostali pa so nič). Frekvenčni spekter je simetričen glede na $\mathbf{k} = 0$, enotski polarizacijski vektorji $\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k})$ pa so realni. Zasedenost normalnih nihajnih načinov pri $\beta = \frac{1}{kT}$ je $\langle a_s^\dagger(\mathbf{k})a_s(\mathbf{k})\rangle_\beta = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega_s(\mathbf{k})}-1}$. *Opiši celoten račun, ne samo rezultata, ter komentiraj odvisnost od t in $\mathbf{R}$!*

2. Za spinsko verigo z lokalnimi sklopitvami, $H = \sum_j h_j$, definiramo tok magnetizacije J_k na mestu k kot $J_k = \mathrm{i}\,[\sigma_k^\mathrm{z}, h_k]$. Izračunaj J_k za primer $h_j = \sigma_j^\mathrm{x}\sigma_{j+1}^\mathrm{x} + \sigma_j^\mathrm{y}\sigma_{j+1}^\mathrm{y}$. Paulijeve matrike na različnih mestih komutirajo, na istem mestu pa velja $[\sigma_k^\mathrm{x}, \sigma_k^\mathrm{y}] = 2\mathrm{i}\,\sigma_k^\mathrm{z}$, in podobno za ciklične permutacije. Uporabi Jordan-Wignerjevo transformacijo, $c_j = \sigma_1^\mathrm{z}\cdots\sigma_{j-1}^\mathrm{z}\sigma_j^-$, kjer je $\sigma_j^- = (\sigma_j^\mathrm{x} - \mathrm{i}\,\sigma_j^\mathrm{y})/2$, in zapiši tok J_k še s fermionskimi operatorji.

3. Uporabi Wickov izrek in izračunaj pričakovano vrednost

$$\langle c_{k+q,\uparrow}^\dagger c_{k'-q,\uparrow}^\dagger c_{k'',\downarrow}^\dagger c_{k,\uparrow} c_{k',\uparrow} c_{k'',\downarrow}\rangle$$

v osnovnem stanju Fermijevega plina. $c_{k,\uparrow}$ in $c_{k,\downarrow}$ so standardni fermionski operatorji v momentnem prostoru za spin navzgor oz. navzdol.

4. Z Jordan-Wignerjevo transformacijo, kateri sledi Fourierova transformacija iz realnega (c_j) v momentni prostor (d_k), d_k, $c_j = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kj}d_k$, lahko Hamiltonijan $H = -\sum_j(\sigma_j^\mathrm{x}\sigma_{j+1}^\mathrm{x} + \sigma_j^\mathrm{y}\sigma_{j+1}^\mathrm{y})$ prepišemo (do aditivne konstante natančno) v $H = \sum_k \epsilon_k d_k^\dagger d_k$, kjer je $\epsilon_k = 4\cos(k)$ (v vseh izrazih teče k čez n vrednosti na intervalu $[0, 2\pi]$).

   - Izračunaj Heisenbergovo sliko momentnih operatorjev, to je $d_k(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}d_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$. *Nasvet: najprej poizkusi izračunati* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\epsilon_q d_q^\dagger d_q}d_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\epsilon_q d_q^\dagger d_q}$.
   - Izračunaj korelacijsko funkcijo $g(t) = \langle 0\ldots 0|c_m c_l^\dagger(t)|0\ldots 0\rangle$ v kontinuumski limiti, ko lahko $\sum_k$ nadomestiš z integralom. [Razlaga: $g(t)$ je povezan z verjetnostjo, da se fermion, ki je ob $t = 0$ na l-tem mestu, nahaja ob času t na m-tem mestu]
     Koristiti utegne $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(xp+t\cos x)} = \mathrm{i}^p J_p(t)$, *kjer je J_p Besslova funkcija, p pa celo število.*