Rešitve nalog s 1. kolokvija elektronike za študente fiz. mer. tehnike, 10. april 2008

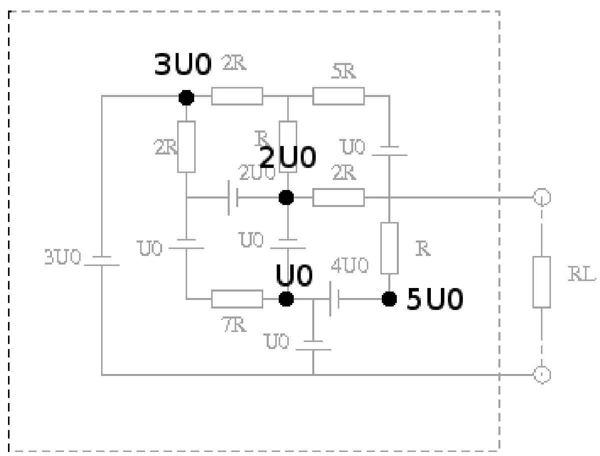
Andrej Studen

14. april 2008

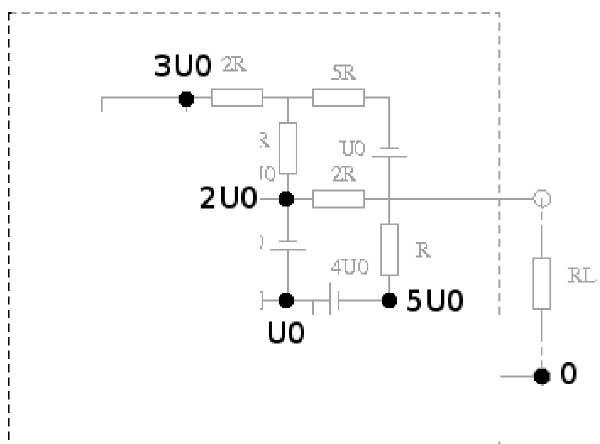
1 naloga

Vloga napetostnih izvorov je, da držijo dano napetost med kontaktoma, hkrati pa proizvedejo ves potrebni električni tok. Na uporih pa je padec napetosti sorazmeren toku. Veljata prvi in drugi Kirchoffov zakon.

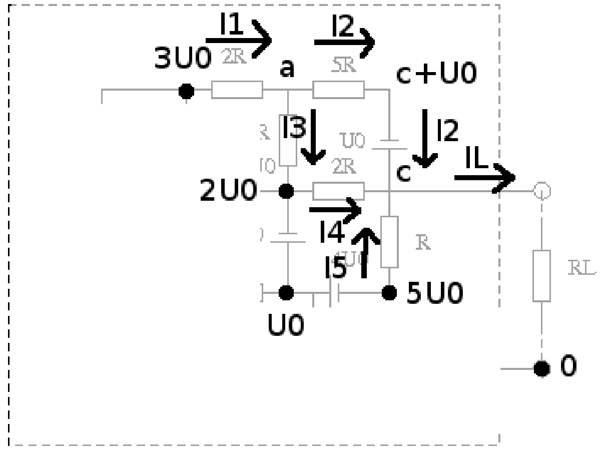
Najprej fiksiramo napetost na spodnji črti na 0 V (vedno lahko izberemo katerokoli točko kot ničelno napetost oz .zemljo). Potem imajo nekatera vozlišča (glej sliko na desni) natančno določeno napetost.



V teh vozliščih ne bomo seštevali tokov, saj poznamo napetosti! Zato lahko del vezja, ki ne dovaja toka proti R_L ignoriramo, kot kaže naslednja slika.



Imamo le še tri vozlišča z neznano napetostjo. No, med parom je še en napetostni izvor, zato rabimo Kirchoffa za tokove le za dve vozlišči. Tokove in napetosti označimo, kot kaže slika.



Zdaj pa zagrizimo v račun. V vozlišču z napetostjo a bo veljalo:

$$I_1 = I_2 + I_3$$
$$I_1 = (3U_0 - a)/2R \qquad I_2 = (a - (c + U_0))/5R \qquad I_3 = (a - 2U_0)/R$$

V vozlišču c pa:

$$I_2 + I_4 + I_5 = I_L$$
$$I_4 = (2U_0 - c)/2R \qquad I_5 = (5U_0 - c)/R \qquad I_L = c/R_L$$

Mali trik je v tem, da izrazimo $I_2 = I_1 - I_3$ in to vstavimo v enačbo za oglišče c:

$$I_1 - I_3 + I_4 + I_5 = I_L \qquad \text{in} \qquad I_1 = I_2 + I_3$$
$$(3U_0 - a)/2R - (a - 2U_0)/R + (2U_0 - c)/2R + (5U_0 - c)/R = c/R_L \quad \Big/ \cdot 2R \quad \text{in}$$
$$(3U_0 - a)/2R = (a - (c + U_0))/5R + (a - 2U_0)/R \quad \Big/ \cdot 10R$$
$$19U_0 - 3a - c(3 + 2R/R_L) = 0 \quad \text{in} \quad 37U_0 - 17a + 2c = 0$$

Množimo desno enačbo z (-3/17) in enačbi seštejemo:

$$19U_0 - \cancel{3a} - c(3 + 2R/R_L) + (-3/17)37U_0 - \cancel{(-3/17)17a} + (-3/17)2c = 0$$
$$(19 - 3 \cdot 37/17)\ U_0 = (3 + 6/17 + 2R/R_L)\ c$$
$$12.47\ U_0 = 3.95\ c \quad (R/R_L = 3/10)$$
$$c = 12.47\ U_0/3.95 = 37.9\ \text{V} \quad (U_0 = 12\ \text{V})$$
$$I_L = c/R_L = 37.9\ \text{V}/10\ \text{k}\Omega = 3.79\ \text{mA}.$$

Thenevinov izrek: v oglišču c izpustimo prispevek c/R_L; potem je $U_{th} = c$! Potem ko množimo z (-3/17) imamo:

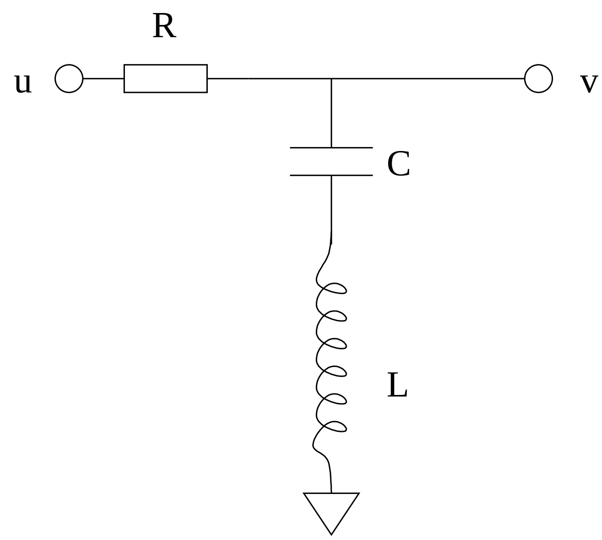
$$19U_0 - \cancel{3a} - c(3 + \cancel{2R/R_L}) + (-3/17)37U_0 - \cancel{(-3/17)17a} + (-3/17)2c = 0$$
$$(19 - 3 \cdot 37/17)\ U_0 = (3 + 6/17)\ c$$
$$12.47\ U_0 = 3.35\ c$$
$$c = U_{th} = 12.47\ U_0/3.35 = 44.6\ \text{V} \quad (U_0 = 12\ \text{V})$$

Iz Thenevinovega izreka bo veljalo, da lahko nadomestimo zgornje vezje z napetostnim izvorom z napetostjo U_{th}, vezanim zaporedno z uporom R_{th} in bremenom R_L. Potem bo:

$$U_{th}/(R_L + R_{th}) = I_L$$
$$R_{th} = U_{th}/I_L - R_L = 44.6\ \mathrm{V}/3.79\ \mathrm{mA} - 10\ \mathrm{k\Omega} = 1.76\ \mathrm{k\Omega}.$$

2 naloga

Imamo delilnik napetosti. Impedanci na spodnji veji seštejemo in vstavimo v delilno enačbo:



$$\frac{v}{u} = \frac{Z_{LC}}{Z_R + Z_{LC}}$$
$$\frac{v}{u} = \frac{i\omega L + \frac{1}{i\omega C}}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} \quad \Big/ \frac{\cdot i\omega C}{\cdot i\omega C}$$
$$\frac{v}{u} = \frac{-\omega^2 LC + 1}{i\omega RC - \omega^2 LC + 1}$$

Vpeljemo $\omega_0^2 = 1/LC$ in $\tau = RC$:

$$\frac{v}{u} = \frac{1 - \left(\omega/\omega_0\right)^2}{1 - \left(\omega/\omega_0\right)^2 + i\omega\tau}$$

Poiščemo amplitudno odvisnost $A(\omega) = |\frac{v}{u}|$:

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{1 - \left(\omega/\omega_0\right)^2}{1 - \left(\omega/\omega_0\right)^2 + i\omega\tau} \cdot \frac{1 - \left(\omega/\omega_0\right)^2}{1 - \left(\omega/\omega_0\right)^2 - i\omega\tau}}$$
$$A(\omega) = \frac{\sqrt{\left(1 - \left(\omega/\omega_0\right)^2\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\omega/\omega_0\right)^2\right)^2 + \omega^2\tau^2}}$$

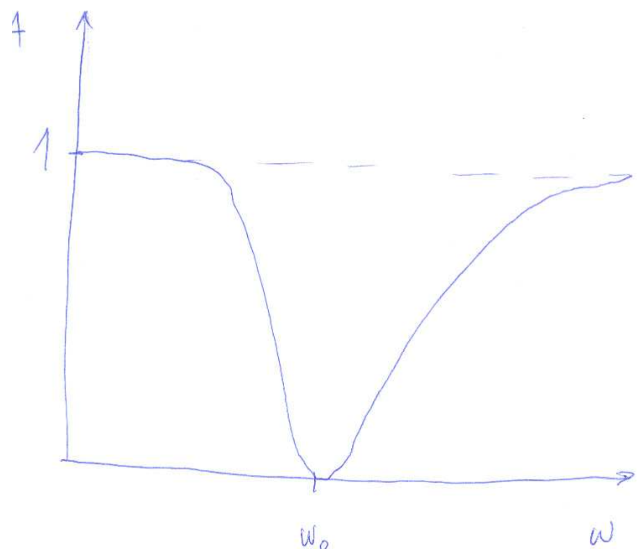
Poglejmo limite:

$$\omega = 0 \quad A(\omega) = \frac{\sqrt{(1-0)^2}}{\sqrt{(1-0)^2 + 0^2}} = 1$$

$$\omega = \omega_0 \quad A(\omega) = \frac{\sqrt{0^2}}{\sqrt{0^2 + (\omega_0 \tau)^2}} = 0$$

$$\omega \to \infty \quad A(\omega) = \frac{\sqrt{\Big(-\big(\omega/\omega_0\big)^2\Big)^2}}{\sqrt{\Big(-\big(\omega/\omega_0\big)^2\Big)^2}} = 1$$

Torej bo graf nekaj takega:



Da bo minimum pri izbrani frekvenci, mora torej biti:

$$(2\pi f_0)^2 = 1/LC$$

$$L = 1/(2\pi f_0)^2 C = 0.6 \text{ mH} \quad (C = 1 \text{ pF}, f_0 = 200 \text{ kHz})$$

Širina: Poiščimo ω, da bo $A(\omega) = 0.5$. Vstavimo:

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{\Big(1-\big(\omega/\omega_0\big)^2\Big)^2}}{\sqrt{\Big(1-\big(\omega/\omega_0\big)^2\Big)^2 + \omega^2\tau^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\Big(1-\big(\omega/\omega_0\big)^2\Big)^2}{\Big(1-\big(\omega/\omega_0\big)^2\Big)^2 + \omega^2\tau^2} = \frac{1}{4}$$

$$4\Big(1-\big(\omega/\omega_0\big)^2\Big)^2 = \Big(1-\big(\omega/\omega_0\big)^2\Big)^2 + \omega^2\tau^2$$

Zdaj pride na vrsto strašni trik:

$$3\Big(1-\big(\omega/\omega_0\big)^2\Big)^2 = \omega^2\tau^2$$
$$\pm\sqrt{3}\Big(1-\big(\omega/\omega_0\big)^2\Big) = \omega\tau$$

Pozor na $\pm$, to nam bo še prav prišlo. Rešimo kvadratno enačbo.

$$1-\big(\omega/\omega_0\big)^2 = \pm\sqrt{3}/3\omega\tau$$
$$\big(\omega/\omega_0\big)^2 \pm \sqrt{3}/3\omega\tau - 1 = 0$$
$$\omega = \pm\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 3}\omega_0^2\tau \pm \sqrt{(\tau^2\omega_0^4/12)+\omega_0^2}$$

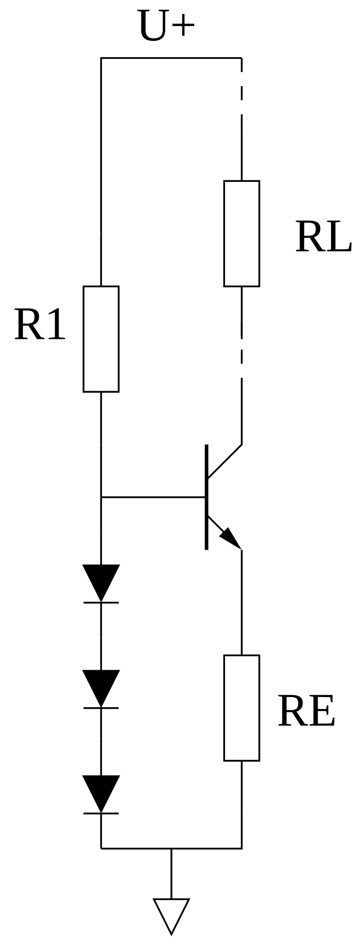
Kateri od štirih možnih rešitev sta pravi? Kriterij je, da mora biti $\omega > 0$. Ker je $\sqrt{\cdot}$ po absolutni vrednosti večji od člena $\sqrt{3}/6\omega_0^2\tau$, rešitve z minusom pred $\sqrt{\cdot}$ odpadejo. Torej bosta rešitvi in njuna razlika:

$$\omega = \sqrt{(\tau^2\omega_0^4/12)+\omega_0^2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 3}\omega_0^2\tau$$
$$\Delta\omega = 2\,\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 3}\omega_0^2\tau = \frac{\sqrt{3}}{3}\omega_0^2\tau.$$

Poiščemo upor:

$$\Delta\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}\omega_0^2\tau$$
$$2\pi\Delta f = \frac{\sqrt{3}}{3}4\pi^2 f_0^2 RC$$
$$R = \frac{\cancel{2}\sqrt{3}\cancel{\pi}\Delta f}{\cancel{4}\cancel{\pi^2} f_0^2 C\ 2\pi} = \frac{\sqrt{3}\ 5\ 10^4 \cancel{s^2}\ \mathrm{V}}{2\pi\ 4\ 10^{10}\ 1\ 10^{-9}\mathrm{A}\cancel{s}\cancel{s}} = 0.345\ 10^5\ \Omega = 34.5\ \mathrm{k}\Omega$$

3 naloga



Za razliko od nalog na vajah imamo tu npn tranzistor. Emitorski kontakt je spodaj, breme pa zgoraj, kar je ravno obratno kot pri pnp tranzistorjih. Imamo pravzaprav tokovni ponor in ne izvor. Kakorkoli. Tri diode držijo konstantno napetost U_B=1.8 V na bazi. Emitorski kontakt ima napetost $U_E = U_B - U_{BE}$=1.2 V. Da bo torej skozi tranzistor tekel tok I_C=2 mA, mora biti:

$$R_E = U_E/I_E \cong U_E/I_C \text{ (ni toka skozi bazo)}$$
$$R_E = 1.2 \text{ V}/2 \text{ mA} = 600\Omega$$

Ocenimo tok skozi bazo. Ker je I_C=2 mA, bo $I_B = I_C/\beta \approx 20$ μA, kar lahko v primerjavi z 10 mA mirno zanemarimo. Torej bo tok skozi R_1 kar I_D=10 mA in:

$$R_1 = (U_+ - U_B)/I_D = (15 - 1.8) \text{ V}/10 \text{ mA} = 1.32 \text{ k}\Omega$$

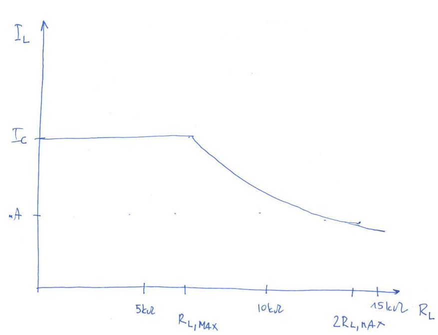
Kaj pa breme? Napetost na kolektorju mora biti večja od napetosti na emitorju. Z naraščajočim bremenom raste tudi padec napetosti na bremenu. Takrat ko bo padec napetosti tako velik, da bi moral kolektor k napetosti nižji od emitorja, bomo dosegli nasičenje. Za bremena, večja od $R_{L,max}$ bo napetost na kolektorju enaka napetosti na emitorju (z majhnim odklonom, 0.1-0.2 V), tok pa se bo manjšal. Izračunajmo najprej $R_{L,max}$:

$$R_{L,max} = (U_+ - U_{C,min})/I_C = (U_+ - (U_E + 0.2 \text{ V})/I_C =$$
$$= (15 - 1.2 - 0.2) \text{ V}/2 \text{ mA} = 6.8 \text{ k}\Omega$$

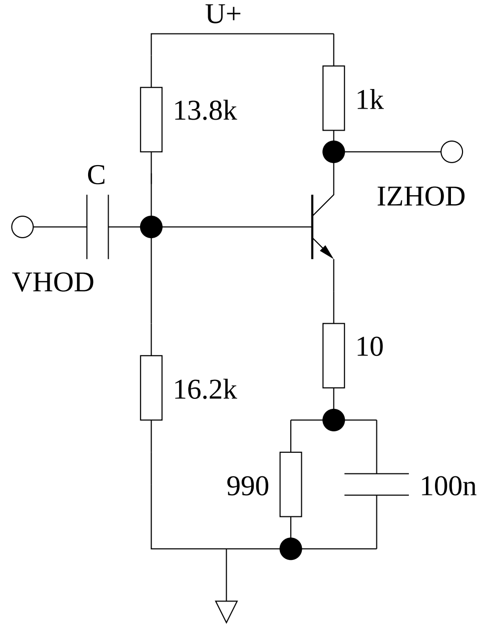
Kaj pa tok pri $R_L = 2R_{L,max}$?

$$I_L = (U_+ - (U_E + 0.2 \text{ V})/2\ R_{L,max}; \quad R_{L,max} = (U_+ - (U_E + 0.2 \text{ V})/I_C$$
$$I_L = \frac{\cancel{(U_+ - (U_E + 0.2 \text{ V}))}\ I_C}{2\ \cancel{(U_+ - (U_E + 0.2 \text{ V}))}} = \frac{I_C}{2}$$

Skica:



4 naloga



Poglejmo najprej, kako je napetost U_E odvisna od toka $I_E \approx I_C$:

$$U_E = (R_{10} + R_{990}||(1/i\omega C_{100}))\ I_C,$$

kjer z || označimo upornost vzporedne vezave. Tu pride na vrsto poenostavitev - poglejmo velikost impedance $1/\omega\mathrm{C}_{100}$ pri frekvenci signala:

$$\frac{1}{\omega C_{100}} = \frac{\mathrm{Vs}}{2\pi\ 2\ 10^5\ 10^{-7}\ A} = 15.9\ \Omega \ll 990\ \Omega$$

in upor R_{990} lahko pri frekvenci signala zanemarimo.

Majhna motnja pride na bazo. Velja:

$$U_E = U_B - U_{BE}$$
$$\Delta U_E = \Delta U_B - \Delta U_{BE}$$

Za ΔU_{BE} uporabimo Ebers-Moll model, za ΔU_E pa zgoraj izpeljano zvezo:

$$\Delta U_{BE} = r_E\ \Delta I_C,$$
$$\Delta U_E = (R_{10} + (1/i\omega C_{100}))\ \Delta I_C,$$
$$\Delta U_B = \Delta U_E + \Delta U_{BE} = (r_E + R_{10} + (1/i\omega C_{100}))\ \Delta I_C.$$

Na izhodu bo tako kot pri običajnem ojačevalcu s skupno bazo:

$$U_{out} = U_+ - R_C I_C,$$
$$\Delta U_{out} = -R_C\ \Delta I_C.$$

Iz izraza za ΔU_B izrazimo ΔI_C in vstavimo v enačbo za ΔU_{out}:

$$\Delta I_C = \Delta U_B/(r_E + R_{10} + (1/i\omega C_{100}))$$
$$\Delta U_{out} = -R_C\ \Delta U_B/(r_E + R_{10} + (1/i\omega C_{100}))$$

Ker je padec na prvem kondenzatorju, C, zanemarljiv, bo ΔU_B=ΔU_{in}. Edina preostala neznanka je r_E. Tega izračunamo iz toka skozi tranzistor:

$$
\begin{gathered}
U_B = 16.2/(13.8+16.2)\cdot U_+ = 8.1\ \mathrm{V} \quad (U_+ = 15\ \mathrm{V}) \\
U_E = U_B - 0.6 = 7.5\ \mathrm{V} \\
I_E = U_E/(R_{10} + R_{990}||(1/i\omega C_{100})); \quad \omega = 0 \\
I_E = 7.5\ \mathrm{V}/1\ \mathrm{k}\Omega = 7.5\ \mathrm{mA} \\
r_E = 25\ \mathrm{mA}\Omega/7.5\ \mathrm{mA} = 3.3\Omega.
\end{gathered}
$$

Pri računanju I_C smo se obnašali kot da gledamo statična vezja. Potem je $R_{990}||(1/i\omega C_{100}) = R_{990}$. Signali so namreč samo majhni popravki statičnih lastnosti. Poračunajmo še ΔU_{out}:

$$
\begin{gathered}
\frac{\Delta U_{out}}{\Delta U_{in}} = -\frac{R_C}{(r_E + R_{10} + (1/i\omega C_{100}))} \Big/ \frac{\cdot i\omega C_{100}}{\cdot i\omega C_{100}} \\
\frac{\Delta U_{out}}{\Delta U_{in}} = -\frac{i\omega R_C\, C_{100}}{1 + i\omega(r_E + R_{10})\, C_{100}}
\end{gathered}
$$

Kot običajno v faznem prostoru izračunajmo razmerje amplitud:

$$
\begin{gathered}
A(\omega) = \left|\frac{\Delta U_{out}}{\Delta U_{in}}\right| = \frac{\omega\ R_C\ C_{100}}{\sqrt{1 + \omega^2\ (r_E + R_{10})^2\ C_{100}^2}} \\
A(2\pi 200\ \mathrm{kHz}) = \frac{2\pi\ 2\ 10^5\ 10^{-7}\ 10^3}{\sqrt{1 + 4\pi^2\ 4\ 10^{10} (3.3+10)^2\ 10^{-14}}} = 64.5; \\
\Delta U_{out} = 64.5 \cdot \Delta U_{in} = 64.5 \cdot 5\ \mathrm{mV} = 323\ \mathrm{mV}
\end{gathered}
$$

Fazni zamik izračunamo kot ponavadi:

$$
\begin{gathered}
\varphi(\omega) = \arctan\Big(\frac{\Im(\Delta U_{out}/\Delta U_{in})}{\Re(\Delta U_{out}/\Delta U_{in})}\Big) \\
\Im(\Delta U_{out}/\Delta U_{in}) = \frac{1}{2i}\Big(\frac{-i\omega R_C\ C_{100}}{1 + i\omega(r_E + R_{10})\ C_{100}} - \frac{+i\omega R_C\ C_{100}}{1 - i\omega(r_E + R_{10})\ C_{100}}\Big) \\
\Im(\Delta U_{out}/\Delta U_{in}) = \frac{-\omega R_C\ C_{100}}{1 + \omega^2\ (r_E + R_{10})^2\ C_{100}^2} \\
\Re(\Delta U_{out}/\Delta U_{in}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{-i\omega R_C\ C_{100}}{1 + i\omega(r_E + R_{10})\ C_{100}} + \frac{+i\omega R_C\ C_{100}}{1 - i\omega(r_E + R_{10})\ C_{100}}\Big) \\
\Re(\Delta U_{out}/\Delta U_{in}) = \frac{-\omega^2 R_C\ (r_E + R_{10})\ C_{100}^2}{1 + \omega^2\ (r_E + R_{10})^2\ C_{100}^2} \\
\varphi(\omega) = \arctan\left[\frac{-\cancel{\omega R_C\ C_{100}}}{\cancel{1 + \omega^2\ (r_E + R_{10})^2\ C_{100}^2}} \frac{\cancel{1 + \omega^2\ (r_E + R_{10})^2\ C_{100}^2}}{-\omega^{\cancel{2}}\ \cancel{R_C}\ (r_E + R_{10})\ C_{100}^{\cancel{2}}}\right] = \arctan\left[\frac{1}{\omega\ (r_E + R_{10})\ C_{100}}\right] \\
\varphi(2\pi 200\ \mathrm{kHz}) = \arctan\left[\frac{1}{2\pi\ 2\ 10^5\ \cancel{\mathrm{Hz}}\ 13.3\ \cancel{\Omega}\ 10^{-7}\ \cancel{\Omega^{-1}}\cancel{\mathrm{s}}}\right] = \arctan[0.6] = 0.54\ \mathrm{rad} = 31^\circ.
\end{gathered}
$$