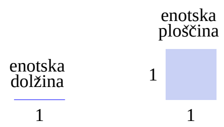
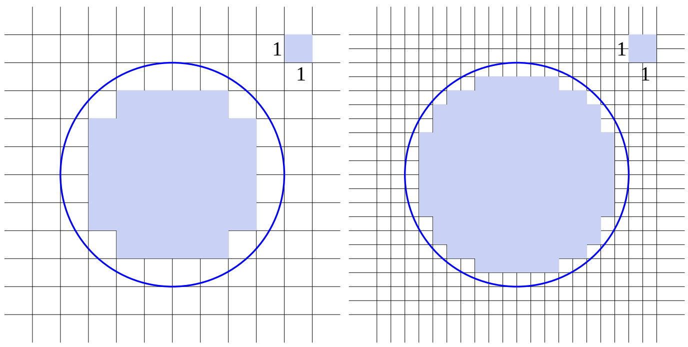
Določeni integral

Določeni in nedoločeni integral sta, navkljub skoraj identičnima imenoma, precej različna objekta. Pri nedoločenem integralu iščemo funkcijo, katere odvod je dana funkcija. To pomeni, da je rezultat našega računanja spet funkcija, določena do lokalno konstantne funkcije natančno. Motivacija za študij določenega integrala pa po drugi strani izvira iz problema računanja ploščin likov. Intuitivno si lahko predstavljamo, da je ploščina pravokotnika enaka produktu njegovih stranic, težje pa je na primer določiti ploščino kroga. Da bi lahko smiselno definirali ploščino ravninskih likov, omejenih s krivočrtnimi krivuljami, in nato ploščine tudi računali, uvedemo pojem določenega integrala. Določeni integral dane funkcije bo neko realno število, ki bo, ob izpolnjenih nekaterih pogojih, predstavljalo ploščino lika med grafom funkcije in pa abscisno osjo. Oba integrala povezuje osnovni izrek analize, ki nam omogoča efektivno računanje določenega integrala s pomočjo nedoločenega integrala.

Za uvod si poglejmo, kako bi lahko približno izračunali ploščino kroga. Najprej si izberimo enoto za dolžino. S tem je enota za ploščino že natanko določena.



Vzemimo krog s polmerom $r = 4$ in s središčem v koordinatnem izhodišču. Ravnino tlakujmo s kvadrati s stranico $a = 1$. Kvadrati, ki celi ležijo znotraj kroga, tvorijo nek lik s približno enako ploščino kot jo ima krog. V našem primeru je to $S_1 = 32$. Če kvadrate s stranico $a = 1$ zamenjamo s kvadrati s stranico $a = \frac{1}{2}$, dobimo nek mnogokotnik, ki malce bolje aproksimira krog, saj je ploščina tega lika enaka $S_{1/2} = 41$.



Od dejanske ploščine kroga $S = 16\pi \approx 50,27$ se ta aproksimacija še kar precej razlikuje. Videti pa je, da bi s čedalje finejšimi tlakovanji dobili mnogokotnike, ki bi čedalje bolje aproksimirali krog. Limita ploščin teh mnogokotnikov pri čedalje finejših tlakovanjih je enaka ploščini kroga.

To idejo bomo sedaj uporabili za računanje ploščine lika med grafom funkcije in pa abscisno osjo. Namesto tlakovanja s kvadrati bomo naš lik razrezali na navpične rezine, vsako rezino pa aproksimirali s pravokotnikom. Zanimala nas bo limita ploščin takšnih aproksimacij, ko bomo rezine čedalje bolj tanjšali. Če ta limita obstaja, ji rečemo *določeni integral* dane funkcije. Obstajajo sicer primeri neintegrabilnih funkcij, pokazali pa bomo, da so zvezne, odsekoma zvezne in pa tudi monotone funkcije integrabilne.

Lik bi lahko aproksimirali tudi z vodoravnimi rezinami. Tej močnejši verziji integrala se reče Lebesgueov integral. Pri zveznih funkcijah, ki so za nas najbolj zanimive, se oba pristopa ujemata. Matematična disciplina, ki se ukvarja s posplošitvami določenega integrala, se imenuje teorija mere. Njeni rezultati se med drugim uporabljajo v teoriji verjetnosti, matematični analizi in fiziki.

Začnimo sedaj s pregledom osnovnih pojmov, ki jih potrebujemo za definicijo določenega integrala. Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omejena funkcija.

- Delitev intervala $[a, b]$ je končna podmnožica $D \subset [a, b]$, za katero velja: $a, b \in D$.

- Točke v delitvi D običajno uredimo po velikosti, tako da je

  $$D = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}.$$

  Uporabljamo tudi oznako $D = \{x_k\}_{k=0}^{k=n}$.

- Delitev $D = \{x_k\}_{k=0}^{k=n}$ razdeli interval $[a, b]$ na n intervalov $[x_{k-1}, x_k]$ (za $k = 1, 2, \ldots, n$). Dolžina k-tega intervala je $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Maksimum dolžin teh intervalov je $\max \Delta x_k = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$.

- Pri aproksimaciji bodo za nas zanimive predvsem ekstremne vrednosti funkcije na teh intervalih. Uporabljali bomo oznake

  $$m_k = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$
  $$m = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

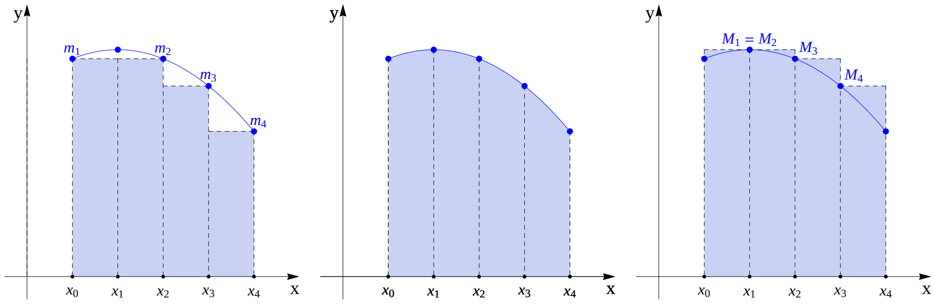
  in

  $$M_k = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$
  $$M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

  Če bi privzeli, da je funkcija f zvezna, bi lahko infimum in supremum zamenjali z minimumom oziroma maksimumom. V bolj splošnih primerih pa ni nujno, da funkcija f na ustreznem intervalu zavzame ekstremni vrednosti. Kljub temu pa za vsak $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ velja

  $$m \leq m_k \leq M_k \leq M.$$

Poglejmo si sedaj dva primera aproksimacije lika, ki je navzgor omejen z grafom funkcije, s pravokotniki. Na levi sliki aproksimiramo k-to rezino s pravokotnikom višine m_k, na desni sliki pa s pravokotnikom višine M_k.



Iz konstrukcije sledi, da je ploščina mnogokotnika na levi manjša, ploščina mnogokotnika na desni pa večja od ploščine lika. V nadaljevanju bomo pokazali, da nam čedalje finejše rezine dajo čedalje boljšo aproksimacijo ploščine lika. Namesto teh dveh robnih primerov bi k-to rezino seveda lahko aproksimirali s pravokotnikom višine $h_k \in [m_k, M_k]$. Ploščina tako dobljenega mnogokotnika bi bila med obema mejnima vrednostima, v limiti pri čedalje finejših delitvah pa ploščine še vedno konvergirajo k ploščini lika.

V zgornjem primeru smo vzeli ekvidistančno delitev intervala, kar pomeni, da so vse rezine enako široke. Takšen pristop je najbolj pogost, ni pa vedno najlažji za računanje.

Formalno lahko naše razmišljanje strnemo v naslednjo definicijo.

Definicija 1. *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omejena funkcija in $D = \{x_k\}_{k=0}^{k=n}$ delitev intervala $[a, b]$. Številu*

$$s(f, D) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

rečemo spodnja integralska vsota za funkcijo f pri delitvi D, številu

$$S(f, D) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

pa zgornja integralska vsota za funkcijo f pri delitvi D.

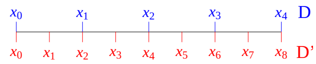
Spodnja in zgornja integralska vsota sta ravno ploščini mnogokotnikov, ki ju dobimo z aproksimacijo rezin s pravokotniki višin m_k oziroma M_k (kot v zgornjem primeru). Kot smo že omenili, velja

$$m(b - a) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq M(b - a),$$

ploščina lika (če obstaja) pa leži nekje med $s(f, D)$ in $S(f, D)$. Razlika $S(f, D) - s(f, D)$ nam da približno oceno za natančnost aproksimacije.

Definicija 2. *Naj bosta D in D' delitvi intervala $[a, b]$. Rečemo, da je delitev D' finejša od delitve D, če je $D \subset D'$.*

Z besedami to pomeni, da delitev D' dobimo tako, da delitvi D dodamo še nekaj točk.



V nadaljevanju bomo pokazali, da pri čedalje finejših delitvah intervala spodnje integralske vsote dane funkcije naraščajo, zgornje integralske vsote pa padajo. Če je funkcija dovolj lepa, obe zaporedji konvergirata k ploščini lika med grafom funkcije in abscisno osjo.

Trditev 3. *Naj bosta D in D' delitvi intervala $[a, b]$ in predpostavimo, da je delitev D' finejša od delitve D. Potem je*

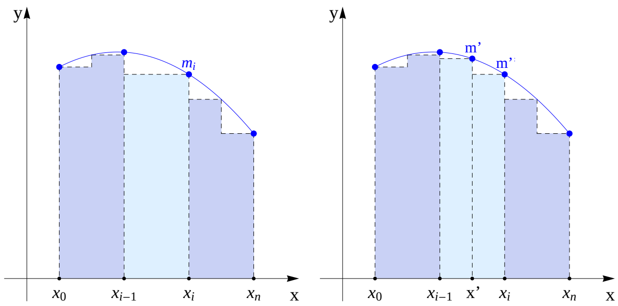
$$s(f, D) \leq s(f, D') \leq S(f, D') \leq S(f, D).$$

Dokaz. Dokazali bomo samo neenakost med spodnjima integralskima vsotama. Neenakost med zgornjima vsotama lahko dokažemo podobno. Brez škode za splošnost se lahko omejimo tudi na poseben primer, ko ima D' natanko eno točko več kot D. Če ima namreč D' m točk več kot D, lahko konstruiramo verigo delitev

$$D = D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_m = D',$$

v kateri se poljubni sosednji delitvi razlikujeta za natanko eno točko. Dokaz splošnega primera potem dobimo z induktivno uporabo dokaza posebnega primera na zaporednih parih delitev.

Pa denimo sedaj, da je $D = \{x_k\}_{k=0}^{k=n}$ in $D' = D \cup \{x'\}$. Potem je $x' \in (x_{i-1}, x_i)$ za nek natanko določen $1 \leq i \leq n$. Spodnji integralski vsoti prirejeni delitvama D in D' se potem ujemata na vseh rezinah, razen na i-ti rezini delitve D, ki v delitvi D' razpade na dva dela.



S slike je razvidno, da bo spodnja integralska vsota prirejena delitvi D' praviloma malce večja kot vsota prirejena delitvi D, formalno pa to pokažemo na naslednji način. Najprej označimo

$$
\begin{aligned}
m' &= \inf f|_{[x_{i-1},x']} \geq m_i, \\
m'' &= \inf f|_{[x',x_i]} \geq m_i.
\end{aligned}
$$

V izrazu $s(f,D') - s(f,D)$ se odštejejo skoraj vsi členi, razen tistih, ki pripadajo rezinam, v katerih leži točka x':

$$
\begin{aligned}
s(f,D') - s(f,D) &= m'(x' - x_{i-1}) + m''(x_i - x') - m_i(x_i - x_{i-1}), \\
&\geq m_i(x' - x_{i-1}) + m_i(x_i - x') - m_i(x_i - x_{i-1}) = 0,
\end{aligned}
$$

oziroma

$$
s(f,D') \geq s(f,D).
$$

□

Trditev 4. *Za poljubni delitvi D in D' intervala $[a,b]$ velja*

$$
s(f,D) \leq S(f,D').
$$

Dokaz. Pri dokazu te trditve si bomo pomagali z naslednjim trikom. Vzeli bomo delitev $D'' = D \cup D'$, ki je finejša od obeh delitev D in D'. Z dvakratno uporabo Trditve 3 potem dobimo

$$
s(f,D) \leq s(f,D'') \leq S(f,D'') \leq S(f,D').
$$

□

Zgornja trditev nam pove, da je poljubna spodnja integralska vsota dane funkcije manjša od poljubne zgornje integralske vsote. Od tod sledi, da je množica spodnjih integralskih vsot funkcije f

$$
\underline{\mathcal{M}} = \{s(f,D) \mid D \text{ delitev } [a,b]\}
$$

navzgor omejena, množica zgornjih integralskih vsot funkcije f

$$
\overline{\mathcal{M}} = \{S(f,D) \mid D \text{ delitev } [a,b]\}
$$

pa navzdol omejena. Zato obstajata

$$
\begin{aligned}
\sup \underline{\mathcal{M}} &= \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx \qquad \text{spodnji integral funkcije } f \text{ na } [a,b] \text{ in} \\
\inf \overline{\mathcal{M}} &= \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx \qquad \text{zgornji integral funkcije } f \text{ na } [a,b].
\end{aligned}
$$

Množici $\underline{\mathcal{M}}$ in $\overline{\mathcal{M}}$ nam predstavljata približke za ploščino lika med grafom funkcije f in pa abscisno osjo. Kasneje bomo spoznali primer funkcije, pri kateri spodnji oziroma zgornji integral ne sovpadata. V takem primeru ploščine dobljenega lika pač ne moremo definirati na ta način. Če je funkcija dovolj lepa (zvezna in pozitivna), pa oba integrala sovpadata, njuno vrednost pa lahko vzamemo za definicijo ploščine lika med grafom funkcije in abscisno osjo.

Definicija 5. *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omejena funkcija. Funkcija f je integrabilna. če je*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

Spodnji oziroma zgornji integral integrabilne funkcije f imenujemo določeni integral funkcije f in ga označimo z

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

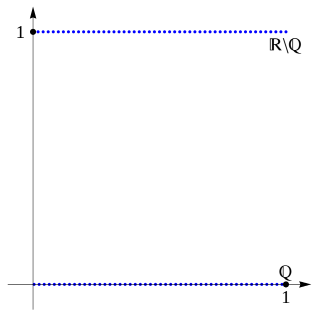
Če smo povsem natančni, se tej verziji integrabilnosti reče Darbouxova integrabilnost. Kasneje bomo spoznali še ekvivalenten pojem Riemannove integrabilnosti.

Še enkrat poudarimo, da je določeni integral dane funkcije realno število, nedoločeni integral pa množica vseh primitivnih funkcij dane funkcije.

Zgled. Večina funkcij, ki jih obravnavamo pri tem predmetu, je integrabilnih. Tokrat pa si poglejmo primer neintegrabilne funkcije. Definirajmo funkcijo $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 1 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

Funkcija f zavzame samo vrednosti 0 in 1, prasliki obeh vrednosti pa sta gosto posejani na intervalu $[0, 1]$. Njen graf nima oblike krivulje, izgleda pa približno takole



Vzemimo sedaj poljubno delitev $D = \{x_k\}_{k=0}^{k=n}$ intervala $[0, 1]$. Ker na poljubnem intervalu obstajata vsaj eno racionalno in vsaj eno iracionalno število, za vsak $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ velja $m_k = 0$ in $M_k = 1$. Od tod sledi, da je

$$s(f, D) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = 0,$$

$$S(f, D) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1.$$

Spodnja in zgornja integralska vsota sta torej neodvisni od delitve, kar pomeni, da je spodnji integral funkcije f enak 0, zgornji integral funkcije f pa enak 1. To pa pomeni, da funkcija f ni integrabilna.

Omenimo še, da je funkcija f Lebesgueovo integrabilna. Graf funkcije f sicer ne omejuje kakšnega lepega lika, je pa bolj zanimiva interpretacija funkcije f v verjetnosti. Funkcija f namreč zavzame vrednost 1 v natanko vseh iracionalnih številih na intervalu $[0, 1]$. Lebesgueov integral funkcije f lahko potem interpretiramo kot verjetnost, da je naključno izbrano realno število na intervalu $[0, 1]$ iracionalno. Ta integral pride enak 1, ker je iracionalnih števil bistveno več kot pa racionalnih števil.

Sama definicija integrabilnosti funkcije je precej bolj komplicirana kot pa definicija nekaterih drugih pojmov, kot sta na primer zveznost in pa odvedljivost. Zato nam bodo prišli prav naslednji kriteriji za prepoznavanje integrabilnih funkcij.

Trditev 6. *Funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je integrabilna natanko takrat, ko je omejena in ko za vsak $\epsilon > 0$ obstaja takšna delitev D intervala $[a, b]$, da je*

$$S(f, D) - s(f, D) < \epsilon.$$

Dokaz. ($\Longleftarrow$) Po definiciji spodnjega in zgornjega integrala funkcije imamo za vsako delitev D verigo neenakosti

$$s(f, D) \leq \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\, dx \leq \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\, dx \leq S(f, D).$$

To pomeni, da je razlika med spodnjim in zgornjim integralom kvečjemu manjša kot pa razlika med spodnjo in zgornjo integralsko vsoto pri poljubni delitvi. Iz predpostavke potem sledi, da je

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\, dx - \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\, dx < \epsilon$$

za poljuben $\epsilon > 0$, kar pa pomeni, da je $\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\, dx = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\, dx$.

($\Longrightarrow$) Denimo sedaj, da je funkcija f integrabilna in izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Potem je

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\, dx = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\, dx.$$

Ker je spodnji (in zato tudi določeni) integral supremum spodnjih integralskih vsot, lahko najdemo takšno delitev D', da je

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx - s(f, D') < \frac{\epsilon}{2}.$$

Na podoben način lahko najdemo tudi delitev D'', da velja

$$S(f, D'') - \int_a^b f(x)\,dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

Definirajmo sedaj delitev $D = D' \cup D''$, ki je finejša od obeh delitev D' in D''. Z uporabo Trditve 3 lahko potem pokažemo, da je

$$\begin{aligned} S(f, D) - s(f, D) &\leq S(f, D'') - s(f, D'), \\ &< \left(\frac{\epsilon}{2} + \int_a^b f(x)\,dx\right) + \left(\frac{\epsilon}{2} - \int_a^b f(x)\,dx\right) = \epsilon, \end{aligned}$$

kar smo želeli pokazati. □

Trditev 7. *Vsaka zvezna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je integrabilna.*

Dokaz. Pri dokazu si bomo pomagali s Trditvijo 6. Izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Potem moramo najti takšno delitev D intervala $[a, b]$, da je

$$S(f, D) - s(f, D) < \epsilon.$$

Iz razdelka o zveznosti funkcij že vemo, da je vsaka zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$ omejena in enakomerno zvezna. To pomeni, da lahko najdemo tak $\delta > 0$, da za poljubna $x, y \in [a, b]$, za katera je $|x - y| < \delta$, velja $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$. Izberimo sedaj poljubno delitev $D = \{x_k\}_{k=0}^{k=n}$ intervala $[a, b]$, za katero je $\max \Delta x_k < \delta$ (njeni intervali so torej ožji od δ). Ker je funkcija f zvezna, zavzame na vsakem izmed intervalov v delitvi D svojo maksimalno in minimalno vrednost. To pomeni, da lahko za vsak $1 \leq k \leq n$ najdemo števili $u_k, v_k \in [x_{k-1}, x_k]$, da je

$$\begin{aligned} M_k &= \sup f|_{[x_{k-1}, x_k]} = f(u_k), \\ m_k &= \inf f|_{[x_{k-1}, x_k]} = f(v_k). \end{aligned}$$

Ker so intervali delitve ožji od δ, je $|u_k - v_k| < \delta$ za vsak k, iz enakomerne zveznosti funkcije f pa od tod sledi

$$M_k - m_k = f(u_k) - f(v_k) < \frac{\epsilon}{b - a}.$$

Sedaj lahko pokažemo, da delitev D ustreza pogoju, ki ga želimo pokazati:

$$\begin{aligned} S(f, D) - s(f, D) &= \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k, \\ &= \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta x_k < \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{b - a} \Delta x_k, \\ &= \frac{\epsilon}{b - a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{\epsilon}{b - a}(b - a) = \epsilon. \end{aligned}$$

□

V dokazu zgornje trditve smo dokazali še nekoliko več. Za poljuben $\epsilon > 0$ smo namreč našli tak $\delta > 0$, da za vsako delitev D, katere intervali so ožji od δ, velja

$$S(f, D) - s(f, D) < \epsilon.$$

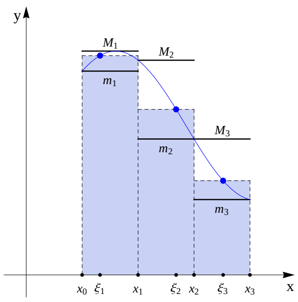
To pomeni, da so za predpisano natačnost aproksimacije dovolj dobre vse delitve, katerih rezine so dovolj ozke.

Sedaj smo se že približali Riemannovi definiciji določenega integrala. Pri Riemannovemu pristopu namreč ne gledamo samo spodnjih oziroma zgornjih integralskih vsot, pač pa vse možne integralske vsote.

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ poljubna funkcija in $D = \{x_k\}_{k=0}^{k=n}$ delitev intervala $[a, b]$. Izberimo poljubne točke $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ za $1 \le k \le n$ in definirajmo

$$R(f, D, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Izrazu $R(f, D, \{\xi_k\})$ rečemo *Riemannova vsota* funkcije f, prirejena delitvi D in izbiri točk $\{\xi_k\}$.



Riemannova vsota funkcije f je aproksimacija za ploščino lika pod krivuljo, ki leži nekje med spodnjo in zgornjo integralsko vsoto. Za vsak $1 \le k \le n$ je namreč $m_k \le f(\xi_k) \le M_k$, od koder sledi

$$s(f, D) \le R(f, D, \{\xi_k\}) \le S(f, D).$$

Če je torej funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna, potem iz zgornje neenakosti in pa iz dokaza Trditve 7 sledi, da za poljuben $\epsilon > 0$ lahko najdemo tak $\delta > 0$, da za vsako delitev $D = \{x_k\}_{k=0}^{k=n}$ intervala $[a, b]$, pri kateri so rezine ožje od δ, in za poljubno izbiro točk $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ (za $1 \le k \le n$) velja

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - R(f, D, \{\xi_k\}) \right| < \epsilon.$$

V limiti, ko gre dolžina najširše rezine v delitvi proti 0, torej dobimo

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

To pomeni, da lahko določeni integral zvezne funkcije poljubno dobro aproksimiramo z Riemannovo vsoto, če je le delitev intervala dovolj fina (neodvisno od izbire točk $\{\xi_k\}$).

Bolj splošno definiramo, da je realno število I *Riemannov integral* funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, če za poljuben $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za poljubno delitev $D = \{x_k\}_{k=0}^{k=n}$ intervala $[a, b]$, pri kateri so rezine ožje od δ, in za poljubno izbiro točk $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ (za $1 \le k \le n$) velja

$$|I - R(f, D, \{\xi_k\})| < \epsilon.$$

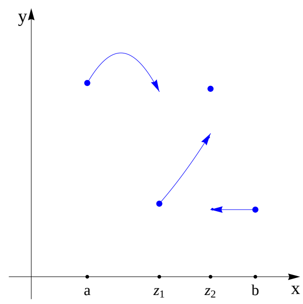
Funkcija f je *Riemannovo integrabilna*, če ima Riemannov integral. Brez dokaza omenimo, da je Riemannova integrabilnost ekvivalentna naši definiciji integrabilnosti. Če je funkcija integrabilna, potem Riemannov integral in določeni integral funkcije sovpadata.

Iz praktičnih razlogov je dobro poznati obe verziji integrabilnosti, saj si s tem olajšamo delo pri dokazovanju ključnih izrekov integralskega računa.

Malce bolj splošne od zveznih so odsekoma zvezne funkcije. Tudi te se pogosto pojavljajo v fiziki in pa v tehniških vedah.

Definicija 8. *Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je odsekoma zvezna, če je zvezna v vseh točkah iz D, z izjemo morda končno mnogo točk.*

Graf odsekoma zvezne funkcije, definirane na intervalu, je sestavljen iz končnega števila krivulj.



V točki nezveznosti lahko vrednost funkcije pripada k levi ali k desni krivulji, lahko pa tudi k nobeni. Primer odsekoma zvezne funkcije, ki jo že poznamo, je funkcija sgn. Za opisovanje nihanja in valovanja pa se uporabljajo tudi funkcije, katerih grafi imajo obliko stopničastega ali pa kvadratnega vala.

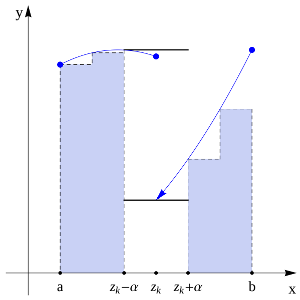
Trditev 9. *Vsaka omejena, odsekoma zvezna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je integrabilna in*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Dokaz. Dokaz trditve je podoben kot dokaz analogne trditve za zvezne funkcije, le malce bolj tehnično zahteven. Spet si bomo pomagali s Trditvijo 6, tako da bomo za poljuben $\epsilon > 0$ našli delitev D intervala $[a, b]$, za katero bo veljalo

$$S(f, D) - s(f, D) < \epsilon.$$

Konstrukcija ustrezne delitve intervala $[a, b]$ bo podobna kot v primeru zvezne funkcije, razen v okolici točk nezveznosti. Proč od točk nezveznosti lahko namreč konstruiramo delitev, pri kateri bosta zgornja in spodnja integralska vsota poljubno blizu. Po drugi strani pa je lahko na intervalih, ki vsebujejo točke nezveznosti, razlika med infimumom in supremumom funkcije precej velika.



Temu problemu se izognemo, tako da te intervale zelo zožimo. Tako bo razlika ploščin ustreznih pravokotnikov majhna, čeprav imata načeloma lahko pravokotnika precej različni višini.

Dokažimo sedaj trditev še formalno. Izberimo $\epsilon > 0$ in označimo z $z_1, z_2, \ldots, z_p$ točke na intervalu $[a, b]$, v katerih funkcija f ni zvezna. Ker je f omejena funkcija, obstajata

$$m = \inf\{f(x) \,|\, x \in [a, b]\},$$
$$M = \sup\{f(x) \,|\, x \in [a, b]\}.$$

Privzamemo lahko, da je $M > m$, saj bi sicer imeli opravka s konstantno funkcijo, za katero pa že vemo, da je integrabilna. Okoli vsake točke nezveznosti $z_1, z_2, \ldots, z_p$ vzemimo odprt interval $(z_i - \alpha, z_i + \alpha)$, kjer je $\alpha = \frac{\epsilon}{8p(M-m)}$. Na množici

$$A = [a, b] \setminus \bigcup_{i=1}^{p} (z_i - \alpha, z_i + \alpha)$$

je f enakomerno zvezna, saj je A končna unija končnih zaprtih intervalov. Zato obstaja $\delta > 0$, $\delta < \alpha$, da za poljubna $x, y \in A$, $|x - y| < \delta$, velja

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Vzemimo zdaj poljubno delitev $D = \{x_k\}_{k=0}^{k=n}$ intervala $[a, b]$, pri kateri je $\max \Delta x_k < \delta$. Označimo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $M_k = \sup f|_{I_k}$ in $m_k = \inf f|_{I_k}$. Sledi

$$\begin{aligned} S(f, D) - s(f, D) &= \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k, \\ &= \sum_{I_k \subset A} (M_k - m_k)\Delta x_k + \sum_{I_k \not\subset A} (M_k - m_k)\Delta x_k, \\ &< \sum_{I_k \subset A} \frac{\epsilon}{2(b-a)}\Delta x_k + \sum_{I_k \not\subset A} (M - m)\Delta x_k. \end{aligned}$$

Po konstrukciji je skupna dolžina intervalov, ki ne ležijo v A, največ $4\alpha p$, zato je

$$\begin{aligned} S(f, D) - s(f, D) &< \sum_{I_k \subset A} \frac{\epsilon}{2(b-a)}\Delta x_k + \sum_{I_k \not\subset A} (M - m)\Delta x_k, \\ &< \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b - a) + 4\alpha p(M - m), \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

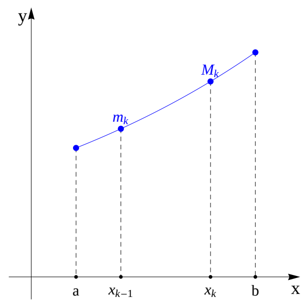
□

Trditev 10. *Vsaka monotona funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je integrabilna in*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Dokaz. Trditev bomo dokazali samo za primer, ko je f naraščajoča funkcija na $[a, b]$. Dokaz za padajoče funkcije je analogen. Predpostavimo seveda lahko tudi, da je f nekonstantna funkcija.

Izberimo poljuben $\epsilon > 0$ in definirajmo $\delta = \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}$. Naj bo sedaj $D = \{x_k\}_{k=0}^{k=n}$ delitev intervala $[a, b]$, za katero velja $\max \Delta x_k < \delta$. Ker je f naraščajoča, za vsak $1 \leq k \leq n$ velja $m_k = f(x_{k-1})$ in $M_k = f(x_k)$.



Od tod dobimo

$$
\begin{aligned}
S(f,D)-s(f,D) &= \sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))\Delta x_k,\\
&< \sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))\delta = \delta\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1})),\\
&= \delta\left((f(x_1)-f(x_0))+\cdots+(f(x_n)-f(x_{n-1}))\right),\\
&= \delta(f(x_n)-f(x_0)) = \delta(f(b)-f(a)),\\
&= \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}(f(b)-f(a)) = \epsilon.
\end{aligned}
$$

□

Za konec uvedimo še naslednjo oznako. Množico vseh integrabilnih funkcij na intervalu $[a,b]$ bomo označili z

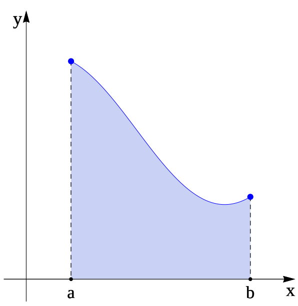
$$\mathcal{R}([a,b]).$$

Zapomnimo si, da množica $\mathcal{R}([a,b])$ vsebuje vse (odsekoma) zvezne in monotone funkcije. Integrabilne so tudi še kakšne druge funkcije, ki pa za nas ne bodo tako zanimive.

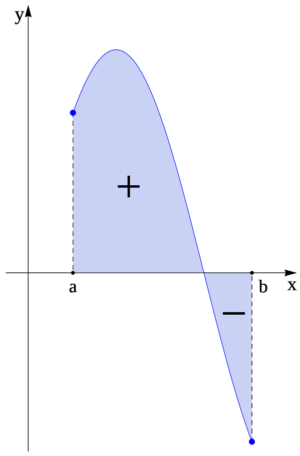
Lastnosti določenega integrala

Sedaj, ko smo dodobra spoznali definicijo določenega integrala, je čas, da si pogledamo še nekatere njegove lastnosti, predvsem pa metode za računanje določenega integrala. Pri tem bo igral ključno vlogo fundamentalni izrek analize, ki nam omogoča, da določeni integral dane funkcije izračunamo dokaj preprosto, če le poznamo kakšno njeno primitivno funkcijo.

Za začetek razčistimo povezavo med integralom in ploščino, ki smo jo omenili kot motivacijo za uvedbo določenega integrala. Če za integrabilno funkcijo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ velja $f(x)\geq 0$ za vsak $x\in[a,b]$, lahko vrednost $\int_a^b f(x)\,dx$ vzamemo za definicijo ploščine lika med grafom funkcije f in abscisno osjo.



V splošnem primeru je ploščina lika med grafom funkcije in abscisno osjo enaka $\int_a^b |f(x)|\,dx$, medtem ko je integral $\int_a^b f(x)\,dx$ enak razliki med ploščino lika pod grafom funkcije in nad abscisno osjo ter ploščino lika pod abscisno osjo in nad grafom funkcije.



Iz praktičnih razlogov se še dogovorimo, da je:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0,$$
$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Na ta način bomo lahko nekatere formule zapisali v večji splošnosti. Sedaj si poglejmo tehnično trditev, ki nam bo kasneje omogočila razširiti nabor znanih integrabilnih funkcij.

Trditev 11. *Naj bo $\phi : [m, M] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in $f \in \mathcal{R}([a, b])$ funkcija, za katero je $f([a, b]) \subset [m, M]$. Potem je $\phi \circ f \in \mathcal{R}([a, b])$.*

Dokaz. Funkcija $\phi \circ f$ je omejena in definirana na intervalu $[a, b]$. Izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Najti moramo delitev D intervala $[a, b]$, pri kateri se bosta spodnja in zgornja integralska vsota funkcije $\phi \circ f$ razlikovali za manj kot ϵ.

Ker je funkcija ϕ zvezna, je enakomerno zvezna. Zato lahko najdemo tak $\delta \in (0, \epsilon)$, da za poljubna $s, t \in [m, M]$ velja

$$|\phi(t) - \phi(s)| < \epsilon,$$

kakor hitro je $|t - s| < \delta$. Ker pa je funkcija f integrabilna, lahko najdemo delitev $D = \{x_k\}_{k=0}^{k=n}$ intervala $[a, b]$, za katero je

$$S(f, D) - s(f, D) < \delta^2.$$

Uvedimo sedaj oznake

$$\begin{aligned}
m_k &= \inf f|_{[x_{k-1},x_k]},\\
M_k &= \sup f|_{[x_{k-1},x_k]},\\
m'_k &= \inf \phi\circ f|_{[x_{k-1},x_k]},\\
M'_k &= \sup \phi\circ f|_{[x_{k-1},x_k]}.
\end{aligned}$$

Indeksno množico $\{1, 2, \ldots, n\}$ delitve D bomo razbili na dva disjunktna dela na naslednji način:

$$\begin{aligned}
A &= \{k \mid M_k - m_k < \delta\},\\
B &= \{k \mid M_k - m_k \geq \delta\}.
\end{aligned}$$

V A so torej tisti indeksi, pri katerih se višini pravokotnikov v obeh integralskih vsotah za funkcijo f razlikujeta za manj kot δ, v B pa preostali indeksi, v katerih sta višini narazen za vsaj δ. V nadaljevanju bomo za intervale, ki pripadajo indeksom iz vsake množice posebej, ocenili razliko med višinami pravokotnikov obeh integralskih vsot, le da tokrat za funkcijo $\phi\circ f$ namesto f.

$\underline{k \in A}$: V tem primeru je $M_k - m_k < \delta$. Ker se ekstremni vrednosti funkcije f na k-tem intervalu razlikujeta za manj kot δ, od tod sledi, da za poljubna $s', t' \in [x_{k-1}, x_k]$ velja $|f(t') - f(s')| < \delta$. Po predpostavki enakomerne zveznosti ϕ sedaj sklepamo, da je $|\phi(f(t')) - \phi(f(s'))| < \epsilon$ za poljubna $s', t' \in [x_{k-1}, x_k]$. Potem pa tudi za ekstremni vrednosti funkcije $\phi\circ f$ na k-tem intervalu velja

$$M'_k - m_{k'} \leq \epsilon.$$

Enačaj je možno doseči zato, ker lahko supremum in infimum funkcije le poljubno dobro aproksimiramo z vrednostmi v točkah, ne obstajata pa nujno točki, v katerih bi bila zavzeta.

$\underline{k \in B}$: Razlike med ekstremnima vrednostima funkcije na intervalu sedaj ne moremo navzgor omejiti z ϵ. Ker pa je funkcija ϕ zvezna, pa obstaja

$$K = \sup_{t\in[m,M]} |\phi(t)|.$$

Od tod potem sledi, da je

$$M'_k - m_{k'} \leq 2K.$$

Ta K je lahko načeloma zelo velik, vendar pa so intervali, ki pripadajo indeksom iz množice B ozki. Za vsak $k \in B$ namreč velja $\delta \leq M_k - m_k$, od koder dobimo

$$\begin{aligned}
\delta \sum_{k\in B} \Delta x_k = \sum_{k\in B} \delta \Delta x_k \leq \sum_{k\in B} (M_k - m_k)\Delta x_k,\\
\leq \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k = S(f, D) - s(f, D) < \delta^2.
\end{aligned}$$

S krajšanjem dobimo, da je skupna dolžina intervalov, ki pripadajo indeksom iz B, manjša od δ.

Za funkcijo $\phi \circ f$ sedaj dobimo oceno

$$\begin{aligned}
S(\phi \circ f, D) - s(\phi \circ f, D) &= \sum_{k=1}^{n} (M'_k - m'_k)\Delta x_k, \\
&= \sum_{k \in A} (M'_k - m'_k)\Delta x_k + \sum_{k \in B} (M'_k - m'_k)\Delta x_k, \\
&\leq \epsilon \sum_{k \in A} \Delta x_k + 2K \sum_{k \in B} \Delta x_k, \\
&\leq \epsilon(b-a) + 2K\delta \leq \epsilon(b-a) + 2K\epsilon, \\
&= \epsilon(b - a + 2K).
\end{aligned}$$

Če bo ϵ dovolj majhen, bo tudi izraz $\epsilon(b-a+2K)$ poljubno majhen, kar pomeni, da je funkcija $\phi \circ f$ integrabilna.

Tokrat za spremembo nismo že na začetku delt in epsilonov definirali z nekimi za lase privlečenimi formulami, zato na koncu nismo dobili lepe ocene. Iz rezultata pa bi lahko sklepali, kakšne vrednosti delt in epsilona moramo vzeti tekom dokaza, da bi na koncu dobili željeno oceno. $\square$

Zgornjo trditev bomo sedaj uporabili, da bomo pokazali, da je množica integrabilnih funkcij zaprta za seštevanje, odštevanje, množenje in še kakšno operacijo.

Trditev 12. *Naj bosta $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ in naj bo $c \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta. Potem velja:*

(1) Če je $f(x) \leq g(x)$ za vsak $x \in [a,b]$, je

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

(2) Funkcije $f+g$, $c \cdot f$ in $|f|$ so integrabilne in

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx, \\
\int_a^b (c \cdot f)(x)\,dx &= c\int_a^b f(x)\,dx, \\
\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| &\leq \int_a^b |f(x)|\,dx.
\end{aligned}$$

(3) Če je $|f(x)| \leq M$ za vsak $x \in [a,b]$, je

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M(b-a).$$

Dokaz. (1) Naj bo D poljubna delitev intervala $[a, b]$. Ker je $f(x) \leq g(x)$ za vsak $x \in [a, b]$, na vsakem intervalu delitve D velja

$$\inf f|_{[x_{k-1},x_k]} \leq \inf g|_{[x_{k-1},x_k]}.$$

Od tod dobimo oceno

$$s(f, D) \leq s(g, D)$$

za spodnji integralski vsoti funkcij f in g, prirejenih delitvi D. Ker velja ta ocena za vsako delitev posebej, velja tudi za supremum po vseh delitvah, kar pa nam da

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sup\{s(f, D) \mid D\} \leq \sup\{s(g, D) \mid D\} = \int_a^b g(x)\, dx.$$

(2) $\underline{f + g \in \mathcal{R}([a, b])}$: Najprej dokažimo, da je funkcija $f+g$ integrabilna. Ker je vsaka omejena funkcija navzdol omejena s svojim infimumom, za vsak $x \in [a, b]$ velja $\inf f + \inf g \leq f(x) + g(x)$, od koder pa dobimo oceno

$$\inf f + \inf g \leq \inf(f + g).$$

Analogna neenakost v obratni smeri velja tudi za supremum. Od tod sklepamo, da za poljubno delitev D intervala $[a, b]$ velja

$$\begin{aligned} s(f, D) + s(g, D) &\leq s(f + g, D),\\ S(f, D) + S(g, D) &\geq S(f + g, D). \end{aligned}$$

Če je sedaj D tako fina delitev intervala $[a, b]$, da je $S(f, D) - s(f, D) < \frac{\epsilon}{2}$ in $S(g, D) - s(g, D) < \frac{\epsilon}{2}$, lahko iz zgornjih neenakosti izpeljemo

$$\begin{aligned} S(f + g, D) - s(f + g, D) &\leq (S(f, D) + S(g, D)) - (s(f, D) + s(g, D)),\\ &= (S(f, D) - s(f, D)) - (S(g, D) - s(g, D)),\\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

kar pomeni, da je funkcija $f + g$ integrabilna.

Dokažimo sedaj še aditivnost določenega integrala. Za poljubni delitvi D in D' intervala $[a, b]$ imamo neenakosti

$$s(f, D) + s(g, D') \leq s(f, D \cup D') + s(g, D \cup D') \leq s(f + g, D \cup D').$$

Če pogledamo supremum po vseh delitvah na levi in na desni strani zgornje neenakosti, od tod dobimo neenakost

$$\sup\{s(f, D) \mid D\} + \sup\{s(g, D) \mid D\} \leq \sup\{s(f + g, D) \mid D\}.$$

Ker so funkcije f, g in $f+g$ integrabilne, pa je ta neenakost ekvivalentna neenakosti

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx.$$

Podobno lahko z ocenjevanjem zgornjih integralskih vsot danih treh funkcij izpeljemo, da je

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Iz obeh zgornjih neenakosti skupaj sledi pravilo za določeni integral vsote

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

$\underline{c \cdot f \in \mathcal{R}([a,b])}$: Produkt funkcije s konstanto $c \cdot f$ lahko zapišemo tudi v obliki kompozituma $c \cdot f = \phi \circ f$, kjer je $\phi(t) = ct$ linearna funkcija. Ker je linearna funkcija zvezna, od tod po Trditvi 11 sledi, da je funkcija $\phi \circ f$ integrabilna.

Pokazati moramo še enakost integralov. Če je $c \geq 0$, potem za vsako omejeno funkcijo f velja $\inf(c \cdot f) = c \cdot \inf f$. Torej za vsako delitev D intervala $[a,b]$ velja tudi

$$s(c \cdot f, D) = c \cdot s(f, D).$$

Če vzamemo na obeh straneh te enakosti supremum po vseh delitvah, dobimo

$$\int_a^b (c \cdot f)(x)\,dx = c \int_a^b f(x)\,dx.$$

Naj bo sedaj $c < 0$. V tem primeru za poljubno omejeno funkcijo f velja $\inf(c \cdot f) = c \cdot \sup f$, kar pomeni, da je za poljubno delitev D intervala $[a,b]$

$$s(c \cdot f, D) = c \cdot S(f, D).$$

Torej je

$$\begin{aligned} \int_a^b (c \cdot f)(x)\,dx &= \sup\{s(c \cdot f, D) \mid D\} = \sup\{c \cdot S(f,D) \mid D\}, \\ &= c \cdot \inf\{S(f,D) \mid D\} = c \int_a^b f(x)\,dx. \end{aligned}$$

$\underline{|f| \in \mathcal{R}([a,b])}$: V tem primeru funkcijo $|f|$ zapišimo kot kompozicijo $|f| = \phi \circ f$, kjer je $\phi(t) = |t|$. Ker je funkcija ϕ zvezna, je po Trditvi 11 funkcija $\phi \circ f$ integrabilna.

Po definiciji absolutne vrednosti imamo za vsak $x \in [a, b]$ neenakosti

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Z uporabo že dokazane neenakosti v (1) od tod sledi, da je

$$\int_a^b (-|f(x)|)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Ker lahko po že dokazanem predznak v levem integrandu nesemo pred integral, je torej

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

(3) Naj bo $|f(x)| \leq M$ za vsak $x \in [a, b]$. Z uporabo ravnokar dokazane neenakosti in pa neenakosti iz (1) dobimo, da je

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \leq \int_a^b M\, dx = M \int_a^b dx = M(b-a).$$

$\square$

Sedaj pokažimo še, da je tudi produkt integrabilnih funkcij integrabilen.

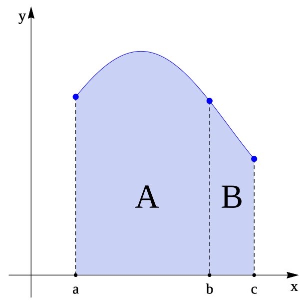
Trditev 13. *Naj bosta $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$. Potem je tudi $f \cdot g \in \mathcal{R}([a, b])$.*

Dokaz. Pri dokazu si bomo pomagali z naslednjim trikom. Ker je funkcija $\phi(t) = t^2$ zvezna, je po Trditvi 11 za vsako integrabilno funkcijo h tudi funkcija $h^2 = \phi \circ h$ integrabilna. Od prej pa že vemo, da se integrabilnost ohranja pri seštevanju, odštevanju in množenju funkcij s konstantami. Sedaj lahko zapišemo

$$f \cdot g = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}.$$

Ker smo funkcijo $f \cdot g$ izrazili s funkcijama f in g s pomočjo operacij, ki ohranjajo integrabilnost, je torej funkcija $f \cdot g$ integrabilna. $\square$

Naslednja lastnost določenega integrala, ki jo bomo spoznali, je formula za seštevanje ploščin.



Če seštejemo ploščini likov pod grafom funkcije na dveh intervalih, ki se dotikata, dobimo ploščino lika pod grafom funkcije na uniji intervalov, oziroma

$$\mathrm{pl}(A \cup B) = \mathrm{pl}(A) + \mathrm{pl}(B).$$

Trditev 14. *Naj bodo $a \leq b \leq c$ realna števila in naj bo $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ funkcija. Potem je $f \in \mathcal{R}([a, c])$ natanko takrat, ko sta $f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}([a, b])$ in $f|_{[b,c]} \in \mathcal{R}([b, c])$. V tem primeru velja*

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx.$$

Dokaz. Če je f integrabilna, je omejena na $[a, c]$, zato je omejena tudi na $[a, b]$ in $[b, c]$. Če pa sta integrabilni obe zožitvi, sta obe zožitvi omejeni, zato je potem omejena tudi sama funkcija f.

($\Longrightarrow$) Privzemimo sedaj, da je $f \in \mathcal{R}([a, c])$. Vzemimo poljuben $\epsilon > 0$. Ker je f integrabilna, lahko najdemo takšno delitev D intervala $[a, c]$, da je

$$S(f, D) - s(f, D) < \epsilon.$$

Brez škode lahko predpostavimo, da je $b \in D$ (če ni, ga dodamo in dobimo finejšo delitev, za katero zgornja ocena še vedno velja). Sedaj definiramo delitvi obeh podintervalov s krajiščima v b

$$\begin{aligned} D_1 &= D \cap [a, b] \quad \text{delitev } [a, b], \\ D_2 &= D \cap [b, c] \quad \text{delitev } [b, c]. \end{aligned}$$

Spodnja in zgornja integralska vsota funkcije f glede na delitev D sta enaki vsoti spodnjih oziroma zgornjih integralskih vsot obeh zožitev funkcije f glede na delitvi D_1 in D_2. Zato je

$$S(f, D) - s(f, D) = (S(f|_{[a,b]}, D_1) - s(f|_{[a,b]}, D_1)) + (S(f|_{[b,c]}, D_2) - s(f|_{[b,c]}, D_2))$$

Ker je vsota obeh nenegativnih sumandov na desni manjša od ϵ, je vsak člen posebej manjši od ϵ, od koder pa sledi, da sta obe zožitvi $f|_{[a,b]}$ in $f|_{[b,c]}$ integrabilni.

($\Longleftarrow$) Denimo sedaj, da sta zožitvi $f|_{[a,b]}$ in $f|_{[b,c]}$ integrabilni. Potem lahko najdemo delitev D_1 intervala $[a, b]$ in delitev D_2 intervala $[b, c]$, da je

$$\begin{aligned} S(f|_{[a,b]}, D_1) - s(f|_{[a,b]}, D_1) &< \frac{\epsilon}{2}, \\ S(f|_{[b,c]}, D_2) - s(f|_{[b,c]}, D_2) &< \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Za delitev $D = D_1 \cup D_2$ intervala $[a, c]$ potem velja

$$\begin{aligned} S(f, D) - s(f, D) &= (S(f|_{[a,b]}, D_1) - s(f|_{[a,b]}, D_1)) + (S(f|_{[b,c]}, D_2) - s(f|_{[b,c]}, D_2)), \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Enakost integralov: Tekom dokaza smo že večkrat uporabili dejstvo, da za delitev $D = D_1 \cup D_2$ velja

$$s(f, D) = s(f|_{[a,b]}, D_1) + s(f|_{[b,c]}, D_2).$$

Če pogledamo supremum po vseh delitvah na obeh straneh te enakosti, dobimo enakost integralov

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

□

Glede na naš dogovor, da je

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0,$$

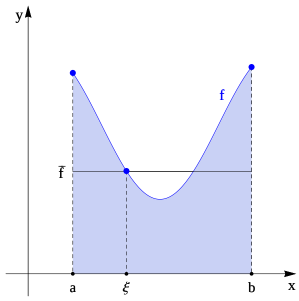
$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx,$$

velja enakost

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

tudi če $a \leq b \leq c$ ne drži. Torej so lahko a, b in c poljubna realna števila.

Preden se posvetimo glavni temi tega razdelka, si za trenutek poglejmo še, kako lahko s pomočjo določenega integrala izračunamo povprečje funkcije na danem intervalu.



Definicija 15. *Naj bo* $f \in \mathcal{R}([a, b])$. *Povprečna vrednost funkcije* f *na intervalu* $[a, b]$ *je število*

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dobro znan je primer iz fizike, pri katerem je $v = v(t)$ hitrost točke na časovnem obdobju $[t_1, t_2]$,

$$\overline{v} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

pa povprečna hitrost točke na tem časovnem intervalu.

Z zgornje skice že lahko slutimo, da zvezna funkcija vsaj enkrat zavzame svojo povprečno vrednost.

Trditev 16 (Izrek o povprečni vrednosti)**.** *Za poljubno zvezno funkcijo* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *obstaja takšna točka* $\xi \in [a,b]$*, da je*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dokaz. Ker je funkcija f zvezna, je tudi omejena in zavzame svoji ekstremni vrednosti. Naj bo $m = \min f$ in $M = \max f$. Potem velja $m \le f(x) \le M$ za vsak $x \in [a,b]$. Če ti dve neenakosti integriramo, dobimo po Trditvi 12 neenakosti

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a),$$

oziroma

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M.$$

Ker zavzame zvezna funkcija vse vrednosti med svojo minimalno in svojo maksimalno vrednostjo, torej obstaja točka $\xi \in [a,b]$, da je

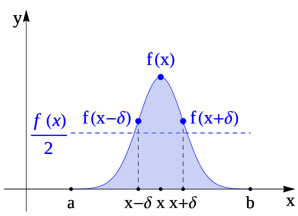
$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

□

Trditev 17. *Naj bo* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *zvezna funkcija in naj velja* $f(x) \ge 0$ *za vsak* $x \in [a,b]$*. Če je* $\int_a^b f(x)\,dx = 0$*, je* $f(x) = 0$ *za vsak* $x \in [a,b]$*.*

Dokaz. Uporabili bomo dokaz s protislovjem. Zaradi zveznosti mora biti nenegativna funkcija, ki ni ničelna, pozitivna na nekem intervalu. Od tod pa sledi, da ima lik med grafom funkcije in abscisno osjo pozitivno ploščino.

Recimo torej, da obstaja $x \in [a,b]$, da je $f(x) > 0$. Če bi bil x eno izmed krajišč, bi lahko dovolj blizu našli še neko drugo točko, v kateri bi bila vrednost funkcije f prav tako pozitivna. Torej smemo predpostaviti, da je x notranja točka intervala $[a,b]$. Ker je f zvezna v x, lahko najdemo tak $\delta > 0$, da je $[x-\delta, x+\delta] \subset [a,b]$ in da velja $f(t) \ge \frac{f(x)}{2}$ za vsak $t \in [x-\delta, x+\delta]$.



Definirajmo sedaj delitev $D = \{a, x-\delta, x+\delta, b\}$ intervala $[a,b]$. Ker je funkcija f na podintervalu $[x-\delta, x+\delta]$ navzdol omejena z $\frac{f(x)}{2}$, je ploščina srednje rezine pozitivna in imamo oceno

$$s(f, D) \geq \frac{f(x)}{2}(2\delta) = \delta \cdot f(x) > 0.$$

Našli smo torej delitev, pri kateri je spodnja integralska vsota pozitivna. Potem pa bi moral biti tudi integral, ki je supremum spodnjih integralskih vsot, pozitiven. Torej smo prišli do protislovja. $\square$

Sedaj smo prišli do dveh ključnih izrekov integralskega računa. Najprej bomo pokazali, da ima vsaka zvezna funkcija primitivno funkcijo, nato pa še, kako lahko s pomočjo nedoločenega integrala računamo določeni integral.

Izrek 18. *Naj bo $f \in \mathcal{R}([a,b])$ integrabilna in $c \in [a,b]$. Tedaj je funkcija $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt$$

zvezna. Če je funkcija f zvezna v točki $x_0 \in (a,b)$, potem je F odvedljiva v točki x_0 in velja $F'(x_0) = f(x_0)$.

Dokaz. Dokazali smo že, da iz integrabilnosti funkcije f na intervalu $[a,b]$ sledi integrabilnost zožitve funkcije f na vsakem podintervalu. Od tod sledi, da je funkcija F dobro definirana.

Zveznost funkcije F: Ker je f integrabilna, je omejena, zato obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da velja $|f(x)| \leq M$ za vsak $x \in [a,b]$. Vzemimo sedaj poljubna $x, y \in [a,b]$, za katera je $x < y$. Z uporabo lastnosti določenega integrala potem lahko izpeljemo neenakost

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &= \left| \int_c^y f(t)\, dt - \int_c^x f(t)\, dt \right| = \left| \int_x^c f(t)\, dt + \int_c^y f(t)\, dt \right|, \\ &= \left| \int_x^y f(t)\, dt \right| \leq M(y-x). \end{aligned}$$

Ker je M fiksen, bosta vrednosti funkcije F poljubno blizu skupaj, če bosta le argumenta dovolj blizu. To pomeni, da je funkcija F enakomerno zvezna in zato tudi zvezna.

Odvedljivost funkcije F: Denimo sedaj, da je f zvezna v točki x_0. Potem želimo pokazati, da je

$$\lim_{s \to x_0} \frac{F(s) - F(x_0)}{s - x_0} = f(x_0),$$

oziroma, da lahko za poljuben $\epsilon > 0$ najdemo tak $\delta > 0$, da je

$$\left| \frac{F(s) - F(x_0)}{s - x_0} - f(x_0) \right| < \epsilon$$

za vsak $s \in [a,b]$, za katerega je $|s - x_0| < \delta$. Ker je limita diferenčnih količnikov ravno odvod, bo od tod sledilo $F'(x_0) = f(x_0)$.

Izberimo torej poljuben $\epsilon > 0$. Ker je f zvezna v x_0, lahko najdemo tak $\delta > 0$, da za vsak $s \in [a,b]$, za katerega je $|s - x_0| < \delta$, velja $|f(s) - f(x_0)| < \epsilon$. Za tak $s > x_0$ potem velja:

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(s)-F(x_0)}{s-x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{s-x_0}\int_{x_0}^{s} f(t)\,dt - \frac{f(x_0)}{s-x_0}\int_{x_0}^{s} dt\right|,\\ &= \frac{1}{s-x_0}\left|\int_{x_0}^{s}(f(t)-f(x_0))\,dt\right|.\end{aligned}$$

Ker integriramo po intervalu $t \in [x_0, s]$, je za vsak t na tem intervalu $t - x_0 \leq s - x_0 < \delta$, od koder pa sledi $|f(t) - f(x_0)| < \epsilon$. Sedaj dobimo

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(s)-F(x_0)}{s-x_0} - f(x_0)\right| &= \frac{1}{s-x_0}\left|\int_{x_0}^{s}(f(t)-f(x_0))\,dt\right|,\\ &\leq \frac{1}{s-x_0}\int_{x_0}^{s}|f(t)-f(x_0)|\,dt,\\ &< \frac{1}{s-x_0}\int_{x_0}^{s}\epsilon\,dt = \frac{1}{s-x_0}\cdot\epsilon(s-x_0),\\ &= \epsilon.\end{aligned}$$

Analogen dokaz deluje tudi v primeru, ko je $s < x_0$. □

Funkciji F rečemo funkcija zgornje meje. Če je f integrabilna, je F zvezna. Če pa je f zvezna, je F celo odvedljiva. Vidimo torej, da nam integriranje funkcijo polepša, medtem ko nam jo odvod na drugi strani lahko malce pokvari. Med drugim iz zgornjega izreka sledi, da ima poljubna zvezna funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ primitivno funkcijo

$$F(x) = \int_{c}^{x} f(t)\,dt.$$

Izbira spodnje meje c v določenem integralu ustreza izbiri konstante C pri nedoločenem integralu. Dejstvo, da je F primitivna funkcija funkcije f je zanimivo teoretično, v praksi pa nam še vedno ostane problem, kako bi funkcijo F dejansko izračunali.

Poglejmo si še fizikalno interpretacijo te formule. Denimo, da se točka giblje po premici in da je ob času t_0 v koordinatnem izhodišču. S funkcijo $v : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ opišimo njeno hitrost. Položaj točke ob času t je potem enak

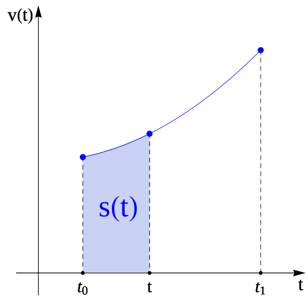
$$s(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt,$$

iz izreka pa sledi, da je

$$\dot{s} = v,$$

kar pa že vemo od prej, saj smo tako definirali hitrost.

To pomeni, da ploščina lika pod grafom funkcije hitrosti pove, kolikšno pot je opravila točka. Podobnih primerov uporabe določenega integrala je v fiziki še veliko.



Izrek 19. *Naj bo $f \in \mathcal{R}([a,b])$ in naj bo $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki je odvedljiva na (a,b) in za katero je $F'(x) = f(x)$ za vsak $x \in (a,b)$. Potem je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Dokaz. Dokazali bomo, da za vsak $\epsilon > 0$ velja

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \epsilon.$$

Od tod bo sledila enakost v izreku.

Izberimo sedaj poljuben $\epsilon > 0$. Ker je funkcija f integrabilna, lahko najdemo delitev $D = \{x_k\}_{k=0}^{k=n}$ intervala $[a,b]$, da je $S(f,D) - s(f,D) < \epsilon$. Funkcija F je zvezna na vsakem izmed intervalov $[x_{k-1}, x_k]$ in odvedljiva v njihovih notranjostih. Zato lahko po Lagrangeevem izreku za vsak $1 \le k \le n$ najdemo točko $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, da je

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Od tod lahko izpeljemo, da je Riemannova vsota funkcije f, prirejena delitvi D in izbiri točk $\{\xi_k\}$, enaka:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1})) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

Ker imamo neenakosti

$$s(f,D) \le \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \le S(f,D)$$

in

$$s(f,D) \le \int_a^b f(x)\,dx \le S(f,D),$$

je

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - \int_a^b f(x)\,dx \right|,$$
$$< S(f,D) - s(f,D) < \epsilon.$$

□

Terminologija glede imen izrekov se od vira do vira razlikuje. Nekateri avtorji rečejo prvemu izreku osnovni izrek analize, drugemu pa Newton-Leibnizova formula. Spet drugi pa obema izrekoma rečejo kar prvi in drugi osnovni izrek analize.

Kar se tiče uporabe, je zanimiva predvsem formula, ki nam omogoča analitično računati določene integrale s pomočjo primitivnih funkcij. Da bi izračunali določeni integral dane funkcije, praviloma najprej izračunamo nedoločeni integral s pomočjo metod, ki smo jih spoznali v razdelku o nedoločenem integralu, nato pa uporabimo formulo. Pravili za integracijo po delih in pa uvedbo nove spremenljivke pa lahko uporabimo tudi direktno na določenem integralu.

Trditev 20 (Integracija po delih za določeni integral)**.** *Naj bosta funkciji* $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$*. Nadalje naj bosta* $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ *zvezni funkciji, ki sta odvedljivi na* (a,b)*, in za kateri velja* $F'(x) = f(x)$ *ter* $G'(x) = g(x)$ *za vsak* $x \in (a,b)$*. Tedaj je*

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)\,dx.$$

Dokaz. Definirajmo funkcijo $H = F \cdot G$. Potem je H zvezna na $[a,b]$, odvedljiva na (a,b), kjer velja

$$H' = F'G + FG' = fG + Fg.$$

Ker lahko H' izrazimo s seštevanjem in množenjem integrabilnih funkcij, je $H' \in \mathcal{R}([a,b])$. Z uporabo fundamentalnega izreka analize od tod dobimo

$$\int_a^b (f(x)G(x) + F(x)g(x))\,dx = H(b) - H(a) = F(b)G(b) - F(a)G(a),$$

oziroma

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)\,dx.$$

□

Trditev 21 (Uvedba nove spremenljivke v določeni integral)**.** *Naj bosta funkciji* $\alpha : E^{odp} \to \mathbb{R}$ *in* $F : D^{odp} \to \mathbb{R}$ *zvezno odvedljivi in denimo, da je* $[a, b] \subset E$ *ter* $\alpha([a, b]) \subset D$*. Označimo* $f = F'$*. Potem je funkcija* $(f \circ \alpha) \cdot \alpha' \in \mathcal{R}([a, b])$ *in velja*

$$\int_a^b f(\alpha(x))\alpha'(x)\,dx = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a)).$$

Dokaz. Funkcija $F \circ \alpha$ je zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b). Njen odvod je enak

$$(F \circ \alpha)'(x) = F'(\alpha(x))\alpha'(x) = f(\alpha(x))\alpha'(x),$$

zato po fundamentalnem izreku analize sledi

$$\int_a^b f(\alpha(x))\alpha'(x)\,dx = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a)).$$

□

Pravilo za uvedbo nove spremenljivke v določeni integral uporabljamo na naslednji način. Spremenljivka x teče po intervalu med a in b. Če uvedemo novo spremenljivko $t = \alpha(x)$, bomo vzeli, da t teče po intervalu med $\alpha(a)$ in $\alpha(b)$, diferencial spremenljivke t pa bo enak $dt = \alpha'(x)\,dx$. Pravilo za uvedbo nove spremenljivke potem zapišemo v obliki

$$\int_a^b f(\alpha(x))\alpha'(x)\,dx = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f(t)\,dt.$$

Če smo bili uspešni, smo si s tem poenostavili integrand, zamenjali pa sta se meji integracije. To, da smo formalno zamenjali ime spremenljivke, nas sploh ne zanima več. Sedaj lahko spet uporabimo kakšno izmed pravil, ali pa poskusimo izračunati nedoločeni integral.

Pri računanju bomo pogosto uporabljali oznako

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

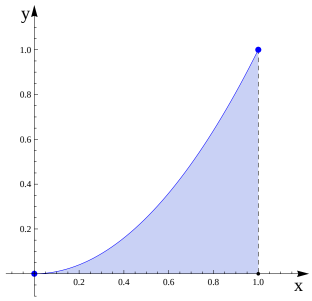
Zgled. (1) Začnimo z določenim integralom potenčne funkcije $f(x) = x^n$. Za majhne n bi lahko ta integral izračunali tudi po definiciji, s pomočjo fundamentalnega izreka analize pa dobimo:

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

V posebnem primeru dobimo, da je ploščina lika pod grafom potenčne funkcije na intervalu $[0, 1]$ enaka

$$\text{pl} = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}.$$

Poglejmo še skico tega lika.



(2) Poglejmo sedaj določeni integral sinusne funkcije:

$$\int_a^b \sin x\, dx = -\cos x\Big|_a^b = \cos a - \cos b.$$

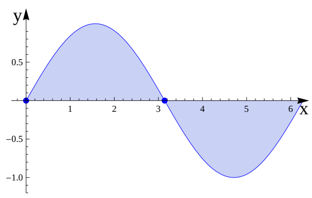
Ploščina lika med enim lokom sinusoide in abscisno osjo je enaka

$$\text{pl} = \int_0^\pi \sin x\, dx = \cos 0 - \cos \pi = 2.$$

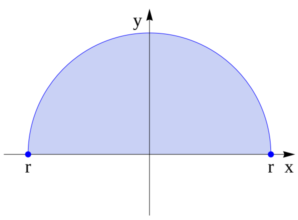
Po drugi strani pa je

$$\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = \cos 2\pi - \cos 0 = 0.$$

V tem primeru imata lika nad in pod osjo enaki ploščini, ki pa se odštejeta.



(3) Za konec izračunajmo še ploščino kroga s polmerom r. Ta je enaka dvakratniku ploščine med grafom funkcije $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ in abscisno osjo na intervalu $[-r, r]$.



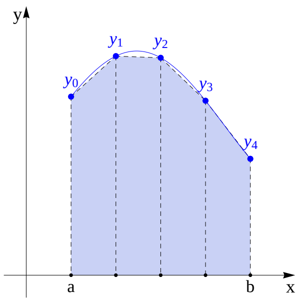
Integral bomo izračunali z uvedbo nove spremenljivke $x = r\sin t$, ki nam da $dx = r\cos t\,dt$. Integracijski interval se pri tem spremeni v $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{pl} &= 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx, \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}r\cos t\,dt, \\
&= 2r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt, \\
&= 2r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt, \\
&= r^2\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}, \\
&= \pi r^2.
\end{aligned}$$

Numerična integracija

Newton-Leibnizeva formula je močno orodje za eksaktno računanje določenih integralov. Če pa je ne moremo uporabiti (ker na primer ne znamo najti primitivne funkcije), lahko določeni integral dane funkcije aproksimiramo z Riemannovo vsoto. Pri tem gre pravzaprav za aproksimacijo lika pod krivuljo z navpičnimi pravokotniki. Če pravokotnike nadomestimo z bolj kompliciranimi liki, dobimo nekaj metod za približno računanje določenih integralov. Pri vseh teh metodah je računalnik nepogrešljiv pripomoček.

Najprej si poglejmo *trapezno metodo*. Izberimo funkcijo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in razdelimo interval $[a, b]$ na n enakih podintervalov za nek $n \in \mathbb{N}$. Pri trapezni metodi na vsakem podintervalu lik med krivuljo in abscisno osjo aproksimiramo s trapezom, ki ima dve stranici navpični, eno vodoravno, ena stranica pa povezuje točki na grafu funkcije nad krajiščema podintervala.



Ker lik aproksimiramo s trapezi, bomo pri enakem številu podintervalov pri trapezni metodi praviloma dobili boljšo aproksimacijo kot pa z Riemannovo vsoto. Če večamo število podintervalov, bo aproksimacija čedalje boljša, napako pa lahko tudi ocenimo, kot nam pove naslednja trditev.

Trditev 22 (Formula trapezov)**.** *Naj bo $f : E^{odp} \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija in $[a,b] \in E$. Izberimo poljuben $n \in \mathbb{N}$ in definirajmo $y_k = f(a + k\frac{b-a}{n})$ za $k = 0, 1, \ldots, n$. Potem velja*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_n + y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c)$$

za nek $c \in [a,b]$.

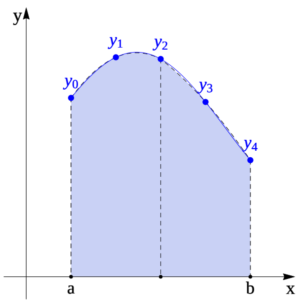
Trditve ne bomo dokazali, pripomnimo pa, da je izraz

$$\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_n + y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right)$$

ravno enak vsoti ploščin vseh trapezov, medtem ko je $\frac{(b-a)^3}{12n^2}|f''(c)|$ napaka aproksimacije. Ker je funkcija f dvakrat zvezno odvedljiva, je vrednost $|f''(c)|$ omejena z neko konstanto, kar pa pomeni, da napaka aproksimacije pada sorazmerno s kvadratom števila podintervalov.

V praksi lahko torej izračunamo približno vrednost določenega integrala s seštevanjem vrednosti funkcije v ustreznih točkah. To je seveda praviloma precej lažje kot pa iskanje primitivne funkcije.

Če namesto s trapezi lik aproksimiramo z liki, ki so na eni strani omejeni s kvadratnimi parabolami, pridemo do *Simpsonove metode*.



V tem primeru na vsakem podintervalu graf interpoliramo s kvadratno funkcijo, ki seka graf v obeh krajiščih in pa v središču podintervala. Če je intervalov n, moramo torej izračunati vrednosti funkcije v $2n$ točkah. Ker lahko s parabolo bolje aproksimiramo graf kot pa z daljico, je aproksimacija pri Simpsonovi metodi boljša kot pa pri trapezni metodi.

Trditev 23 (Simpsonova formula)**.** *Naj bo $f : E^{odp} \to \mathbb{R}$ štirikrat zvezno odvedljiva funkcija in $[a,b] \in E$. Izberimo poljuben $n \in \mathbb{N}$ in definirajmo $y_k = f(a + k\frac{b-a}{2n})$ za $k = 0, 1, \ldots, 2n$. Potem velja*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}\left(y_0 + 4\sum_{k=1}^{n} y_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{n-1} y_{2k} + y_{2n}\right) - \frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(c)$$

za nek $c \in [a,b]$.

Če upoštevamo, da na vsakem podintervalu parabole interpolirajo graf funkcije f, lahko z nekoliko dela lahko preverimo, da je

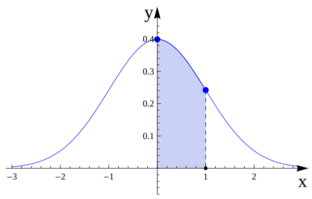
$$\frac{b-a}{6n}\left(y_0+4\sum_{k=1}^{n}y_{2k-1}+2\sum_{k=1}^{n-1}y_{2k}+y_{2n}\right)$$

ravno vsota ploščin likov pod parabolami. Napaka aproksimacije je v tem primeru enaka $\frac{(b-a)^5}{2880n^4}|f^{(4)}(c)|$, kar pomeni, da pada proti nič sorazmerno s četrto potenco števila delilnih intervalov.

Zgled. Kot primer si poglejmo določeni integral Gaussove funkcije

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Ta funkcija predstavlja gostoto standardne normalne porazdelitve in igra ključno vlogo v statistiki in verjetnosti, zelo pomembna pa je tudi v fiziki. Vrednost tega konkretnega integrala je enaka verjetnosti, da standardno normalno porazdeljena spremenljivka zavzame vrednost na intervalu $[0,1]$.



Gaussova funkcija sicer ima primitivno funkcijo, ki pa ni elementarna funkcija, zato si ne moremo pomagati z fundamentalnim izrekom analize.

Pokazali bomo, kako lahko s pomočjo trapezne metode izračunamo ta integral na dve decimalki natančno. Naj bo

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Potem je $f''(x)=(x^2-1)f(x)$, od koder dobimo za $x\in[0,1]$ oceno

$$|f''(x)|=\frac{|x^2-1|}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot 1.$$

Želimo najti tak n, da bo napaka manjša od $0,005$, oziroma da bo

$$\frac{(1-0)^3}{12n^2}|f''(c)|\leq 0,005.$$

Ker je $|f''(c)\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, je dovolj najti n, ki zadošča

$$\frac{1}{12n^2\sqrt{2\pi}}\leq 0,005.$$

Hitro se lahko prepričamo, da je dober že $n = 3$.

V formuli trapezov je predpostavljeno, da znamo vrednosti $y_0, y_1, \ldots, y_n$ natančno izračunati. Pri bolj kompliciranih funkcijah to ni vedno mogoče, zato poskušamo vrednosti funkcije čimbolj natančno aproksimirati s pomočjo računalnika. V našem primeru je

$$\begin{aligned} y_0 &= f(0) = 0,3989, \\ y_1 &= f(1/3) = 0,3774, \\ y_2 &= f(2/3) = 0,3194, \\ y_3 &= f(1) = 0,2420, \end{aligned}$$

od tod pa dobimo aproksimacijo

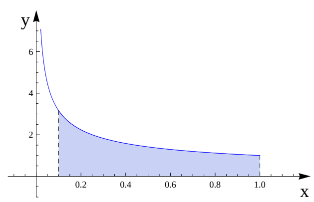
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \approx \frac{1}{3}\left(\frac{0,2420 + 0,3989}{2} + 0,3774 + 0,3194\right) = 0,34.$$

Dejanska vrednost integrala, zaokroženega na štiri decimalke, je $0,3413$, kar pomeni, da smo dobili dokaj dobro aproksimacijo že z zelo malim številom računskih operacij. Za boljšo aproksimacijo bi morali vzeti večji n, ali pa uporabiti Simpsonovo metodo.

Izlimitirani integral

Riemannov integral, ki smo ga dodobra spoznali v tem razdelku, obstaja le za omejene funkcije, definirane na končnem zaprtem intervalu. Kakor hitro je funkcija neomejena, ali pa je interval neskončen, Riemannove vsote ne konvergirajo. Kljub temu pa si je smiselno zastaviti vprašanje, kako integrirati neomejene funkcije, oziroma kako integrirati po neskončnem intervalu. Posplošitvi Riemannovega integrala, ki zajema tudi te primere, rečemo izlimitirani oziroma nepravi integral.

Za motivacijo si poglejmo naslednji primer. Zanima nas ploščina lika pod grafom funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na intervalu $(0, 1]$. Ker je funkcija f neomejena, je tudi lik neomejen, zato ni takoj jasno, če sploh lahko smiselno definiramo ploščino tega lika.



Pri tem si bomo pomagali s podobno idejo kot pri računanju vsot vrst. Za vsak $\epsilon \in (0, 1)$ je lik, ki leži pod grafom funkcije na intervalu $[\epsilon, 1]$, omejen, njegova ploščina pa je enaka

$$\int_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_\epsilon^1 = 2(1 - \sqrt{\epsilon}).$$

Sedaj bomo z omejenimi liki aproksimirali naš neomejen lik. Domnevamo, da bo aproksimacija čedalje boljša, čim manjši bo ϵ. Ploščino neomejenega lika definiramo kot limito (če obstaja) ploščin teh omejenih likov, ko gre ϵ proti nič, oziroma

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon \to 0+} 2(1 - \sqrt{\epsilon}) = 2.$$

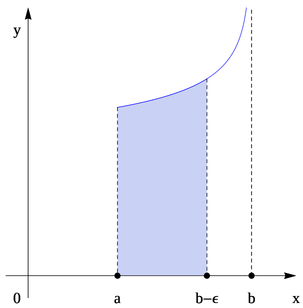
Poglejmo sedaj, kako definiramo izlimitirani integral poljubne zvezne funkcije. Ločili bomo več primerov.

Neomejena funkcija na končnem intervalu

Naj bo $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Izlimitirani integral funkcije f definiramo z limito

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\, dx,$$

če ta limita obstaja.



Analogno definiramo izlimitirani integral zvezne funkcije $f : (a, b] \to \mathbb{R}$

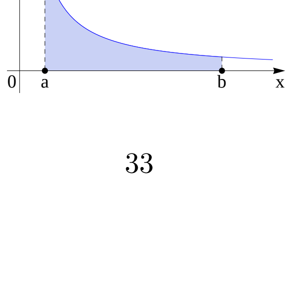
$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\, dx,$$

če limita obstaja.

Integracija po neomejenem intervalu

Naj bo $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem definiramo izlimitirani integral funkcije f z limito

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx.$$

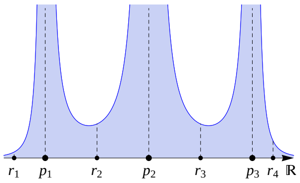


Analogno definiramo izlimitirani integral zvezne funkcije $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\, dx.$$

Integracija poljubne odsekoma zvezne funkcije

Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezna funkcija in naj bodo $p_1, p_2, \ldots, p_n$ točke, kjer f ni zvezna. Izberimo poljubne točke $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$, tako da velja $r_1 < p_1 < r_2 < p_2 < r_3 < \ldots < r_n < p_n < r_{n+1}$.



S temi točkami smo realna števila razdelili na dva polneskončna intervala in pa na končno število omejenih intervalov. Na vsakem izmed teh intervalov je funkcija bodisi zvezna, ali pa je nezvezna kvečjemu v enem izmed krajišč, zato že znamo definirati izlimitirani integral funkcije f na vsakem izmed teh intervalov. Sedaj definiramo

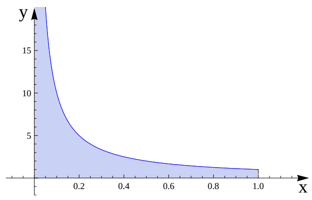
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{r_1} f(x)\, dx + \int_{r_1}^{p_1} f(x)\, dx + \ldots + \int_{p_n}^{r_{n+1}} f(x)\, dx + \int_{r_{n+1}}^{\infty} f(x)\, dx.$$

Izlimitirani integral funkcije f obstaja, če obstajajo vsi integrali na desni strani. Rezultat ni odvisen od izbire točk $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$.

Zgled. (1) Za začetek si poglejmo lik pod grafom funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $(0, 1]$. Račun

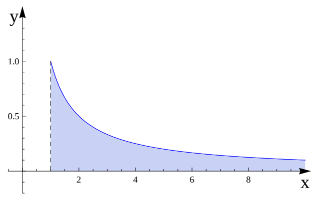
$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \to 0+} \ln|x| \Big|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \to 0+} (\ln 1 - \ln \epsilon) = \infty$$

nam pove, da ta izlimitirani integral ne obstaja. To pomeni, da ima naš lik neskončno ploščino.



(2) Poglejmo sedaj še enkrat lik pod grafom funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$, a tokrat na intervalu $[1, \infty)$.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \to \infty} \ln|x| \Big|_1^b = \lim_{b \to \infty} (\ln b - \ln 1) = \infty.$$

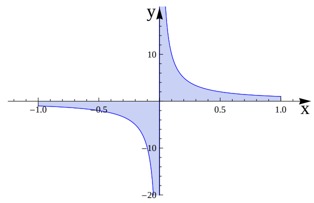


Tudi tokrat ima lik neomejeno ploščino.

(3) V obeh prejšnjih primerih je problem nastopil v krajišču intervala ali pa v neskončnosti. Bolj pazljivi pa moramo biti pri obravnavi integrala

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}.$$

S slike bi lahko uganili, da imata lika levo in desno od ordinatne osi enako veliki, a nasprotno predznačeni, ploščini.



Od tod bi zmotno sklepali, da je ta integral enak nič. Po naši definiciji je namreč

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x}.$$

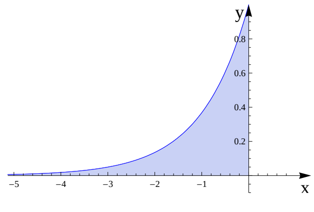
Če hočemo, da naš integral obstaja, bi morala obstajati oba integrala na desni, kar pa že vemo, da ni res. Naš integral torej ne obstaja.

Opomnimo še, da obstaja še bolj splošna verzija izlimitiranega integrala, ki se ji reče Cauchyjeva glavna vrednost. Po tej verziji bi zgornji integral obstajal in bil enak nič.

(4) Pri prejšnjih primerih je bil vzrok za divergenco integrala v tem, da se je graf funkcije prepočasi približeval navpični oziroma vodoravni asimptoti. Če hitrost približevanja povečamo, pa dobimo kot rezultat like s končno ploščino. Kot primer vzemimo integral funkcije $f(x) = e^x$ na $(-\infty, 0]$.

$$\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty} e^x\Big|_a^0 = \lim_{a\to-\infty} (e^0 - e^a) = 1.$$

Eksponentna funkcija pada pri $x \to -\infty$ tako hitro proti nič, da ima lik pod njenim grafom končno ploščino.



(5) Poglejmo si še primer potenčne funkcije, ki omejuje neomejen lik s končno ploščino.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$