Funkcije ene realne spremenljivke

Funkcije pogosto uporabljamo za opisovanje fizikalnih količin kot so npr. temperatura, tlak, energija, hitrost, električno polje... V različnih kontekstih pridejo v poštev različni tipi funkcij. Zaenkrat se bomo omejili na realne funkcije ene realne spremenljivke in spoznali nekatere njihove lastnosti, v nadaljevanju pa nas bodo zanimale tudi funkcije večih spremenljivk in pa vektorske funkcije.

Definicija 1. *(Realna) funkcija ene realne spremenljivke je funkcija*

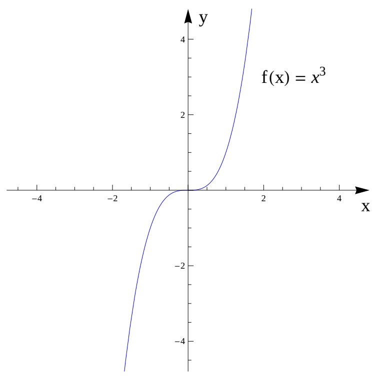
$$f : D \to \mathbb{R},$$

kjer je $D \subset \mathbb{R}$.

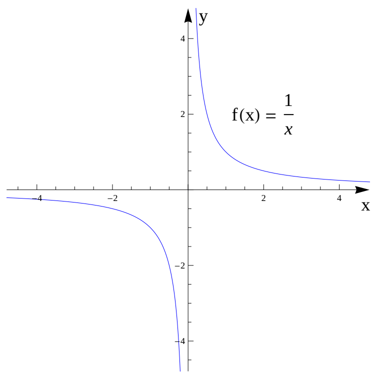
Funkcija je določena z dvema podatkoma: z definicijskim območjem (domeno) D in pa s predpisom f. Če funkcijo ene realne spremenljivke podamo s predpisom in posebej ne povemo, kaj je njena domena, potem privzamemo, da D vsebuje natanko tiste točke iz $\mathbb{R}$, za katere predpis sploh lahko izračunamo.

Realno funkcijo ene realne spremenljivke ponazorimo z njenim grafom, ki bo v naših primerih ponavadi predstavljen s krivuljo v ravnini.

Zgled. (1) Funkcija s predpisom $f(x) = x^3$ ima naravno domeno $D = \mathbb{R}$, njen graf pa je



(2) Funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ ima domeno $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 0\}$, njen graf pa je

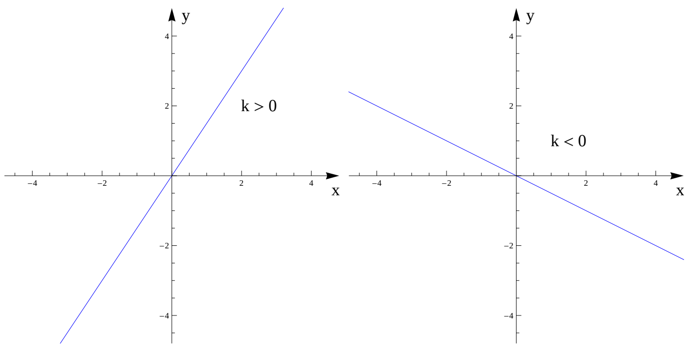


Za poljubno podmnožico $A \subset D$ domene funkcije f označimo z $f|_A$ zožitev funkcije f na A. Zožitev funkcije ene realne spremenljivke je spet funkcija ene realne spremenljivke. Za funkcijo f bomo rekli, da ima lastnost Z na A, če ima funkcija $f|_A$ lastnost Z.

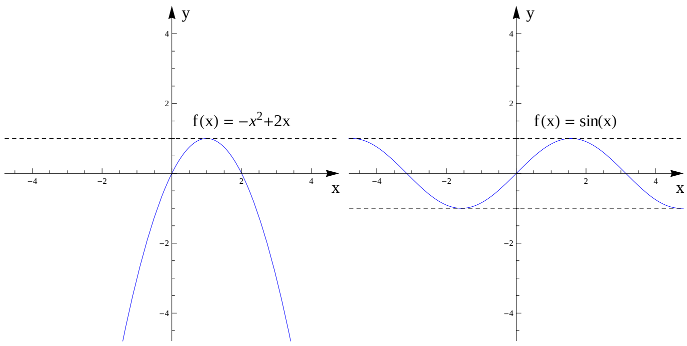
Definicija 2. *Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ realna funkcija ene realne spremenljivke.*

- *Funkcija f je (strogo) padajoča, če za poljubna $x, y \in D$, $x < y$, velja $f(x) \geq f(y)$ $(f(x) > f(y))$.*
- *Funkcija f je (strogo) naraščajoča, če za poljubna $x, y \in D$, $x < y$, velja $f(x) \leq f(y)$ $(f(x) < f(y))$.*
- *Funkcija f je (strogo) monotona, če je bodisi (strogo) naraščajoča ali (strogo) padajoča na D.*
- *Funkcija f je navzgor (navzdol) omejena, če je njena slika $f(D)$ navzgor (navzdol) omejena podmnožica $\mathbb{R}$. Funkcija f je omejena, če je hkrati navzgor in navzdol omejena.*

Linearna funkcija $f(x) = kx$ je strogo naraščajoča, če je $k > 0$, in strogo padajoča, če je $k < 0$.



Kvadratna funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ je navzgor omejena, če je $a < 0$, in navdol omejena, če je $a > 0$. Funkcija $f(x) = \sin x$ je primer omejene funkcije.



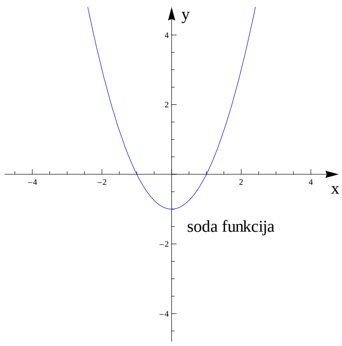
Za podmnožico $D \subset \mathbb{R}$ rečemo, da je *simetrična*, če je $D = -D$, kjer je

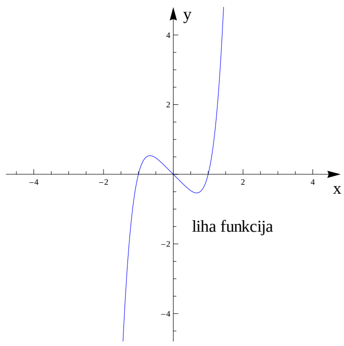
$$-D = \{-x \mid x \in D\}.$$

Definicija 3. *Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ realna funkcija ene realne spremenljivke, definirana na simetrični domeni D.*

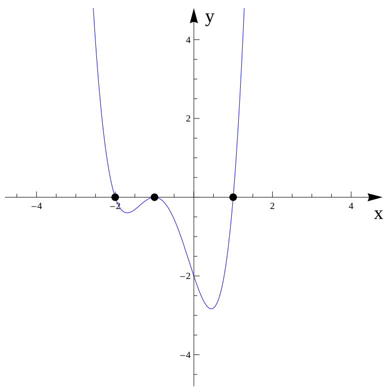
- *Funkcija f je soda, če je $f(x) = f(-x)$ za vsak $x \in D$.*
- *Funkcija f je liha, če je $f(-x) = -f(x)$ za vsak $x \in D$.*

Graf sode funkcije je simetričen glede na ordinatno os, graf lihe funkcije pa glede na koordinatno izhodišče. Primeri lihih funkcij so polinomi s samo lihimi potencami ter sinusna funkcija, primeri sodih funkcij pa polinomi s samo sodimi potencami in pa kosinusna funkcija.





Pomembno vlogo igrajo točke na realni osi, kjer je funkcija enaka 0. *Ničla* funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ je točka $a \in D$, za katero je $f(a) = 0$.



Podobno kot pri številih lahko tudi med realnimi funkcijami ene realne spremenljivke definiramo osnovne računske operacije.

$$\begin{array}{rl}
f + g : D \cap E \to \mathbb{R} & (f+g)(x) = f(x) + g(x), \\
f \cdot g : D \cap E \to \mathbb{R} & (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \\
\dfrac{f}{g} : D \cap g^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R} & \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \\
f \circ g : g^{-1}(D) \to \mathbb{R} & (f \circ g)(x) = f(g(x)).
\end{array}$$

Pri tem sta $f : D \to \mathbb{R}$ in $g : E \to \mathbb{R}$ poljubni realni funkciji ene realne spremenljivke. Pozorni moramo biti predvsem na domeno teh funkcij. Če hočemo namreč dve funkciji sešteti ali zmnožiti v neki točki, morata biti v tej točki definirani obe funkciji. Podobni omejitvi imamo tudi pri količniku in pa kompozitumu dveh funkcij. Vsoto in produkt na isti način definiramo tudi za realne funkcije več spremenljivk, medtem ko lahko za vektorske funkcije smiselno definiramo samo vsoto.

Če sta obe funkciji definirani na celi realni osi, so njuna vsota, produkt in kompozitum spet definirani na celi realni osi. Operacija seštevanja je v tem primeru komutativna in asociativna, nevtralni element za seštevanje je funkcija $f(x) = 0$, nasprotni element funkcije f pa je funkcija $-f$, definirana s predpisom $(-f)(x) = -f(x)$. Realne funkcije, ki so definirane na celi realni osi tvorijo abelovo grupo za seštevanje. Množenje teh funkcij je tudi komutativno in asociativno, z nevtralnim elementom $f(x) = 1$. Nasprotni element za množenje pa imajo samo funkcije, ki so povsod neničelne.

Zgled. Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ poljubna realna funkcija ene realne spremenljivke, definirana na simetrični domeni D. Definirajmo funkciji $s : D \to \mathbb{R}$ in $l : D \to \mathbb{R}$ s predpisoma

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \\ l(x) &= \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \end{aligned}$$

Iz enakosti

$$\begin{aligned} s(-x) &= \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = s(x), \\ l(-x) &= \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -l(x) \end{aligned}$$

sledi, da je funkcija s soda, funkcija l pa liha. Vsota teh dveh funkcij je enaka

$$s + l = f,$$

kar pomeni, da lahko vsako funkcijo, ki je definirana na simetrični domeni, zapišemo kot vsoto sode in lihe funkcije. Hitro lahko tudi preverimo, da je ta zapis enoličen.

Limita funkcije

Realno funkcijo ene realne spremenljivke geometrično predstavimo z njenim grafom. Navajeni smo, da graf sestoji iz ene ali več krivulj, čeprav to ni zmeraj res. Množica vseh realnih funkcij ene realne spremenljivke je namreč zelo velika, večino teh funkcij pa sploh ne moremo predstaviti s krivuljami. V matematični analizi in fiziki nas zato zanimajo predvsem 'lepe' funkcije, kot so npr. zvezne in pa odvedljive funkcije. Da bi lahko formalno definirali te lastnosti, najprej spoznajmo še nekaj topoloških pojmov.

Definicija 4. *Naj bo $D \subset \mathbb{R}$ poljubna podmnožica realnih števil in $a \in \mathbb{R}$.*

· *Točka a je notranja točka D, če obstaja $\epsilon > 0$, da je $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset D$.*

· *Točka a je zunanja točka D, če obstaja $\epsilon > 0$, da je $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset D^c$.*

· *Točka a je robna točka D, če ni niti notranja niti zunanja točka D.*

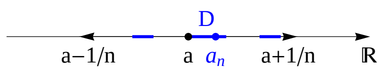
· *Točka a je stekališče množice D, če za vsak $\epsilon > 0$ velja*

$$(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap (D \setminus \{a\}) \neq \emptyset.$$

Točka a je notranja točka množice D, če je hkrati z njo še nek cel interval okrog nje vsebovan v D. Zunanje točke množice D so tiste, ki so 'daleč' proč od množice D. Če je torej a zunanja točka množice D, potem a ne leži v D, hkrati pa točke a niti ne moremo poljubno dobro aproksimirati s točkami iz D. Robne točke ležijo na meji med notranjimi in zunanjimi točkami. Robna točka množice D lahko leži v D, lahko pa tudi ne, ima pa lastnost, da jo lahko poljubno dobro aproksimiramo tako s točkami množice D kot s točkami množice D^c.

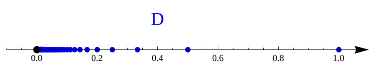
Točka a je stekališče množice D, če jo lahko poljubno dobro aproksimiramo s točkami iz D, ki so različne od a. Z zadnjim pogojem se izognemo točkam, ki so sicer v D, a so izolirane od ostalih točk. Vsaka notranja točka množice je njeno stekališče, medtem ko nobena zunanja točka ne more biti stekališče. Robne točke so lahko stekališča, lahko pa niso.

Ekvivalentno lahko stekališča množice definiramo s pomočjo zaporedij. Po definiciji je točka a stekališče množice D, če za poljuben $\epsilon > 0$ velja $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap (D \setminus \{a\}) \neq \emptyset$. Če zaporedoma za vsak $n \in \mathbb{N}$ izberemo $\epsilon = \frac{1}{n}$, lahko najdemo zaporedje točk (a_n), ki so vse različne od a, vse v D, in za katere velja $a_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$. Po konstrukciji je torej $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$.



Velja pa tudi obratno. Točka a je namreč stekališče množice D natanko takrat, ko obstaja zaporedje (a_n) točk v $D \setminus \{a\}$, za katerega je $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$.

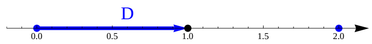
Zgled. (1) Poglejmo si množico $D = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$.



Množica D ne vsebuje nobenega intervala, zato je njena notranjost prazna. Zunanje točke so vse točke v D^c razen točke 0. Točko 0 lahko namreč poljubno dobro aproksimiramo s točkami iz D, hkrati pa jo lahko poljubno dobro aproksimiramo z negativnimi realnimi števili, ki pa ležijo v zunanjosti množice D. Množica robnih točk množice D je potemtakem množica $D \cup \{0\}$.

Edini kandidati za stekališča so v tem primeru robne točke. Če pogledamo na primer točko 1, vidimo, da je izolirana od preostalih točk množice D. Bolj natančna slika bi nam razkrila, da je v bistvu vsaka točka D izolirana od preostalih točk množice D, zato nam ostane samo točka 0. Le-to pa lahko poljubno dobro aproksimiramo s točkami iz D (ki so vse različne od 0), zato je 0 edino stekališče množice D.

(2) Naj bo sedaj $D = [0, 1) \cup \{2\}$.



Množica D sestoji iz polodprtega intervala in pa izolirane točke. Njena notranjost je odprti interval $(0, 1)$, robne točke pa so $\{0, 1, 2\}$. Vse ostale točke so zunanje. Stekališča množice D so točke zaprtega intervala $[0, 1]$, torej tudi točka 1, ki sicer ni vsebovana v D.

Definicija stekališča množice je sicer zelo podobna definiciji stekališča zaporedja, a z eno pomembno razliko, na katero moramo biti pozorni. Če vzamemo na primer konstantno zaporedje (a), je točka a stekališče tega zaporedja, ni pa stekališče slike zaporedja $\mathrm{Im}\,(a) = \{a\}$.

V nadaljevanju se bomo posvetili predvsem funkcijam, katerih grafi imajo obliko kosoma nepretrganih krivulj. V ta namen najprej definirajmo pojem limite funkcije.

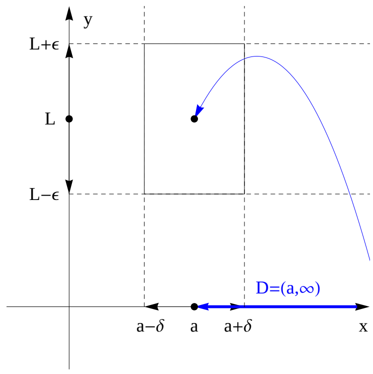
Definicija 5. *Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija ene realne spremenljivke in naj bo a stekališče množice D. Točka $L \in \mathbb{R}$ je limita funkcije f v točki a, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsak $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap (D \setminus \{a\})$ velja $|f(x) - L| < \epsilon$. Če je L limita funkcije f v točki a, to označimo z*

$$L = \lim_{x \to a} f(x).$$

Intuitivno nam limita pove, kam (če sploh) se približujejo vrednosti funkcije f v okolici točke a. V lepih primerih se bodo te vrednosti približevale kar k vrednosti funkcije f v točki a, če je f definirana v a. Spoznali pa bomo tudi primere, ko funkcija ni definirana v kakšnem stekališču domene, vseeno pa ima tam limito. V tem primeru je smiselno domeni funkcije dodati tudi to stekališče in za vrednost funkcije v stekališču vzeti limito.

V praksi lahko z grafa funkcije sklepamo, ali ima funkcija v neki točki limito na naslednji način. Če ima funkcija f limito L v točki a, bodo pri poljubni izbrani natančnosti ϵ vrednosti funkcije v vseh x-ih, ki so dovolj blizu a, dovolj dobro aproksimirale L. Najprej si izberemo poljuben ϵ in narišemo vodoravni črti na višinah $L - \epsilon$ in $L + \epsilon$. Če so vrednosti funkcije f v okolici točke a blizu L, mora graf funkcije f na tej okolici ležati znotraj pasa med tema dvema vodoravnima črtama. Če je x daleč proč od a, graf seveda lahko leži izven tega pasa, važno je le, da obstaja neka majhna okolica točke a, nad katero graf leži znotraj pasu. Če lahko takšno okolico najdemo pri poljubni natančnosti ϵ, število L proglasimo za limito funkcije f v a.

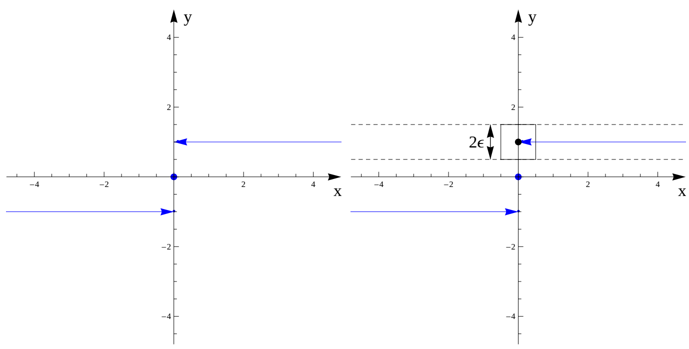
Točka a mora biti stekališče domene funkcije f, ni pa nujno, da je f sploh definirana v a. Na spodnji sliki imamo primer, ko je funkcija definirana na odprtem intervalu (a, ∞), ne pa tudi v robni točki a. Kljub temu pa vidimo, da se vrednosti funkcije f približujejo L, ko se x približuje a. Če bi domeno funkcije f razširili na $[a, \infty)$ in definirali $f(a) = L$, bi graf tako razširjene funkcije spet imel obliko krivulje, vseboval pa bi tudi robno točko.



Zgled. Definirajmo funkcijo sgn : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (signum) s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \ x > 0, \\ 0 & ; \ x = 0, \\ -1 & ; \ x < 0. \end{cases}$$

Funkcija sgn nam pove, kakšen je predznak danega števila.



Z grafa funkcije sgn sklepamo, da ima funkcija limito povsod, razen v točki 0, kjer napravi skok. Formalno lahko to preverimo na naslednji način. Ko se z desne približujemo k točki 0, so vrednosti funkcije konstantno enake 1. Če bi limita L obstajala, bi torej morala biti enaka 1. Če sedaj narišemo nek pas med višinama $1-\epsilon$ in $1+\epsilon$, v tem pasu zagotovo ne bo ležal kos grafa levo od 0, če bo le $\epsilon < 2$.

Kljub temu, da funkcija sgn v točki 0 nima limite, pa je njeno obnašanje v okolici točke 0 vseeno dokaj lepo. Če se k točki 0 približujemo posebej samo z leve in pa posebej samo z desne, se vrednosti funkcije približujejo vsaka k svoji limitni vrednosti. To pomeni, da imata funkciji $\mathrm{sgn}|_{(-\infty,0]}$ in $\mathrm{sgn}|_{[0,\infty)}$ limiti v točki 0. Ti dve limiti označimo z

$$\lim_{x\to 0+} \mathrm{sgn}(x) = 1,$$
$$\lim_{x\to 0-} \mathrm{sgn}(x) = -1.$$

V zgornjem zgledu smo spoznali primer funkcije, ki v dani točki nima limite, čeprav se funkcija z vsake strani posebej približuje k neki limitni funkciji. V splošnem rečemo, da je L *desna limita* funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ v točki a, če je a stekališče množice $D\cap(a,\infty)$ in je L limita funkcije $f|_{D\cap(a,\infty)}$ v točki a. Desno limito označimo z

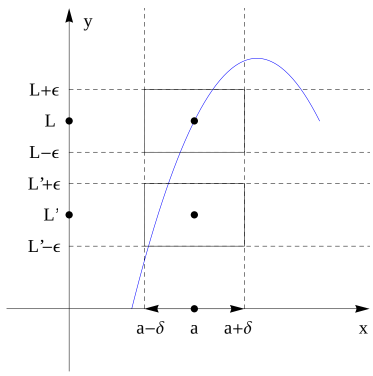
$$L = \lim_{x\to a+} f(x).$$

Število L *leva limita* funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ v točki a, če je a stekališče množice $D \cap (-\infty, a)$ in je L limita funkcije $f|_{D\cap(-\infty,a)}$ v točki a. Označimo jo z

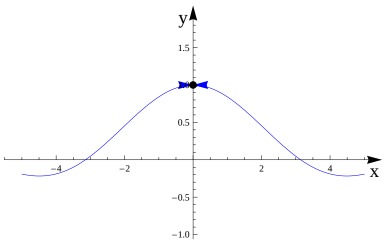
$$L = \lim_{x\to a-} f(x).$$

Če se vrednosti funkcije f v okolici točke a približujejo k neki limitni vrednosti L, se morajo k tej vrednosti približevati tako z leve kot z desne. To pomeni, da iz obstoja limite sledita tudi obstoja leve in desne limite, vse tri pa v tem primeru sovpadajo. Velja pa tudi obratno. Če je število L hkrati leva in desna limita funkcije f v točki a, je število L tudi limita funkcije f v točki a.

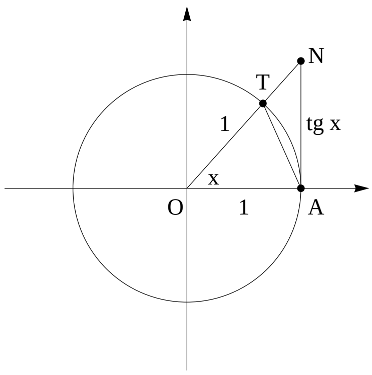
Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ ima v točki a lahko največ eno limito (levo,desno). Če bi namreč obstajali dve limiti L in L' funkcije f v točki a, bi lahko našli tako majhen ϵ, da bi bila ustrezna vodoravna pasova disjunktna. V tem primeru torej graf funkcije nad nobeno okolico točke a ne bi mogel hkrati ležati v obeh pasovih (da je to res, mora a biti stekališče domene).



Zgled. Poglejmo si še funkcijo $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Funkcija f je soda in definirana na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, z grafa pa vidimo, da bi jo lahko naravno razširili tudi skozi točko 0, če bi definirali $f(0) = 1$.



Pokažimo, da je $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Pomagali si bomo z geometrično definicijo trigonometričnih funkcij.



Ploščina trikotnika OAT je manjša od ploščine krožnega izseka OAT, ki pa je manjša od ploščine trikotnika OAN. Če upoštevamo, kolikšne so ploščine omenjenih treh likov, dobimo neenakosti

$$\frac{1\cdot 1\cdot \sin x}{2} \leq \frac{x}{2\pi}\cdot \pi \cdot 1^2 \leq \frac{1\cdot \operatorname{tg} x}{2}$$

oziroma

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x,$$

ki veljajo za vsak $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Desno neenakost lahko prepišemo v $x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$ oziroma $\cos x \leq \frac{\sin x}{x}$, levo pa v $\frac{\sin x}{x} \leq 1$. Obe skupaj povesta, da velja

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

za $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ko x pada proti 0, se vrednosti $\cos x$ približujejo k 1, saj je

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \leq \frac{x^2}{2}.$$

Od tod sklepamo, da je desna limita f v točki 0 enaka 1. Iz sodosti funkcije f pa potem sledi

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

Limito funkcije lahko okarakteriziramo tudi s pomočjo limit zaporedij. To dejstvo nam pride pogosto prav pri dokazovanju raznih izrekov o zveznosti funkcij.

Trditev 6. *Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija ene realne spremenljivke in a stekališče množice D. Potem je L limita funkcije f v a natanko takrat, ko za vsako zaporedje (x_n) v $D \setminus \{a\}$, ki konvergira k a, velja $L = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Naj bo L limita funkcije f v točki a. Vzemimo poljubno zaporedje (x_n) v $D \setminus \{a\}$, ki konvergira k a. Pokazati moramo, da potem zaporedje $(f(x_n))$ konvergira k L.

Izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Ker je $L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, obstaja $\delta > 0$, da za vsak $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (D \setminus \{a\})$ velja $|f(x) - L| < \epsilon$. Zaporedje (x_n) konvergira k a, zato lahko najdemo tak $N \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq N$ velja $x_n \in (a-\delta, a+\delta) \cap (D \setminus \{a\})$. Za $n \geq N$ potem velja $|f(x_n) - L| < \epsilon$, kar pomeni, da je L limita zaporedja $(f(x_n))$.

($\Longleftarrow$) V to smer bomo uporabili dokaz s protislovjem. Denimo, da za vsako zaporedje (x_n) v $D \setminus \{a\}$, ki konvergira k a, velja $L = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ in recimo, da L ni limita funkcije f v točki x.

Po definiciji limite lahko najdemo tak $\epsilon > 0$, da za poljuben $\delta > 0$ obstaja nek $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (D \setminus \{a\})$, za katerega je $|f(x) - L| \geq \epsilon$. Poglejmo sedaj zaporedoma okolice točke a pri $\delta_n = \frac{1}{n}$. Po predpostavki lahko potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ najdemo neko točko $x_n \in (a-\delta_n, a+\delta_n) \cap (D \setminus \{a\})$, za katero velja $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$. Tako lahko konstruiramo zaporedje (x_n), ki konvergira k točki a. Po predpostavki bi moralo veljati, da je $L = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, kar pa je v protislovju z dejstvom, da velja $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. □

V praksi lahko Trditev 6 uporabimo za računanje limit funkcij. Če namreč vemo, da ima funkcija f v točki a limito, jo lahko izračunamo, tako da najprej izberemo primerno zaporedje točk v domeni, ki konvergira k a, in nato pogledamo, kam konvergirajo vrednosti funkcije v točkah zaporedja. Če ne vemo, da limita funkcije obstaja, pa je dobljena limita zaporedja kandidat za limito, pokazati pa moramo še, da je res limita (kar pa ni zmeraj res).

Bolj abstraktno nam Trditev 6 omogoča, da že znane rezultate o limitah zaporedij uporabimo za dokaze podobnih trditev o limitah funkcij.

Trditev 7. *Naj bosta $f : D \to \mathbb{R}$ in $g : E \to \mathbb{R}$ funkciji ene realne spremenljivke in naj bo a stekališče množice $D \cap E$. Če imata funkciji f in g limiti v točki a, velja:*

(1) Funkcija $f + g$ ima limito v točki a in

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

(2) Funkcija $f \cdot g$ ima limito v točki a in

$$\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

(3) Če je $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, ima funkcija $\frac{f}{g}$ limito v točki a in

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

Dokaz. Dokaz teh pravil za računanje z limitami sledi neposredno iz Trditve 6 in pa iz podobnih pravil za računanje z limitami zaporedij. Poglejmo si na primer, kako se dokaže pravilo za računanje limite vsote dveh funkcij.

Funkcija $f+g$ je definirana na množici $D \cap E$. Naj bo a stekališče množice $D \cap E$ in privzemimo, da imata funkciji f in g limiti v točki a. Izberimo poljubno zaporedje (x_n) točk v $(D \cap E) \setminus \{a\}$, ki konvergira k a. Zaporedje (x_n) je vsebovano tako v $D \setminus \{a\}$ kot v $E \setminus \{a\}$, zato po Trditvi 6 velja

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to a} f(x),$$
$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Če uporabimo formulo za limito vsote dveh zaporedij, od tod dobimo

$$\lim_{n\to\infty} (f+g)(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

Ker je bilo (x_n) poljubno zaporedje, ki konvergira k a, po Trditvi 6 sledi

$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

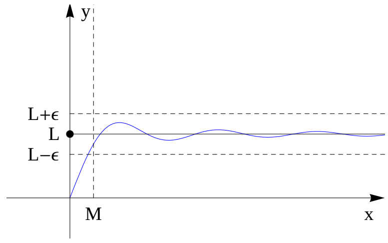
Formuli za produkt in kvocient lahko dokažemo na podoben način. Pri formuli za kvocient moramo dodatno še opaziti, da je a stekališče domene funkcije $\frac{f}{g}$. Ta je v splošnem podmnožica množice $D \cap E$, na kateri je g neničelna. Ker pa je limita funkcije g v točki a neničelna, je funkcija g neničelna na neki okolici točke a. □

Poleg obnašanja funkcije v okolici dane točke je zanimivo tudi obnašanje funkcije, ko x raste čez vse meje. Če ima graf funkcije kakšno vodoravno asimptoto, potem rečemo, da ima funkcija limito v neskončnosti. Formalno to definiramo na naslednji način.

Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija, katere domena je navzgor neomejena. Število L je limita funkcije f, ko gre x proti neskončnosti, če za poljuben $\epsilon > 0$ obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da za vsak $x \in (M, \infty) \cap D$ velja $|f(x) - L| < \epsilon$. Limito funkcije v neskončnosti označimo z

$$L = \lim_{x\to\infty} f(x).$$

Grafično limita funkcije v neskončnosti pomeni, da v poljubno majhnem vodoravnem pasu med višinama $L-\epsilon$ in $L+\epsilon$ leži graf funkcije f za vse x od nekega M naprej.



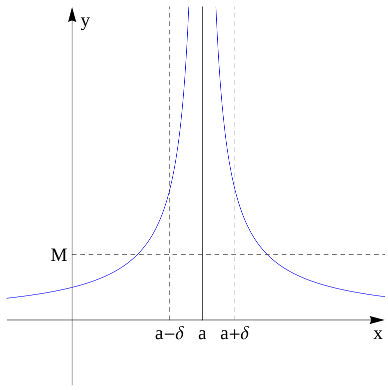
Če je domena D funkcije f navzdol neomejena, rečemo, da je L limita funkcije f, ko gre x proti minus neskončnosti, če za poljuben $\epsilon > 0$ obstaja tak $m \in \mathbb{R}$, da za vsak $x \in (-\infty, m) \cap D$ velja $|f(x) - L| < \epsilon$. To limito označimo z

$$L = \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

Tipični primeri singularnosti funkcij so poli, v katerih imajo funkcije navpične asimptote. Če je a stekališče domene D funkcije f, nam bo oznaka

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

pomenila, da za vsako (poljubno veliko) število $M \in \mathbb{R}$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (D \setminus \{a\})$ velja $f(x) \geq M$.



Funkcija f ima neskončno limito v točki a, če v okolici točke a raste čez vse meje. Lahko pa v okolici točke a tudi pada proti minus neskončnosti, kar označimo z

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Definiramo lahko tudi limite $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ za različne izbire parov predznakov.

Zveznost

Grafi večine funkcij, ki jih uporabljamo, imajo obliko nepretrgane krivulje. To pomeni, da funkcija točke, ki so blizu skupaj, spet preslika v vrednosti, ki so blizu skupaj. V matematičnem jeziku moramo seveda te pojme opredeliti bolj natančno.

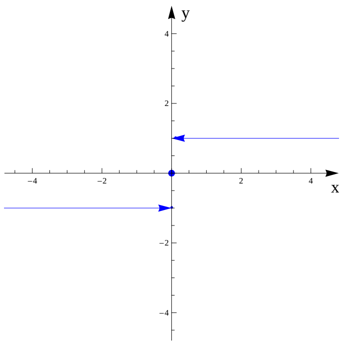
Definicija 8. *Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija ene realne spremenljivke.*

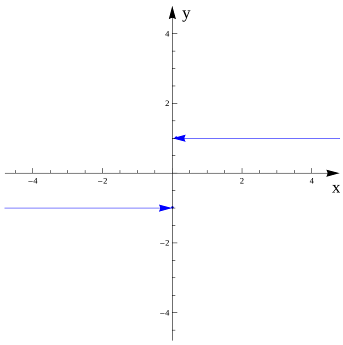
(1) Funkcija f je zvezna v točki $a \in D$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap D$ velja $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

(2) Funkcija f je zvezna, če je zvezna v vsaki točki $a \in D$.

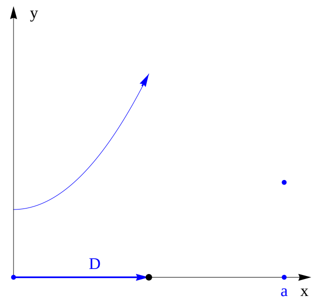
Definicija zveznosti funkcije v točki je skoraj na las podobna definiciji limite v točki. Funkcija f ima limito L v točki a, če se v okolici točke a vrednosti funkcije f približujejo k L. Točka a ne leži nujno v domeni funkcije, mora pa biti njeno stekališče. Če pa hočemo, da bo funkcija f zvezna v točki a, ni dovolj, da se vrednosti funkcije f v okolici točke a približujejo k nekemu poljubnemu L, pač pa k natanko določeni vrednosti funkcije f v točki a.

Spoznali smo že funkcijo sgn, ki je zvezna povsod razen v točki 0. V tej točki napravi skok, graf pa se nad njo pretrga. Na desni sliki je narisan graf funkcije $\text{sgn}|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$. Njen graf sestoji iz dveh kosov, ki sta oba nepretrgana. Ker smo točko 0 odstranili iz domene, je funkcija $\text{sgn}|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ zvezna.





V primeru, ko točka $a \in D$ ni stekališče domene D, o limiti funkcije f v točki a ne moremo govoriti, je pa v tem primeru pogoj o zveznosti avtomatično izpolnjen. Za dovolj majhne δ je namreč $(a-\delta, a+\delta) \cap D = \{a\}$, za $x = a$ pa zmeraj velja $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.



Zgornja opažanja lahko povzamemo v naslednji trditvi.

Trditev 9. *Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija ene realne spremenljivke in a poljubna točka v domeni D.*

(1) Če a ni stekališče množice D, je f zvezna v a.

(2) Če je a stekališče množice D, je f zvezna v a natanko takrat, ko je $f(a)$ limita funkcije f v točki a (to je $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$).

(3) Funkcija f je zvezna v a natanko takrat, ko za vsako zaporedje (x_n) v D, ki konvergira k a, velja $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Iz pravil za računanje z limitami in pa iz Trditve 9 takoj sledi:

Posledica 10. *Naj bosta $f : D \to \mathbb{R}$ in $g : E \to \mathbb{R}$ funkciji ene realne spremenljivke in $a \in D \cap E$. Če sta funkciji f in g zvezni v točki a, sta v točki a zvezni tudi funkciji $f + g$ in $f \cdot g$. Če je dodatno še $g(a) \neq 0$, je tudi funkcija $\frac{f}{g}$ zvezna v točki a.*

Z nekoliko več dela pa lahko pokažemo tudi:

Trditev 11. *Naj bosta $f : D \to \mathbb{R}$ in $g : E \to \mathbb{R}$ funkciji ene realne spremenljivke in $a \in g^{-1}(D)$. Če je funkcija g zvezna v točki a in je funkcija f zvezna v točki $g(a)$, je tudi funkcija $f \circ g$ zvezna v točki a.*

Dokaz. Pokazati moramo, da je funkcija $f \circ g$, ki je definirana na množici $g^{-1}(D)$, zvezna v točki a.

Pa izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Najti moramo tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap g^{-1}(D)$ velja

$$|f(g(a)) - f(g(x))| < \epsilon.$$

Ker je funkcija f zvezna v točki $g(a)$, lahko najdemo tak $\delta' > 0$, da za vsak $t \in (g(a) - \delta', g(a) + \delta') \cap D$ velja

$$|f(g(a)) - f(t)| < \epsilon.$$

Ker pa je funkcija g zvezna v točki a, obstaja tak $\delta > 0$, da za poljuben $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap E$ velja

$$|g(a) - g(x)| < \delta'.$$

Iz $g^{-1}(D) \subset E$, od tod sklepamo, da je za vsak $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap g^{-1}(D)$ točka $g(x)$ vsebovana v $(g(a) - \delta', g(a) + \delta') \cap D$. Če pišemo $t = g(x)$, torej dobimo

$$|f(g(a)) - f(g(x))| < \epsilon,$$

kar smo želeli pokazati. $\square$

Zgled. (1) Konstantna funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom $f(x) = \alpha$ za nek $\alpha \in \mathbb{R}$, je zvezna. Za poljubna $a, x \in D$ in za poljuben $\epsilon > 0$ je namreč

$$|f(x) - f(a)| = |\alpha - \alpha| = 0 < \epsilon.$$

V tem primeru je dober vsak $\delta > 0$. Ponavadi vzamemo kar $D = \mathbb{R}$.

(2) Linearna funkcija $f(x) = kx+n$ (k je lahko poljubno neničelno realno število, n pa poljubno realno število) je zvezna. Za domeno vzamemo kar vsa realna števila.

V tem primeru bo dokaz nekoliko daljši kot pri konstantni funkciji, hkrati pa tudi ne bo dober vsak $\delta > 0$. Dokažimo, da je funkcija f zvezna v točki $a \in \mathbb{R}$. Izberimo poljuben $\epsilon > 0$ in definirajmo $\delta = \frac{\epsilon}{|k|}$. Za $x \in (a - \delta, a + \delta)$ potem velja

$$|f(x) - f(a)| = |kx + n - (ka + n)| = |kx - ka| = |k||x - a| < |k|\delta = \epsilon.$$

(3) Zožitve zveznih funkcij so zvezne funkcije. Če je namreč funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ zvezna v točki $a \in D$ in je A poljubna podmnožica D, ki vsebuje a, je tudi funkcija $f|_A$ zvezna v točki a.

(4) Potenčna funkcija $f(x) = x^n$ je zvezna za poljuben $n \in \mathbb{N}$. Zapišemo jo lahko v obliki produkta

$$f = \underbrace{\mathrm{id} \cdot \mathrm{id} \cdot \ldots \cdot \mathrm{id}}_{n}$$

linearnih funkcij in uporabimo dejstvo, da je produkt zveznih funkcij zvezna funkcija.

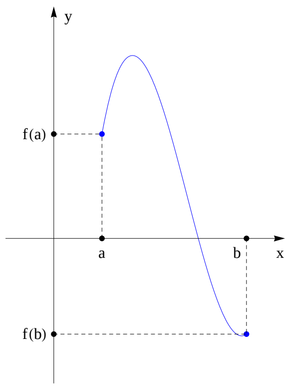
(5) Poljuben polinom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

je zvezen, saj je vsota produktov potenčnih funkcij in konstant.

(6) Racionalna funkcija $\frac{P(x)}{Q(x)}$ je kvocient dveh polinomov, zato je zvezna povsod, kjer je definirana.

V nadaljevanju bomo spoznali nekaj pomembnih in uporabnih lastnosti zveznih funkcij. Najprej si bomo pogledali izrek o obstoju ničel zveznih funkcij. Graf zvezne funkcije na nekem intervalu si geometrično predstavljamo kot neprekinjeno krivuljo.

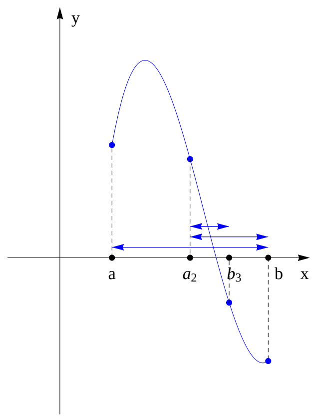


Če ima funkcija v krajiščih intervala nasprotno predznačeni vrednosti, bo torej graf funkcije moral povezati dve točki, ki ležita na različnih bregovih abscisne osi. Intuitivno se nam zdi jasno, da bo potem graf nekje moral sekati abscisno os, kar pa pomeni, da ima funkcija na danem intervalu ničlo. Formalno bomo to dejstvo dokazali v naslednji trditvi.

Trditev 12. *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in predpostavimo, da je $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potem obstaja vsaj ena točka $\xi \in (a, b)$, za katero velja, da je $f(\xi) = 0$.*

Dokaz. Trditev bomo dokazali s pomočjo bisekcije, ki je tudi sicer zelo uporabna metoda v numerični matematiki za približno iskanje ničel funkcij.

Ničlo funkcije f bomo poiskali z zaporednimi prepolovitvami induktivno definiranih intervalov, ki bodo vsi imeli lastnost, da so vrednosti funkcije f v njihovih krajiščih nasprotno predznačene. Izkazalo se bo, da je presek vseh teh intervalov ničla funkcije f.



Konstruirali bomo zaporedji (a_n) in (b_n) realnih števil, ki imata lastnosti:

· Zaporedje (a_n) je naraščajoče, zaporedje (b_n) pa padajoče.

· Za vse $n \in \mathbb{N}$ je $a \leq a_n < b_n \leq b$ in $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^{n-1}}$.

· Za vse $n \in \mathbb{N}$ je $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$.

Najprej definiramo $a_1 = a$ in $b_1 = b$. Pa denimo sedaj, da smo že definirali $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in $b_1, b_2, \ldots, b_n$, ki zadoščajo zgornjim lastnostim. Označimo $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Če je $f(c_n) = 0$, je $\xi = c_n$ ničla funkcije f na intervalu (a, b). Sicer pa definiramo:

1) $a_{n+1} = a_n$ in $b_{n+1} = c_n$, če je $f(c_n) \cdot f(a_n) < 0$.

2) $a_{n+1} = c_n$ in $b_{n+1} = b_n$, če je $f(c_n) \cdot f(b_n) < 0$.

Po konstrukciji je zaporedje (a_n) naraščajoče in navzgor omejeno z b, zato je konvergentno. Analogno sklepamo, da je konvergentno tudi zaporedje (b_n), saj je padajoče in navzdol omejeno z a.

Iz enakosti

$$\lim_{n\to\infty}(b_n) - \lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^{n-1}} = 0$$

sledi, da imata obe zaporedji isto limito, ki jo bomo označili z

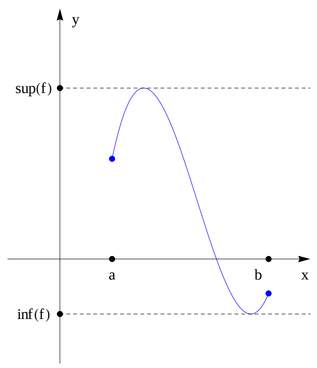
$$\xi = \lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n).$$

Za konec bomo pokazali, da je ξ ničla funkcije f. Pri tem bomo ključno uporabili dejstvo, da je funkcija f zvezna na intervalu $[a, b]$. Z uporabo Trditve 9 (3) dobimo

$$\begin{aligned} f(\xi)^2 = f(\xi)\cdot f(\xi) &= f\left(\lim_{n\to\infty}(a_n)\right)\cdot f\left(\lim_{n\to\infty}(b_n)\right), \\ &= \lim_{n\to\infty} f(a_n)\cdot \lim_{n\to\infty} f(b_n), \\ &= \lim_{n\to\infty} f(a_n)\cdot f(b_n). \end{aligned}$$

Ker za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $f(a_n)\cdot f(b_n) < 0$, je tudi $\lim_{n\to\infty} f(a_n)\cdot f(b_n) \leq 0$. Od tod sklepamo, da je $f(\xi)^2 = 0$ in posledično $f(\xi) = 0$. $\square$

Naslednji trditvi povesta, da je na končnem zaprtem intervalu vsaka zvezna funkcija omejena in da tam tudi doseže svoj minimum in maksimum.



Kasneje bomo v poglavju o odvodih funkcij spoznali metode za iskanje ekstremov odvedljivih funkcij.

Trditev 13. *Vsaka zvezna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je omejena.*

Dokaz. S pomočjo dokaza s protislovjem bomo pokazali, da je funkcija f navzgor omejena. Analogno lahko pokažemo tudi, da je navzdol omejena. Pokazali bomo, da bi neomejenost funkcije na intervalu $[a, b]$ implicirala, da je funkcija neomejena v okolici neke točke $\alpha \in [a, b]$, kar pa bi pomenilo, da ne more biti zvezna v tej točki.

Pa recimo, da funkcija f ni navzgor omejena. Potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ lahko najdemo tak $x_n \in [a, b]$, da velja $f(x_n) \geq n$. Tako dobljeno zaporedje

(x_n) je omejeno, zato ima vsaj eno stekališče $\alpha \in [a, b]$. Ker je funkcija f zvezna v točki α, lahko pri izbiri $\epsilon = 1$ najdemo tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \cap [a, b]$ velja

$$|f(x) - f(\alpha)| < 1.$$

Število α je stekališče zaporedja (x_n), zato lahko najdemo tak (dovolj velik) n, da je $x_n \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ in $n > f(\alpha) + 1$. Za $x = x_n$ potem velja

$$|f(x_n) - f(\alpha)| = f(x_n) - f(\alpha) \geq n - f(\alpha) > f(\alpha) + 1 - f(\alpha) = 1,$$

kar pa je v protislovju z $|f(x_n) - f(\alpha)| < 1$. Torej je funkcija f navzgor omejena. □

Trditev 14. *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Funkcija f potem na intervalu $[a, b]$ doseže svoj maksimum in svoj minimum. To pomeni, da obstajata točki $u, v \in [a, b]$, da za vsak $x \in [a, b]$ velja*

$$f(u) = \sup(f) \geq f(x),$$
$$f(v) = \inf(f) \leq f(x).$$

Dokaz. Dovolj je, če pokažemo, da zavzame funkcija f na intervalu $[a, b]$ svoj maksimum. Z uporabo tega rezultata na funkciji $-f$ potem lahko sklepamo, da f zavzame na $[a, b]$ tudi svoj minimum.

Vemo, da je funkcija f omejena. Označimo $M = \sup(f)$ in definirajmo zvezno, nenegativno funkcijo $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$g(x) = M - f(x).$$

Če ima funkcija g ničlo u, je $f(u) = M$, kar pa pomeni, da doseže funkcija f v točki u svoj maksimum.

Pa recimo, da funkcija g nima ničel. Tedaj je funkcija $h = \frac{1}{g}$ definirana povsod na $[a, b]$ in zvezna. Po Trditvi 13 je zato omejena, kar pomeni, da obstaja neko pozitivno realno število A, da velja $\frac{1}{g(x)} \leq A$ za vsak $x \in [a, b]$. Torej za vsak $x \in [a, b]$ velja

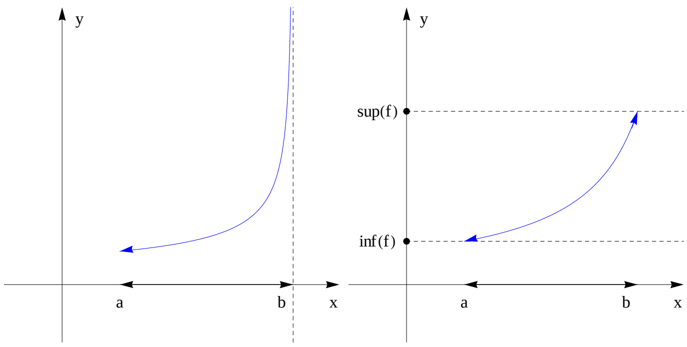
$$\frac{1}{M - f(x)} \leq A$$

oziroma

$$f(x) \leq M - \frac{1}{A}.$$

Od tod bi sledilo, da je $M - \frac{1}{A}$ zgornja meja funkcije f, kar pa je v protislovju z $M = \sup(f)$. To pomeni, da ima funkcija g ničlo u, v kateri pa funkcija f zavzame svoj maksimum. □

V obeh zgornjih trditvah je potrebno, da je funkcija f definirana na zaprtem intervalu $[a, b]$. Zvezna funkcija f, definirana na odprtem intervalu (a, b), je lahko neomejena (če ima na primer pol v enem izmed krajišč), lahko pa je omejena, a nikjer ne zavzame minimalne oziroma maksimalne vrednosti.



Poleg minimalne in maksimalne vrednosti zavzame zvezna funkcija na zaprtem intervalu tudi vse vrednosti med tema dvema ekstremoma.

Trditev 15. *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Za poljubno število $A \in [\inf(f), \sup(f)]$ obstaja vsaj en $x \in [a, b]$, za katerega je $f(x) = A$.*

Dokaz. Po Trditvi 14 obstajata $u, v \in [a, b]$, za katera velja $f(u) = \sup(f)$ in $f(v) = \inf(f)$. Če je $\inf(f) = \sup(f)$, je f konstantna funkcija in tedaj trditev avtomatično velja. Zato lahko predpostavimo, da je $\inf(f) \neq \sup(f)$ in $u \neq v$. Definirajmo zvezno funkcijo $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$g(x) = f(x) - A.$$

Če je $A \in \{\inf(f), \sup(f)\}$ enačbo $f(x) = A$ reši ali $x = u$ ali pa $x = v$. V nasprotnem pa velja $\inf(f) < A < \sup(f)$ in posledično

$$g(u) \cdot g(v) = (f(u) - A)(f(v) - A) = (\sup(f) - A)(\inf(f) - A) < 0.$$

Zožitev funkcije g na interval med točkama u in v je zvezna in ima v krajiščih intervala nasprotno predznačeni vrednosti, zato ima po Trditvi 12 funkcija g na intervalu med u in v ničlo x. To pomeni, da je $g(x) = 0$ oziroma $f(x) = A$. □

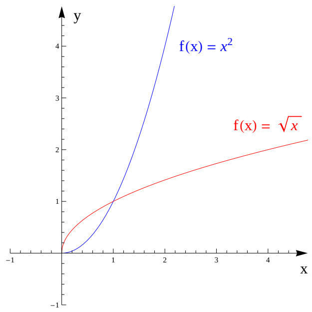
Zgornja trditev nam pove, da je za zvezno funkcijo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ enačba $f(x) = A$ rešljiva natanko takrat, ko je $A \in [\inf(f), \sup(f)]$. Natančne vrednosti ničel je praviloma težko poiskati, približne vrednosti pa lahko poljubno natančno poiščemo z metodo bisekcije.

Kot konkreten primer uporabe te trditve lahko dokažemo obstoj korenov nenegativnih realnih števil.

Posledica 16. *Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in A poljubno nenegativno realno število. Potem obstaja natanko eno nenegativno realno število x, za katero je $x^n = A$. Označimo ga z $x = \sqrt[n]{A}$.*

Dokaz. Potenčna funkcija $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, dana s predpisom $f(x) = x^n$, je zvezna, strogo naraščajoča in neomejena. Za poljubno nenegativno realno število A zato obstaja tak $M \in \mathbb{N}$, da je $M^n \geq A$. Ker funkcija f po Trditvi 15 na intervalu $[0, M]$ zavzame vse vrednosti med 0 in M^n, zagotovo obstaja tak $x \in [0, M] \subset [0, \infty)$, za katerega je $f(x) = A$. Ker pa je funkcija f strogo naraščajoča, je injektivna, zato je ta x enolično določen. $\square$

Potenčna funkcija $f(x) = x^n$ torej za vsak $n \in \mathbb{N}$ bijektivno preslika interval $[0, \infty)$ nazaj nase. Ker dobimo graf inverzne funkcije $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ z zrcaljenjem grafa funkcije f preko simetrale lihih kvadrantov, je tudi graf korenske funkcije nepretrgan.



Bolj splošno pa lahko dokažemo naslednjo trditev.

Trditev 17. *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna, strogo monotona funkcija. Potem je funkcija $f : [a, b] \to [\inf(f), \sup(f)]$ bijekcija, njen inverz f^{-1} pa je zvezna funkcija.*

Dokaz. Ker je f zvezna funkcija, po Trditvi 15 zavzame vse vrednosti med $\inf(f)$ in $\sup(f)$, zato je f surjektivna. Ker pa je f strogo monotona, je tudi injektivna. Torej je f bijekcija med intervaloma $[a, b]$ in $[\inf(f), \sup(f)]$.

Dokažimo sedaj, da je inverzna funkcija $f^{-1} : [\inf(f), \sup(f)] \to [a, b]$ tudi zvezna. Privzeli bomo, da je f strogo naraščajoča funkcija, analogen dokaz pa deluje tudi za strogo padajoče funkcije.

Izberimo poljubno točko $y_0 \in [\inf(f), \sup(f)]$ in poljuben $\epsilon > 0$. Ker je f bijekcija, obstaja natanko določen $x_0 \in [a, b]$, da je $f(x_0) = y_0$ oziroma $f^{-1}(y_0) = x_0$. V definiciji zveznosti so pomembni le majhni ϵ, zato lahko po potrebi ϵ zmanjšamo, da bo $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subset [a, b]$. Ker je f strogo naraščajoča, je tedaj

$$f(x_0 - \epsilon) < y_0 < f(x_0 + \epsilon).$$

Izberimo sedaj $\delta > 0$ tako majhen, da bo veljalo

$$(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon)).$$

Za poljuben $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ imamo potem verigo neenakosti

$$f(x_0 - \epsilon) < y < f(x_0 + \epsilon).$$

Sedaj bomo vse vrednosti v tej verigi preslikali s funkcijo f^{-1}, ki je tudi strogo naraščajoča (saj je f strogo naraščajoča):

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x_0 - \epsilon)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(x_0 + \epsilon)), \\ x_0 - \epsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \epsilon. \end{aligned}$$

Torej za vsak $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ velja

$$|f^{-1}(y) - x_0| < \epsilon$$

oziroma

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \epsilon,$$

kar pa pomeni, da je funkcija f^{-1} zvezna v točki y_0. $\square$

Zgled. (1) Potenčna funkcija $f(x) = x^n$ je zvezna za poljuben $n \in \mathbb{N}$. Zato je zvezen tudi njen inverz $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$.

(2) Kotne funkcije: Najprej pokažimo, da je zvezna funkcija $f(x) = \sin x$. Pokazali smo že, da za vsak $x > 0$ velja $\sin x < x$. Od tod lahko s pomočjo adicijskih izrekov izpeljemo, da za poljuben $h \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned} |f(x_0 + h) - f(x_0)| &= |\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)|, \\ &= \left|2\cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\right|, \\ &\leq 2\left|\sin\frac{h}{2}\right| \leq 2\left|\frac{h}{2}\right| = |h|. \end{aligned}$$

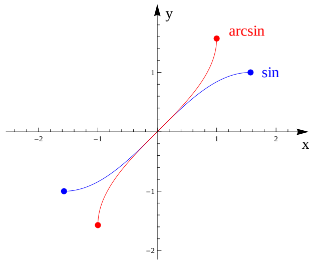
Sprememba vrednosti sinusne funkcije je manjša od spremembe argumenta, kar pomeni, da je sinusna funkcija zvezna. Kosinusno funkcijo dobimo kot kompozicijo $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ sinusne in pa linearne funkcije, funkciji tangens in kotangens pa kot kvocient sinusne in kosinusne funkcije. Iz rezultatov o zveznosti kompozitumov in kvocientov sledi, da so zvezne tudi funkcije

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, \\ f(x) &= \operatorname{tg} x, \\ f(x) &= \operatorname{ctg} x. \end{aligned}$$

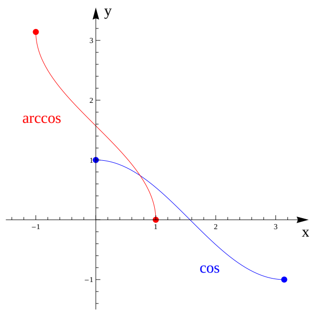
(3) Inverzne kotne (ciklometrične) funkcije: Kotne funkcije same po sebi niso bijektivne. Če pa njihovo definicijsko območje ustrezno zožamo, lahko dosežemo, da bodo na zmanjšani domeni strogo monotone. Inverzi zožitev kotnih funkcij so zvezni, označimo pa jih z

$$\arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arc\,tg} x \text{ in } \operatorname{arc\,ctg} x.$$

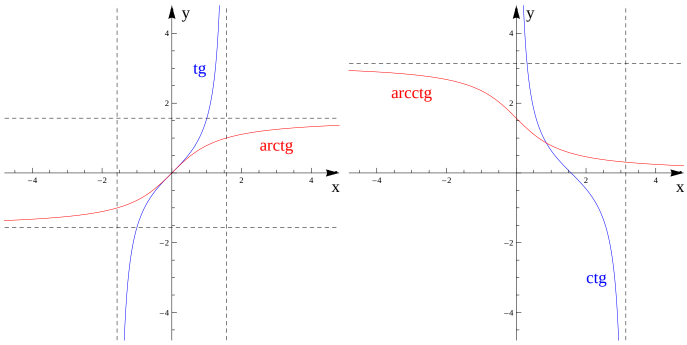
Funkciji sin domeno običajno zožimo na interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Na tem intervalu je sinusna funkcija strogo naraščajoča, njen inverz pa je po definiciji funkcija $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



Za funkcijo cos ponavadi vzamemo domeno $[0, \pi]$, na kateri je kosinusna funkcija strogo padajoča. Inverz te zožitve funkcije cos je po definiciji funkcija $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.



Poglejmo si še grafa funkcij arc tg in arc ctg.

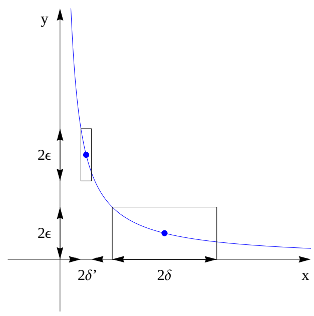


Za konec poglavja o zveznosti bomo spoznali še eno lastnost, ki jo imajo zvezne funkcije na zaprtem intervalu. Funkcija je zvezna, če točke, ki so blizu skupaj, preslika v bližnje vrednosti. Kvantitativno to opredelimo z (ϵ, δ)-okolicami. Število δ nam pove, kako natančno moramo aproksimirati dano točko, da bomo vrednost funkcije v njej aproksimirali ϵ-natančno. Razmerje med ϵ in δ je seveda odvisno od dane točke. Če je graf funkcije v okolici točke zelo strm, bo moral biti δ pri danem ϵ zelo majhen. Če pa je funkcija položna, ali kar konstantna, pa bodo dobri tudi večji δ. Če lahko pri danem

ϵ izberemo δ, ki bo dober za vse točke hkrati, bomo rekli, da je funkcija *enakomerno zvezna*.

Definicija 18. *Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je enakomerno zvezna, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za poljubna $x, y \in D$, za katera je $|x - y| < \delta$, velja $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

Zveznost funkcije smo definirali v vsaki točki posebej, medtem ko je lahko enakomerno zvezna le funkcija sama. Vsaka enakomerno zvezna funkcija je zvezna, primer funkcije, ki je zvezna, pa ni enakomerno zvezna, pa je funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $(0, \infty)$.



Ko se bližamo polu v $x = 0$, postaja graf funkcije vse bolj strm, kar pa pomeni, da bomo morali pri fiksnem ϵ izbirati čedalje manjše δ, da bomo graf funkcije f lahko zajeli v pravokotnik z višino 2ϵ.

V naslednji trditvi bomo pokazali, da se kaj takšnega ne more zgoditi, če je funkcija zvezna na zaprtem intervalu.

Trditev 19. *Vsaka zvezna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je enakomerno zvezna.*

Dokaz. Trditev bomo dokazali s pomočjo protislovja.

Pa denimo, da f ni enakomerno zvezna. Potem obstaja tak $\epsilon > 0$, da za vsak $\delta = \frac{1}{n}$ (ko n preteče vsa naravna števila) obstajata točki $x_n, y_n \in [a, b]$, da je $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ in

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon.$$

Zaporedje (x_n) je omejeno, zato ima vsaj eno stekališče $x \in [a, b]$. Ker je funkcija f zvezna v točki x, lahko najdemo tak $\delta > 0$, da za vsak $y \in [a, b]$, za katerega je $|x - y| < \delta$, velja $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$. Ker pa je x stekališče zaporedja (x_n), pa lahko najdemo $N \in \mathbb{N}$, da je $N \geq \frac{2}{\delta}$ in $|x - x_N| < \frac{\delta}{2}$. Za ta N potem velja

$$|x - y_N| = |(x - x_N) + (x_N - y_N)| \leq |x - x_N| + |x_N - y_N| < \frac{\delta}{2} + \frac{1}{N} \leq \delta.$$

Točki x_N in y_N sta torej obe oddaljeni za manj kot δ od x, zato iz zveznosti funkcije f v x sledi

$$|f(x) - f(x_N)| < \frac{\epsilon}{2},$$
$$|f(x) - f(y_N)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Če še enkrat uporabimo trikotniško neenakost, dobimo

$$|f(x_N) - f(y_N)| \leq |f(x_N) - f(x)| + |f(x) - f(y_N)| < \epsilon,$$

kar pa je protislovje z dejstvom, da je $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Eksponentna funkcija

Eksponentna funkcija $f(x) = a^x$ je podobna potenčni funkciji $f(x) = x^n$, le da se pri njej spreminja vrednost eksponenta, osnova pa je ves čas ista. Nekatere njene lastnosti in obliko njenega grafa spoznamo že v srednji šoli, vendar pa takrat verjetno nismo dovolj pozorni, da bi opazili, da niti ne poznamo njene natančne definicije za poljubno realno število. Takoj lahko definiramo 2^k za poljubno celo število k. Ko se naučimo koreniti, lahko definiramo tudi racionalne potence 2^q. Vprašanje pa je, katero število je na primer 2^π ali 2^r, kjer je r neko iracionalno število.

V tem poglavju bomo spoznali natančno definicijo eksponentne funkcije in nekatere njene dodatne lastnosti. Najprej se spomnimo definicijo potenc z naravnim eksponentom. Za poljuben $a \in \mathbb{R}$ in poljuben $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}.$$

Tako definirane potence zadoščajo enakostim:

$$a^n a^m = a^{n+m}, \tag{1}$$
$$a^n b^n = (ab)^n, \tag{2}$$
$$(a^n)^m = a^{nm}, \tag{3}$$

za poljubna $a, b \in \mathbb{R}$ in poljubna $m, n \in \mathbb{N}$. V nadaljevanju bomo pokazali, kako lahko definiramo potence s poljubnim realnim eksponentom, za katere bodo še vedno veljale zgornje enakosti.

Najprej bomo razširili definicijo potenc na cele eksponente. Če hočemo, da veljajo zgornje enakosti, mora pri izbiri $m = 0$ za za vsak $n \in \mathbb{N}$ veljati $a^n a^0 = a^{n+0} = a^n$. Od tod sklepamo, da za vsak $a \neq 0$ velja

$$a^0 = 1.$$

Naj bo sedaj k negativno celo število oblike $k = -n$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Potem mora za vsak $a \neq 0$ veljati $a^n a^k = a^{n-n} = a^0 = 1$ oziroma

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Na ta način smo definicijo potence neničelnega realnega števila razširili na vse cele eksponente.

V naslednjem koraku bomo definirali potence z racionalnimi eksponenti. Pri tem se bomo omejili samo na potence s pozitivno osnovo, pomagali pa si bomo s koreni. Za poljubna $a, b \in \mathbb{R}^+$ in poljubna $m, n \in \mathbb{N}$ lahko iz enakosti (1) – (3) izpeljemo, da za korene veljajo naslednje enakosti:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{a}\,\sqrt[m]{a} &= \sqrt[nm]{a^{n+m}},\\
\sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b},\\
\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \sqrt[nm]{a},\\
\sqrt[n]{a^m} &= \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.
\end{aligned}$$

Če želimo, da naša definicija potenc z racionalnim eksponentom zadošča lastnostim, ki smo jih našteli na začetku, mora za vsak $n \in \mathbb{N}$ in za vsak $a \in \mathbb{R}^+$ veljati $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^1 = a$, kar pa pomeni, da mora biti

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Naj bo sedaj r poljubno racionalno število. Zapišemo ga lahko v obliki $r = \frac{p}{q}$, kjer je $p \in \mathbb{Z}$ in $q \in \mathbb{N}$. Sedaj definirajmo

$$a^r = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p.$$

Preveriti moramo, da je definicija dobra (se pravi neodvisna od zapisa števila r v obliki ulomka). Pa recimo, da je $r = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$. Potem je

$$\left(\left(\sqrt[q]{a}\right)^p\right)^{qq'} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^{pqq'} = a^{pq'} = a^{p'q} = \left(\sqrt[q']{a}\right)^{p'qq'} = \left(\left(\sqrt[q']{a}\right)^{p'}\right)^{qq'}.$$

Ker je funkcija $f(x) = x^{qq'}$ injektivna, od tod sledi $(\sqrt[q]{a})^p = \left(\sqrt[q']{a}\right)^{p'}$, kar pomeni, da je definicija števila a^r dobra. Z upoštevanjem lastnosti računanja s koreni in pa potenciranjem z naravnimi števili lahko izpeljemo, da za poljubna $a, b \in \mathbb{R}^+$ in poljubna $r, s \in \mathbb{Q}$ veljajo enakosti:

$$\begin{aligned}
a^r a^s &= a^{r+s},\\
a^r b^r &= (ab)^r,\\
(a^r)^s &= a^{rs}.
\end{aligned}$$

Pri dosedaj obravnavanih konstrukcijah je za razumevanje zadoščalo že srednješolsko znanje. Če pa želimo definirati potence z realnimi eksponenti, pa moramo uporabiti pojme iz matematične analize, ki smo jih spoznali v poglavjih o zaporedjih in o zveznosti funkcij.

Zaenkrat smo za vsako pozitivno realno število a konstruirali funkcijo

$$\begin{aligned}
f &: \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\\
f(r) &= a^r.
\end{aligned}$$

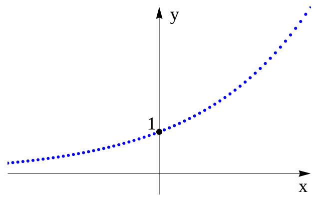
Funkcija f je monotona, in sicer:

· Če je $a = 1$, je f konstantna funkcija.

· Če je $a > 1$, je f strogo naraščajoča.

· Če je $a < 1$, je f strogo padajoča.

Graf funkcije f sicer ni nepretrgana črta, intuitivno pa si ga predstavljamo v smislu spodnje slike.



V resnici je slika malce zavajajoča, saj je množica racionalnih števil tako gosta v množici realnih števil, da bi s prostim očesom graf funkcije f kljub temu prepoznali kot nepretrgano črto. Kakorkoli že, v vsakem primeru se zdi verjetno, da bi funkcijo f lahko zvezno razširili na vsa realna števila. Najprej bomo pokazali, da je funkcija f z domeno $\mathbb{Q}$ zvezna.

Trditev 20. *Naj bo funkcija $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom $f(r) = a^r$, kjer je $a > 0$. Potem je funkcija f zvezna.*

Dokaz. Če je $a = 1$, je funkcija f konstantna in zato tudi zvezna. Privzemimo sedaj, da je $a > 1$. Pri dokazu bomo upoštevali, da za poljuben $a > 0$ velja

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

To limito lahko izračunamo, tako da pokažemo, da je zaporedje $(\sqrt[n]{a})$ monotono in omejeno z 1 za poljuben $a > 0$.

Najprej bomo pokazali, da je funkcija f zvezna v točki $r = 0$. Izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Z upoštevanjem zgornje limite lahko najdemo tak $N \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq N$ velja

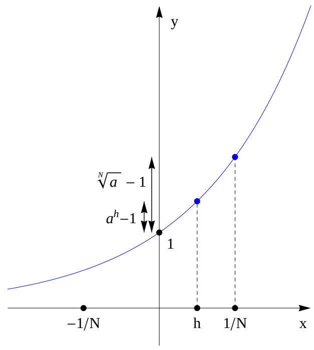
$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon,$$
$$\left|\sqrt[n]{\frac{1}{a}} - 1\right| < \epsilon.$$

Izberimo sedaj $\delta = \frac{1}{N}$. Ker je funkcija f monotono naraščajoča, za poljuben $h \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{N}]$ velja

$$|a^h - 1| \leq |a^{\frac{1}{N}} - 1| = |\sqrt[N]{a} - 1| < \epsilon.$$

Podobno lahko sklepamo, da za poljuben $h \in \mathbb{Q} \cap [-\frac{1}{N}, 0]$ velja

$$|a^h - 1| \leq |a^{-\frac{1}{N}} - 1| = \left|\sqrt[N]{\frac{1}{a}} - 1\right| < \epsilon.$$



Iz obeh neenakosti skupaj sklepamo, da za poljuben $h \in \mathbb{Q} \cap [-\delta, \delta]$ velja

$$|a^h - 1| < \epsilon,$$

kar pomeni, da je funkcija f zvezna v točki $r = 0$.

S pomočjo dejstva, da je funkcija f zvezna v točki $r = 0$, bomo sedaj dokazali, da je f zvezna v poljubni točki $r_0 \in \mathbb{Q}$. Izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Iz zveznosti f v $r = 0$ sledi, da lahko najdemo tak $\delta > 0$, da za vsak $h \in \mathbb{Q} \cap (-\delta, \delta)$ velja

$$|a^h - 1| < \frac{\epsilon}{a^{r_0}}.$$

Za vsak $h \in \mathbb{Q} \cap (-\delta, \delta)$ potem velja tudi

$$|a^{r_0+h} - a^{r_0}| = a^{r_0}|a^h - 1| < \frac{a^{r_0}\epsilon}{a^{r_0}} = \epsilon.$$

Če pišemo $r = r_0 + h$, smo torej pokazali, da za vsak $r \in \mathbb{Q} \cap (r_0 - \delta, r_0 + \delta)$ velja

$$|a^r - a^{r_0}| < \epsilon,$$

kar pa pomeni, da je f zvezna v $r = r_0$.

Ostane nam še primer, ko je $0 < a < 1$. V tem primeru lahko pišemo

$$f(r) = a^r = \left(\frac{1}{a}\right)^{-r}.$$

Funkcijo f smo zapisali kot kompozicijo linearne funkcije in pa eksponentne funkcije z osnovo $\frac{1}{a} > 1$, ki sta obe zvezni. Torej je tudi f zvezna funkcija. □

V zgornji trditvi smo pokazali, da je eksponentna funkcija racionalne spremenljivke zvezna funkcija. Če upoštevamo karakterizacijo zveznosti s pomočjo zaporedij iz Trditve 9, vidimo, da obstaja pravzaprav samo en način, kako lahko eksponentno funkcijo zvezno razširimo na vsa realna števila. Za poljubno realno število x najprej izberemo neko zaporedje (r_n) racionalnih števil, ki konvergira k x. Če hočemo, da bo eksponentna funkcija zvezna, mora potem veljati

$$a^x = \lim_{n \to \infty} (a^{r_n}).$$

Na tem mestu se nam lahko potencialno pojavi nekaj problemov. Najprej moramo preveriti, da je zaporedje na desni sploh konvergentno, nato pa še pokazati, da je definicija potence a^x neodvisna od izbire zaporedja (r_n), ki konvergira k x.

Trditev 21. *Naj bo $a > 0$.*

(1) Če je (r_n) zaporedje racionalnih števil, ki konvergira k $x \in \mathbb{R}$, je tudi zaporedje (a^{r_n}) konvergentno.

(2) Če sta (r_n) in (s_n) zaporedji racionalnih števil, ki obe konvergirata k istemu $x \in \mathbb{R}$, potem je

$$\lim_{n\to\infty}(a^{r_n}) = \lim_{n\to\infty}(a^{s_n}).$$

Dokaz. Trditev bomo dokazali za primer $a > 1$. Za $a < 1$ je dokaz podoben, v primeru $a = 1$ pa nimamo kaj dokazovati.

(1) Pokazali bomo, da je zaporedje (a^{r_n}) Cauchyjevo, od koder bo sledilo, da je konvergentno. Zaporedje (r_n) je konvergentno, zato je omejeno. Naj bo $M \in \mathbb{Q}$ zgornja meja zaporedja (r_n). Izberimo sedaj poljuben $\epsilon > 0$. Ker je funkcija $f(r) = a^r$ zvezna v $r = 0$, obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $h \in \mathbb{Q} \cap (-\delta, \delta)$ velja

$$|a^h - 1| < \frac{\epsilon}{a^M}.$$

Ker pa je zaporedje (r_n) Cauchyjevo, lahko najdemo tak $N \in \mathbb{N}$, da za vsaka $m, n \geq N$ velja $|r_m - r_n| < \delta$. Če pišemo $h = r_m - r_n$, torej za vsaka $m, n \geq N$ velja

$$|a^{r_m} - a^{r_n}| = |a^{r_n}(a^{r_m - r_n} - 1)| = a^{r_n}|a^{r_m - r_n} - 1| < a^M \frac{\epsilon}{a^M} = \epsilon,$$

kar pa pomeni, da je zaporedje (a^{r_n}) Cauchyjevo.

(2) Po predpostavki konvergirata (r_n) in (s_n) k istemu številu, zato je

$$\lim_{n\to\infty}(r_n - s_n) = 0.$$

Ker je eksponentna funkcija racionalne spremenljivke zvezna, je torej

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n - s_n} = 1,$$

od tod pa dobimo

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n - s_n} \cdot a^{s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n - s_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n},$$

kar smo želeli dokazati. □

Sedaj lahko definiramo potence s poljubnim realnim eksponentom.

Definicija 22. *Za poljubna $a > 0$ in $x \in \mathbb{R}$ definiramo*

$$a^x = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n}),$$

kjer je (r_n) poljubno zaporedje racionalnih števil, ki konvergira k x.

Trditev 23. *Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom $f(x) = a^x$, je za vsak $a > 0$ pozitivna, monotona in zvezna. Funkcija f je strogo naraščajoča za $a > 1$, konstantna za $a = 1$ in strogo padajoča za $0 < a < 1$. Poleg tega za poljubna $a, b > 0$ in poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ veljajo enakosti:*

(1) $a^x a^y = a^{x+y}$,

(2) $a^x b^x = (ab)^x$,

(3) $(a^x)^y = a^{xy}$.

Dokaz. Najprej dokažimo enakosti (1) in (2). Pri tem bomo upoštevali, da ti dve enakosti veljata za racionalne eksponente. Izberimo zaporedji (r_n) in (s_n) racionalnih števil, ki konvergirata k x oziroma y.

(1) Zaporedje $(r_n + s_n)$ konvergira k $x + y$, zato je

$$a^{x+y} = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n+s_n}) = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n} \cdot a^{s_n}) = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n}) \cdot \lim_{n\to\infty} (a^{s_n}) = a^x a^y.$$

(2) Podoben račun nam dokaže tudi ta primer

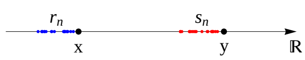
$$(ab)^x = \lim_{n\to\infty} ((ab)^{r_n}) = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n} \cdot b^{r_n}) = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n}) \cdot \lim_{n\to\infty} (b^{r_n}) = a^x b^x.$$

Dokažimo sedaj, da je funkcija f pozitivna, strogo monotona in zvezna. Dokazali bomo primer $a > 1$, dokaz v primeru $0 < a < 1$ pa je podoben.

Pozitivnost: Naj bo $x \in \mathbb{R}$ in (r_n) poljubno zaporedje racionalnih števil, ki konvergira k x. Zaporedje (r_n) je potem navzdol omejeno z nekim $m \in \mathbb{Q}$, od koder sledi, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a^{r_n} \geq a^m$. Torej je

$$a^x = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n}) \geq a^m > 0.$$

Stroga monotonost: Naj bosta $x < y$ realni števili. Potem lahko najdemo takšni naraščajoči zaporedji (r_n) in (s_n) racionalnih števil, ki konvergirata k x oziroma y, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $r_n < x < s_n < y$.



Ker je funkcija $f_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, dana s predpisom $f_{\mathbb{Q}}(r) = a^r$, strogo naraščajoča, imamo za vsak $n \in \mathbb{N}$ neenakosti

$$a^{r_n} \leq a^x < a^{s_n} \leq a^y,$$

od koder sledi, da je f strogo naraščajoča.

Zveznost: Dokaz je podoben kot dokaz zveznosti funkcije $f_{\mathbb{Q}}$. Zveznost funkcije f v točki $x = 0$ sledi iz zveznosti $f_{\mathbb{Q}}$ in iz monotonosti f.

Pokažimo še, da je f zvezna v poljubni točki $x_0 \in \mathbb{R}$. Izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Ker je f zvezna v $x = 0$, lahko najdemo tak $\delta > 0$, da za vsak $h \in (-\delta, \delta)$ velja
$$|a^h - 1| < \frac{\epsilon}{a^{x_0}}.$$

Torej za vsak $h \in (-\delta, \delta)$ velja tudi

$$|a^{x_0+h} - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^h - 1| < \frac{a^{x_0}\epsilon}{a^{r_0}} = \epsilon.$$

Za konec nam ostane še enakost (3). Za dokaz te enakosti se bomo morali malo bolj potruditi. Najprej privzemimo, da je $y \in \mathbb{Q}$. Potem je

$$(a^x)^y = \left(\lim_{n\to\infty}(a^{r_n})\right)^y \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty}((a^{r_n})^y) = \lim_{n\to\infty}(a^{r_n\cdot y}) = a^{xy}.$$

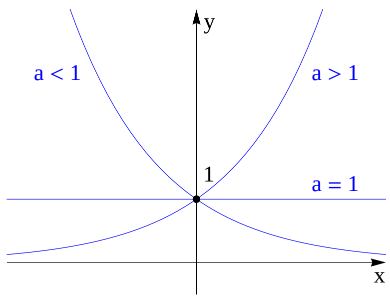
V $(*)$ smo upoštevali, da je potenčna funkcija $t \mapsto t^y$ zvezna. Zato lahko po Trditvi 9 zamenjamo vrstni red aplikacije funkcije in pa računanja limite.

Naj bo sedaj $y \in \mathbb{R}$ poljuben. Potem je

$$(a^x)^y = \lim_{n\to\infty}((a^x)^{s_n}) \overset{(\cdot)}{=} \lim_{n\to\infty}(a^{x\cdot s_n}) \overset{(\cdot\cdot)}{=} a^{\lim\limits_{n\to\infty}(x\cdot s_n)} = a^{xy}.$$

Tukaj smo v $(\cdot)$ upoštevali, da smo formulo $(a^x)^y = a^{xy}$ ravnokar že dokazali za $y \in \mathbb{Q}$, v $(\cdot\cdot)$ pa smo upoštevali zveznost funkcije $t \mapsto a^t$. $\square$

Funkciji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dani s predpisom $f(x) = a^x$ za nek $a > 0$, rečemo *eksponentna funkcija z osnovo a*. Obliko njenega grafa že poznamo.



Logaritemska funkcija

Eksponentna funkcija z osnovo $a \neq 1$ je strogo monotona in zato injektivna. Če je $a > 1$, je

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0,$$

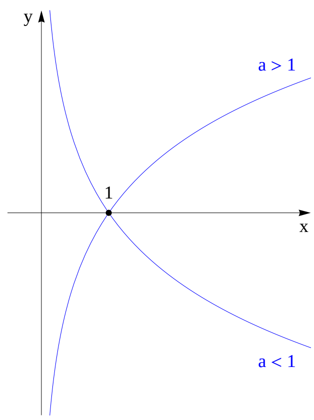
v primeru $0 < a < 1$ pa se ti dve limiti ravno zamenjata. Zaradi zveznosti in stroge monotonosti zavzame eksponentna funkcija po Trditvi 15 vse vrednosti na intervalu $(0, \infty)$, vsako natanko enkrat. Strnimo ta opažanja v naslednji trditvi.

Trditev 24. *Naj bo $a \in \mathbb{R}^+$ in $a \neq 1$. Tedaj za vsak $A \in \mathbb{R}^+$ obstaja natanko en $x \in \mathbb{R}$, za katerega je $a^x = A$. Označimo ga z $x = \log_a A$.*

Eksponentna funkcija $x \mapsto a^x$ je torej bijekcija med množico realnih števil in pa intervalom $(0, \infty)$. Inverzna funkcija

$$\begin{aligned} \log_a &: (0, \infty) \to \mathbb{R}, \\ \log_a &: x \mapsto \log_a x, \end{aligned}$$

je zato tudi bijekcija in je zvezna po Trditvi 17. Rečemo ji *logaritemska funkcija z osnovo a*. Njen graf dobimo z zrcaljenjem grafa eksponentne funkcije preko simetrale lihih kvadrantov.



Trditev 25 (Osnovne računske lastnosti logaritmov)**.** *Za poljuben $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, in za poljubna $x, y \in \mathbb{R}^+$ veljajo enakosti:*

(1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$,

(2) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$,

(3) $\log_a(x^y) = y \log_a x$.

Dokaz. V dokazu bomo večkrat uporabili dejstvo, da je po definiciji $\log_a x$ enolično določeno število, za katero je

$$a^{\log_a x} = x.$$

(1) Računajmo

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy = a^{\log_a (xy)}.$$

Ker je eksponentna funkcija injektivna, od tod sledi

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

(2) Ta enakost sledi iz analogne formule kot v primeru (1)

$$a^{\log_a x - \log_a y} = a^{\log_a x} a^{-\log_a y} = \frac{x}{y} = a^{\log_a \left(\frac{x}{y}\right)}.$$

(3) V tem primeru imamo

$$a^{y \log_a x} = (a^{\log_a x})^y = x^y = a^{\log_a (x^y)}.$$

□

Pri računanju nam pogosto pride prav tudi zveza, ki povezuje logaritme z različnimi osnovami. Naj bosta $a, b > 0$ različna od 1. Za vsak $x \in \mathbb{R}^+$ potem velja

$$x = a^{\log_a x} = b^{\log_b x} = (a^{\log_a b})^{\log_b x} = a^{(\log_a b)(\log_b x)}.$$

Torej je $\log_a x = (\log_a b)(\log_b x)$, čemur ponavadi rečemo *formula za prehod na novo osnovo* in jo zapišemo v obliki

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Najpogosteje uporabljamo osnovi $a = e$ in $a = 10$,

$\ln x = \log_e x$	naravni logaritem,
$\log_{10} x$	Briggsov logaritem,

v računalništvu pa so pogosti tudi logaritmi z osnovo $a = 2$. V oznakah osnovo včasih kar spustimo, zato moramo biti previdni, saj lahko oznaka $\log x$ včasih pomeni $\ln x$, včasih pa $\log_{10} x$.

Potenčna funkcija

V poglavju o eksponentni funkciji smo definirali izraz a^b za vsak $a \in \mathbb{R}^+$ in za vsak $b \in \mathbb{R}$. Če namesto eksponenta spreminjamo osnovo potence, dobimo *potenčno funkcijo*

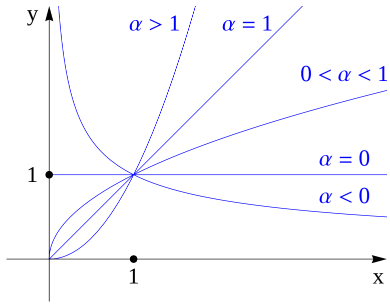
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x^\alpha, \end{aligned}$$

za poljuben fiksen $\alpha \in \mathbb{R}$. Ker je

$$x^\alpha = e^{\ln(x^\alpha)} = e^{\alpha \ln x},$$

lahko potenčno funkcijo zapišemo v obliki kompozituma logaritemske in eksponentne funkcije, kar pomeni, da je zvezna.

Poglejmo si še grafe potenčnih funkcij pri različnih eksponentih.

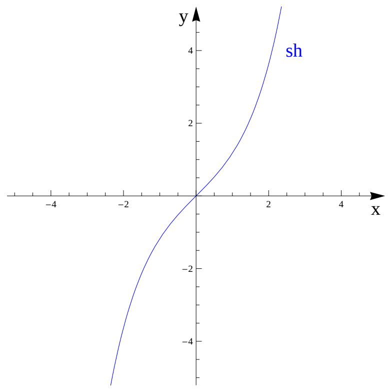


Hiperbolične funkcije

V hiperbolični geometriji igrajo ključno vlogo hiperbolične funkcije. Izrazimo jih sicer lahko z eksponentno funkcijo, kljub temu pa imajo zaradi pomembnosti svoje ime. Hiperbolični sinus je definiran s predpisom

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

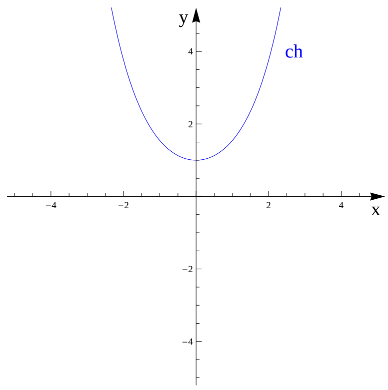
Hiperbolični sinus $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zvezna, liha, strogo naraščajoča bijekcija.



Podobno definiramo hiperbolični kosinus

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

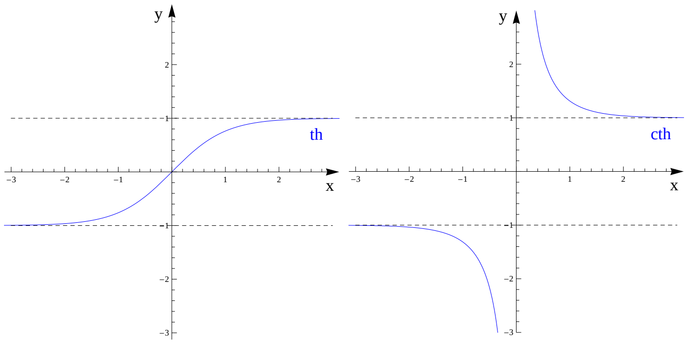
ki je zvezna soda funkcija.



Z deljenjem teh dveh funkcij dobimo hiperbolični tangens in kotangens

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},$$
$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Hiperbolični tangens je zvezna, liha bijekcija $\operatorname{th} : \mathbb{R} \to (-1, 1)$, medtem ko je hiperbolični kotangens bijekcija $\operatorname{cth} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.



Med hiperboličnimi funkcijami veljajo zveze:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$
$$1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$
$$1 - \operatorname{cth}^2 x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Poleg teh imamo še adicijske izreke:

$$\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x,$$
$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{th}(x + y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y},$$
$$\operatorname{cth}(x + y) = \frac{1 + \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x + \operatorname{cth} y}$$

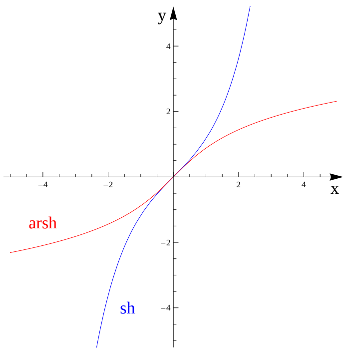
in pa od tod izpeljane formule za dvojne kote.

Area funkcije

Area funkcije so inverzne funkcije hiperboličnih funkcij. Funkcija area sinus je inverz hiperboličnega sinusa, zato je zvezna, liha in strogo naraščajoča bijekcija $\operatorname{arsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Izrazimo jo lahko eksplicitno s predpisom

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

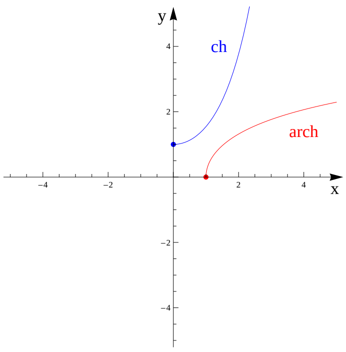
za poljuben $x \in \mathbb{R}$.



Za glavno vejo funkcije ch ponavadi vzamemo domeno $[0, \infty)$, kjer je funkcija ch injektivna. Njen inverz je funkcija arch : $[1, \infty) \to [0, \infty)$, definirana s predpisom

$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

za $x \geq 1$.



Area tangens je zvezna, liha, strogo naraščajoča bijekcija arth : $(-1, 1) \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

za $|x| < 1$. Podobno dobimo funkcijo area kotangens, ki je zvezna bijekcija arcth : $(-\infty, -1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, definirana s predpisom

$$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}$$

za $|x| > 1$.