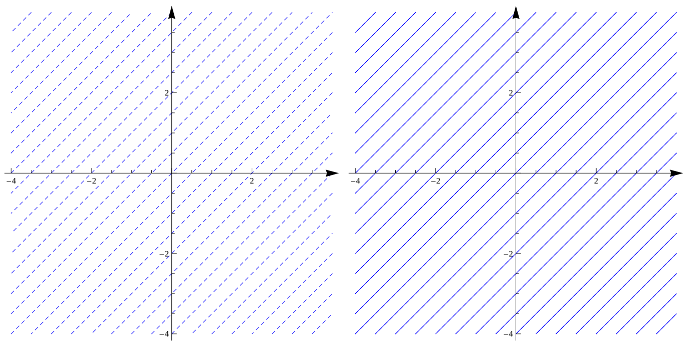
Nedoločeni integral

V tem razdelku si bomo pogledali operacijo, ki je na nek način inverzna odvajanju. Za dano funkcijo bomo poskušali poiskati neko drugo funkcijo, katere odvod bo ravno dana funkcija.

Nekatere fizikalne zglede verjetno že poznamo, ne da bi se dejansko zavedali, da v ozadju stoji integriranje. Pri študiju enakomerno pospešenega gibanja ali pa pri obravnavi gibanja pri poševnem metu znamo natanko opisati, kako se spreminja položaj točke. V obeh primerih dobimo rešitev z dvakratnim integriranjem pospeška (ki je v omenjenih primerih konstanten). Bolj splošno lahko v preprostih primerih iz klasične mehanike gibanje sistemov določimo z integriranjem ustreznih funkcij, ki nastopajo v Newtonovem zakonu, v bolj kompliciranih primerih pa je treba rešiti diferencialno enačb.

V splošnem je integriranje precej težje kot odvajanje, zato si v praksi pomagamo z računalniki, ki nam omogočajo numerično integracijo funkcij in diferencialnih enačb.

Za motivacijo si poglejmo še geometrijsko interpretacijo nedoločenega integrala. Vemo že, da nam odvod funkcije pove, kakšen je njen naklon v dani točki. Če torej hočemo dano funkcijo integrirati, moramo poiskati neko drugo funkcijo, ki ima v vsaki točki predpisan naklon. Takšna funkcija ni ena sama, saj lahko s prištetjem poljubne konstante dobimo neko drugo funkcijo, ki ima v vsaki točki isti naklon. Če želimo, da je naklon funkcije konstanten, že vemo, da temu pogoju ustrezajo linearne funkcije.



V bolj kompliciranih primerih si lahko mislimo, da dana funkcija določa neko polje silnic, naša naloga pa je, da poiščemo družino funkcij, katerih grafi se dotikajo polja silnic. Iskanje trajektorij mehanskih sistemov večinoma temelji na tem geometrijskem principu, le da se stvari dogajajo v višjih dimenzijah.

Definicija 1. *Naj bo $f : D^{odp} \to \mathbb{R}$ funkcija. Funkcija $F : D^{odp} \to \mathbb{R}$ je primitivna funkcija funkcije f, če je odvedljiva in če velja $F' = f$.*

Trditev 2. *Če sta F in G dve primitivni funkciji funkcije $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, je $F - G$ konstantna funkcija.*

Dokaz. Po predpostavki je

$$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0.$$

Iz razdelka o odvodu že vemo, da je funkcija, ki ima ničeln odvod na intervalu (a, b), konstantna. Torej obstaja konstanta C, da je $F(x) = G(x) + C$ za poljuben $x \in (a, b)$. $\square$

Če je funkcija f v zgornji trditvi namesto na intervalu (a, b) definirana na odprti množici D, funkcija $F - G$ ni nujno konstantna, ampak samo lokalno konstantna na D.

Dve primitivni funkciji neke dane funkcije se torej razlikujeta kvečjemu za lokalno konstantno funkcijo. Ker pa je odvod lokalno konstantne funkcije enak nič, lahko primitivni funkciji prištejemo poljubno lokalno konstantno funkcijo, pa bomo spet dobili primitivno funkcijo.

Trditev 3. *Naj bo F primitivna funkcija funkcije $f : D^{odp} \to \mathbb{R}$. Za poljubno lokalno konstantno funkcijo $C : D^{odp} \to \mathbb{R}$ je potem tudi funkcija $F + C$ primitivna funkcija funkcije f.*

Če ima funkcija f kakšno primitivno funkcijo, jih ima torej neskončno, parametriziramo pa jih lahko z množico vseh lokalno konstantnih funkcij. Množico vseh primitivnih funkcij funkcije f imenujemo *nedoločeni integral* funkcije f in jo označimo z

$$\int f(x)\, dx.$$

Naš cilj pri integriranju funkcij se tako zreducira na iskanje ene same primitivne funkcije dane funkcije f. Če nam jo uspe najti, rezultat zapišemo v obliki

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C,$$

kjer je F neka konkretna primitivna funkcija funkcije f, C pa poljubna lokalno konstantna funkcija.

Pri računanju nedoločenih integralov si pomagamo z raznimi metodami oziroma algoritmi. S pomočjo našega predznanja o odvodih elementarnih funkcij lahko takoj napišemo tabelo elementarnih integralov, ki se jih velja zapomniti na pamet. Za integriranje bolj kompliciranih funkcij lahko nato uporabimo metodo integracije po delih ali pa si pomagamo z uvedbo nove spremenljivke. V splošnem je to vse, kar imamo na razpolago, res pa je, da obstajajo posebni algoritmi za integracijo racionalnih, iracionalnih, eksponentnih in pa kotnih funkcij. Če kakšne funkcije ne znamo integrirati analitično (kar se zgodi dokaj pogosto), lahko vsaj približno izračunamo integral z numeričnimi metodami.

Najprej si poglejmo tabelo nedoločenih integralov, ki jo lahko prepišemo neposredno iz tabele odvodov.

Zgled (Tabela elementarnih integralov)**.**

$$1)\ \int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \qquad r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$2)\ \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad a \in (0,\infty) \setminus \{1\},$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$3)\ \int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$4)\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

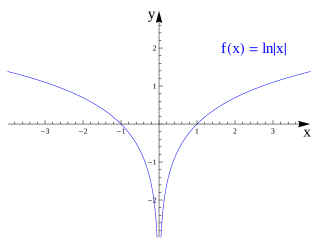
$$5)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

$$6)\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C,$$

$$7)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C, \qquad a > 0,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C, \qquad a > 0.$$

Pravilnost vseh teh integralov lahko preverimo z odvajanjem, malce bolj podrobno pa si poglejmo samo integral funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$. Iz razdelka o odvodu že vemo, da za $x > 0$ velja $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Ker naravni logaritem ni definiran za negativna realna števila, si poglejmo funkcijo $F(x) = \ln|x|$, katere domena je odprta množica $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.



Na intervalu $(-\infty, 0)$ je $F(x) = \ln(-x)$, zato je tam

$$F'(x) = \frac{1}{(-x)} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}.$$

To pomeni, da je F primitivna funkcija funkcije f na odprti množici $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, zato je

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Ker je v tem primeru množica $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ unija intervalov $(-\infty, 0)$ in $(0, \infty)$, je lokalno konstantna funkcija C oblike

$$C = \begin{cases} C_1 & ;\ x < 0, \\ C_2 & ;\ x > 0, \end{cases}$$

kjer sta C_1 in C_2 poljubni konstanti.

Situacija je podobna tudi v primerih 4) in 7), kjer je treba upoštevati, da domene funkcij niso intervali.

V večini primerov želimo seveda integrirati funkcijo, ki je ni v zgornji tabeli. Pri tem nam je v pomoč nekaj pravil za integriranje. Dobili jih bomo, tako da bomo pravila za odvod vsote, produkta in pa kompozituma prebrali v obratni smeri.

Trditev 4 (Linearnost nedoločenega integrala)**.** *Če imata $f, g : D^{odp} \to \mathbb{R}$ primitivni funkciji, potem ima za poljubna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tudi funkcija $\alpha f + \beta g$ primitivno funkcijo in velja*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx.$$

Dokaz. Dokazi pri trditvah o integralih so praviloma lažji kot pri podobnih trditvah o odvodih. Če sta F in G primitivni funkciji funkcij f oziroma g, potem iz enakosti

$$(\alpha F + \beta G)' = \alpha f + \beta g$$

sledi, da je $\alpha F + \beta G$ primitivna funkcija funkcije $\alpha f + \beta g$. Od tod sledi tudi linearnost nedoločenega integrala. □

Zgled. Iz linearnosti nedoločenega integrala sledi, da je nedoločeni integral polinoma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ enak

$$\begin{aligned} \int P(x)\, dx &= a_n \int x^n\, dx + a_{n-1} \int x^{n-1}\, dx + \ldots + a_1 \int x\, dx + a_0 \int 1\, dx, \\ &= a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + C. \end{aligned}$$

Primitivna funkcija polinoma stopnje n je polinom stopnje $n+1$ (določen do prostega člena natančno).

Iz formule za odvod produkta

$$(fg)' = f'g + fg'$$

lahko izpeljemo pravilo za integracijo po delih oziroma 'per partes'.

Trditev 5 (Integracija po delih)**.** *Naj bosta $f, g : D^{odp} \to \mathbb{R}$ dve odvedljivi funkciji. Če ima funkcija $f'g$ primitivno funkcijo, potem ima tudi funkcija fg' primitivno funkcijo in velja*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Dokaz. Za dokaz enakosti iz trditve je dovolj pokazati, da sta odvoda leve in desne strani enaka. Odvod leve strani enakosti je po definiciji nedoločenega integrala enak

$$\left(\int f(x)g'(x)\,dx\right)' = f(x)g'(x).$$

Po drugi strani pa iz pravila za odvod produkta sledi

$$\begin{aligned}\left(f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx\right)' &= (f(x)g(x))' - f'(x)g(x),\\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x),\\ &= f(x)g'(x).\end{aligned}$$

□

Pravilo za integracijo po delih pogosto pišemo v obliki z diferenciali

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Pri tem uporabljamo oznake $u = f(x)$, $v = g(x)$, $du = f'(x)dx$ in pa $dv = g'(x)dx$. Če želimo uporabiti pravilo integracije po delih, moramo torej integrand zapisati v obliki $u\,dv$. Intuicijo, kaj se splača vzeti za u in kaj za dv, si pridobimo z integracijsko prakso, ponavadi pa se pri izbiri u in dv ravnamo po načelu:

· $u \ldots$ funkcija, ki se pri odvajanju poenostavi.
· $dv \ldots$ izraz, ki ga znamo integrirati.

Tipični primeri funkcij, ki jih lahko integriramo po delih, so produkti polinomov s kotnimi, eksponentnimi in logaritemskimi funkcijami. Seveda pa lahko s to metodo rešimo tudi kakšen bolj kompliciran integral.

Zgled.

(1) $\displaystyle\int x^n \ln x\,dx$:

Vzemimo $u = \ln x$ in $dv = x^n\,dx$. Potem sledi $du = \frac{dx}{x}$ in $v = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. Ker potrebujemo nek konkreten v, lahko zaradi enostavnosti izberemo $C = 0$. Tako dobimo

$$\begin{aligned}\int x^n \ln x\,dx &= \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \int \frac{x^n}{n+1}\,dx,\\ &= \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C,\\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C.\end{aligned}$$

Zgornji izračun je veljaven za vse $n \neq -1$. V primeru $n = -1$ lahko integral izračunamo z uvedbo nove spremenljivke, še posebej pa izpostavimo primer $n = 0$, ki nam pove, da je integral logaritemske funkcije enak

$$\int \ln x\,dx = x\,(\ln x - 1) + C.$$

(2) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$:

V tem primeru znamo obe funkciji tako integrirati kot odvajati. Se pa linearna funkcija pri odvajanju poenostavi, zato bomo raje vzeli $u = x$ in $dv = \sin x\,dx$, kar nam da $du = dx$ in $v = -\cos x$. Sledi

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

(3) $\displaystyle\int x^2 e^x\,dx$:

V tem primeru bomo dvakrat uporabili pravilo integracije po delih. Obakrat bomo odvajali polinom, integrirali pa eksponentno funkcijo:

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x\,dx &= x^2 e^x - \int 2xe^x\,dx,\\ &= x^2 e^x - \left(2xe^x - \int 2e^x\,dx\right),\\ &= e^x(x^2 - 2x + 2) + C.\end{aligned}$$

Zadnje pravilo, ki ga bomo obravnavali, je formula za uvedbo nove spremenljivke v nedoločeni integral. Formalno je to analog verižnega pravila pri odvajanju.

Trditev 6 (Uvedba nove spremenljivke)**.** *Če je $F : D^{odp} \to \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ in je $g : E^{odp} \to D$ odvedljiva funkcija, potem ima tudi funkcija $(f \circ g) \cdot g'$ primitivno funkcijo in sicer*

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C.$$

Dokaz. Z uporabo verižnega pravila dobimo, da je odvod desne strani enakosti enak

$$(F(g(x)) + C)' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x),$$

in je torej enak odvodu leve strani. □

Intuitivno si lahko predstavljamo, da nam funkcija g določa zamenjavo koordinat (bolj bo to jasno, ko bomo spoznali integrale funkcij večih spremenljivk). Če uvedemo novo spremenljivko $t = g(x)$, je potem $dt = g'(x)dx$, enakost iz trditve pa se prepiše v

$$\int f(t)\,dt = F(t) + C.$$

Enakost iz trditve ni nič drugega kot definicija nedoločenega integrala, pogledana v ustreznih koordinatah. Če sumimo, da bi lahko dano funkcijo integrirali z uvedbo nove spremenljivke, najprej pogledamo, kako izgleda funkcija v novih koordinatah. Če znamo, dobljeno funkcijo integriramo, rezultat pa na koncu prepišemo v prvotnih koordinatah. Podobno kot pri integraciji po delih pa moramo tudi pri uvedbi nove spremenljivke najprej sami rešiti nekaj primerov, da dobimo dober občutek.

Zgled.

(1) $\underline{\int \frac{dx}{x-a}}$:

Ta integral bi sicer lahko kar uganili, formalno pa ga izračunamo z uvedbo nove spremenljivke $t = x - a$, kar nam da $dt = dx$. Sledi

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x-a| + C.$$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2}$:

Uvedimo novo spremenljivko $t = \frac{x}{a}$. Potem je $dt = \frac{dx}{a}$ in

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a^2+x^2} &= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}(t) + C,\\ &= \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{a}\right) + C.\end{aligned}$$

Zgornji rezultat je veljaven za $a \neq 0$. V primeru $a = 0$ pa že vemo, da je

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$$

Vidimo, da je odvisnost nedoločenega integrala od parametra a precej nestabilna v okolici vrednosti $a = 0$. Če vrednost le malo spremenimo, se nedoločeni integral precej spremeni.

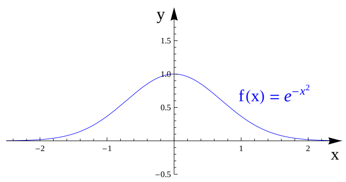
(3) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\, dx$:

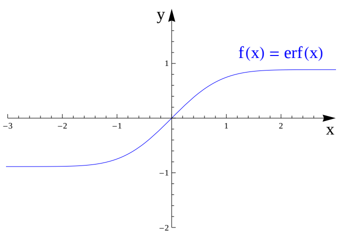
Tokrat vzemimo $t = \cos x$, kar nam da $dt = -\sin x\, dx$. Dobimo

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Domena funkcije tangens je neskončna unija odprtih intervalov, zato je lokalno konstantna funkcija C v tem primeru določena s števno družino konstant $\{C_k\}$ (po eno za vsak interval).

Pravila, ki smo jih spoznali do zdaj, so bolj ali manj vse, s čimer si lahko v splošnem pomagamo pri integraciji funkcij. Čeprav v tem trenutku to morda še ni razvidno, je integriranje precej težje kot odvajanje. Kasneje bomo pokazali, da ima vsaka zvezna funkcija primitivno funkcijo, kljub temu pa večine funkcij ne znamo integrirati z analitičnimi metodami. Najbolj znan primer je Gaussova funkcija $f(x) = e^{-x^2}$, katere primitivne funkcije ne moremo izraziti z elementarnimi funkcijami. Zaradi njene pomembnosti pa ustrezen večkratnik primitivne funkcije Gaussove funkcije označimo z erf in ji rečemo 'Gaussova funkcija napake'.





V nadaljevanju razdelka si bomo pogledali nekaj razredov funkcij, ki jih lahko integriramo s pomočjo znanih algoritmov.

Integrali racionalnih funkcij

Racionalne funkcije lahko v principu vedno integriramo, je pa lahko to dokaj hitro precej zamudno početje.

(I) Integrali tipa $\int \frac{A\,dx}{(x-a)^k}$

V tem primeru je k poljubno naravno število, a pa poljubno realno število. Ločimo primera $k = 1$ in pa $k \geq 2$, ki ju lahko oba izračunamo z uvedbo nove spremenljivke $t = x - a$, da dobimo

$$\begin{aligned}
\int \frac{A\,dx}{(x-a)^k} &= -\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C, \quad k \geq 2, \\
\int \frac{A\,dx}{x-a} &= A \ln|x-a| + C.
\end{aligned}$$

(II) Integrali tipa $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$

Predpostavimo sedaj, da je imenovalec racionalne funkcije nerazcepen kvadratni polinom $Q(x) = x^2 + px + q$. To pomeni, da je $D = p^2 - 4q < 0$. Zapišimo najprej imenovalec Q v temenski obliki

$$\begin{aligned}
x^2 + px + q &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q, \\
&= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}, \\
&= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{-D}{4}, \\
&= t^2 + k^2,
\end{aligned}$$

kjer smo uvedli oznaki

$$\begin{aligned}
k &= \sqrt{\frac{4q - p^2}{4}}, \\
t &= x + \frac{p}{2}.
\end{aligned}$$

Z uvedbo nove spremenljivke v integral dobimo

$$\begin{aligned}
\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}\,dx &= \int \frac{Mt - \frac{p}{2}M + N}{t^2 + k^2}\,dt, \\
&= M \int \frac{t\,dt}{t^2 + k^2} + \left(N - \frac{p}{2}M\right) \int \frac{dt}{t^2 + k^2}.
\end{aligned}$$

Spomnimo se, da je desni integral enak

$$\left(N - \frac{p}{2}M\right) \int \frac{dt}{t^2 + k^2} = \left(N - \frac{p}{2}M\right) \frac{1}{k} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t}{k}\right) + C,$$

medtem ko lahko levi integral izračunamo z uvedbo $s = t^2 + k^2$ ($ds = 2t\,dt$), ki nam da

$$M \int \frac{t\,dt}{t^2 + k^2} = \frac{M}{2} \int \frac{ds}{s} = \frac{M}{2} \ln |s| + C.$$

Rezultat je torej enak

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}\,dx = \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2N - pM}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}\right) + C.$$

Te formule se seveda nima smisla učiti na pamet, splača pa se zapomniti glavne ideje v izpeljavi rezultata.

(III) Integral splošne racionalne funkcije $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$

Za integracijo bolj kompliciranih racionalnih funkcij imamo na voljo dva postopka. Lahko jih s pomočjo razcepa na parcialne ulomke prevedemo na bolj preproste funkcije in nato integriramo vsak del posebej, lahko pa uporabimo nastavek.

1. korak: V vsakem primeru moramo najprej števec in imenovalec zdeliti in nato racionalno funkcijo zapisati v obliki

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Pri tem je S kvocient polinomov P in Q, R pa ostanek pri deljenju P s Q, kar pomeni, da je stopnja polinoma R manjša od polinoma stopnje Q. Tako dobimo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int S(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx.$$

Polinom S že znamo integrirati, racionalno funkcijo $\frac{R}{Q}$, ki ima števec nižje stopnje kot imenovalec, pa integriramo po postopku, ki ga bomo spoznali v nadaljevanju.

2. korak: Pomagali si bomo z osnovnim izrekom algebre, ki pove, da lahko vsak polinom zapišemo kot produkt linearnih funkcij s kompleksnimi koeficienti. Posledica tega je, da lahko vsak realen polinom razcepimo kot produkt linearnih in pa nerazcepnih kvadratnih členov (obojih z realnimi koeficienti). To pomeni, da lahko števec Q razcepimo v obliki

$$Q(x) = A(x - x_1)^{\alpha_1} \cdots (x - x_n)^{\alpha_n} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + p_m x + q_m)^{\beta_m},$$

kjer so $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ različne realne ničle polinoma Q, a_k stopnja ničle x_k, polinomi $x^2 + p_l x + q_l$ pa so nerazcepni kvadratni realni polinomi. Na tem koraku se nam že lahko pojavijo prve težave, saj je v splošnem polinome težko razcepiti. V odvisnosti od oblike razcepa imamo sedaj na voljo dva postopka. Oba sicer zmeraj delujeta, ponavadi pa se splača ravnati po naslednjem načelu. Če ima polinom Q samo linearne faktorje ali pa kvečjemu kvadratne faktorje na prvo potenco, poskusimo z razcepom na parcialne ulomke. Če ima Q kvadratne faktorje na višje potence, poskusimo racionalno funkcijo integrirati s pomočjo nastavka.

Razcep na parcialne ulomke

Recimo, da je $m = 0$, kar pomeni, da polinom Q nima nerazcepnih kvadratnih faktorjev in je torej oblike

$$Q(x) = A(x - x_1)^{\alpha_1} \cdots (x - x_n)^{\alpha_n}.$$

Racionalno funkcijo $\frac{R(x)}{Q(x)}$ lahko potem zapišemo kot vsoto parcialnih ulomkov oblike

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{Q(x)} = &\frac{A_{11}}{(x-x_1)} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}} + \\ &+ \frac{A_{21}}{(x-x_2)} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2\alpha_2}}{(x-x_2)^{\alpha_2}} + \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{A_{n1}}{(x-x_n)} + \frac{A_{n2}}{(x-x_n)^2} + \cdots + \frac{A_{n\alpha_n}}{(x-x_n)^{\alpha_n}}.\end{aligned}$$

Brez dokaza omenimo, da zmeraj obstajajo enolično določene konstante $\{A_{ij}\}$, ki zadoščajo zgornji enakosti. Izračunamo pa jih lahko, tako da damo desno stran na skupni imenovalec, nato pa primerjamo števca leve in desne strani. Pri tem dobimo sistem linearnih enačb, ki se ga da enolično rešiti. Ko nam uspe racionalno funkcijo razcepiti na parcialne ulomke, lahko zapišemo

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)}\, dx = \int \frac{A_{11}}{x - x_1}\, dx + \cdots + \int \frac{A_{n\alpha_n}}{(x - x_n)^{\alpha_n}}\, dx.$$

Integrale na desni smo že izračunali v (I), kar pomeni, da v principu znamo integrirati racionalne funkcije, katerih števci razpadejo na linearne faktorje. Lahko pa to opravilo postane dokaj zamudno, če moramo integrale računati na roke.

Če ima racionalna funkcija $\frac{R(x)}{Q(x)}$ v imenovalcu tudi nerazcepne kvadratne faktorje, lahko uporabimo podobno shemo, le da moramo dodati še analogne sumande za kvadratne faktorje, konstante A_{ij} v števcih pa zamenjamo z linearnimi členi $B_{ij}x + C_{ij}$.

Zgled.

$$\int \frac{4x+1}{(x+1)^2(x-2)}\,dx:$$

V tem primeru je racionalna funkcija takšne oblike, da deljenje ni potrebno, prav tako pa je imenovalec že zapisan v obliki produkta linearnih členov.

Razcepimo najprej dano funkcijo na parcialne ulomke

$$\begin{aligned}
\frac{4x+1}{(x+1)^2(x-2)} &= \frac{A_{11}}{x+1} + \frac{A_{12}}{(x+1)^2} + \frac{A_{21}}{x-2},\\
&= \frac{A_{11}(x+1)(x-2) + A_{12}(x-2) + A_{21}(x+1)^2}{(x+1)^2(x-2)},\\
&= \frac{x^2(A_{11}+A_{21}) + x(-A_{11}+A_{12}+2A_{21}) + (-2A_{11}-2A_{12}+A_{21})}{(x+1)^2(x-2)}.
\end{aligned}$$

S primerjavo koeficientov polinomov v števcu pridemo do sistema treh enačb za tri neznanke:

$$\begin{aligned}
A_{11} + A_{21} &= 0,\\
-A_{11} + A_{12} + 2A_{21} &= 4,\\
-2A_{11} - 2A_{12} + A_{21} &= 1.
\end{aligned}$$

Sistematično rešujemo sisteme linearnih enačb z Gaussovim algoritmom, ki ga bomo spoznali v drugem semestru. Če pa neznank ni prav veliko, pa lahko sisteme rešujemo tudi z zaporedno eliminacijo spremenljivk. V našem primeru dobimo rešitev $A_{11} = -1$, $A_{12} = 1$ in $A_{21} = 1$. Sledi

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x+1}{(x+1)^2(x-2)}\,dx &= -\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int \frac{dx}{x-2},\\
&= -\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + \ln|x-2| + C.
\end{aligned}$$

Integracija s pomočjo nastavka

Kot smo videli v dosedanjih primerih, dobimo pri integraciji racionalnih funkcij kot rezultat neko kombinacijo racionalnih funkcij, logaritmov in pa funkcije $\operatorname{arc\,tg}$. V splošnem uporabimo to idejo, da uganemo obliko rešitve do konstant natančno, nato pa z odvajanjem in reševanjem sistema enačb še poračunamo te konstante.

Naj bo kot prej

$$Q(x) = A(x-x_1)^{\alpha_1}\cdots(x-x_n)^{\alpha_n}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+p_mx+q_m)^{\beta_m}.$$

Nedoločeni integral $\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$ potem izračunamo s pomočjo nastavka

$$\begin{aligned}\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx = &\frac{A_s x^s + A_{s-1}x^{s-1} + \cdots + A_1 x + A_0}{(x-x_1)^{\alpha_1-1}\cdots(x-x_n)^{\alpha_n-1}\cdots(x^2+p_m x+q_m)^{\beta_m-1}} + \\ &+ B_1 \ln|x-x_1| + \cdots + B_n \ln|x-x_n| + \\ &+ C_1 \ln(x^2+p_1x+q_1) + \cdots + C_m \ln(x^2+p_mx+q_m) + \\ &+ D_1 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+p_1}{\sqrt{-D_1}}\right) + \cdots + D_m \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+p_m}{\sqrt{-D_m}}\right) + C.\end{aligned}$$

Pri tem je

$$s = (\alpha_1 - 1) + \cdots + (\alpha_n - 1) + 2(\beta_1 - 1) + \cdots + 2(\beta_m - 1) - 1,$$

kar pomeni, da ima polinom v števcu racionalne funkcije v nastavku za ena manjšo stopnjo kot polinom v imenovalcu. V nastavku dobimo od vsakega linearnega faktorja polinoma Q po en logaritem, od vsakega kvadratnega faktorja pa po en logaritem in po en arc tg. Izkaže se, da je integral poljubne racionalne funkcije takšne oblike, seveda pri primernih vrednostih konstant $A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_n, C_1, \ldots, C_m, D_1, \ldots, D_m$.

Te konstante izračunamo, tako da desno stran najprej odvajamo, dobljeni odvod izenačimo z $\frac{R(x)}{Q(x)}$ in nato rešimo sistem enačb.

Zgled.

(1) $\underline{\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}}$:

Deljenje in faktorizacija tudi v tem primeru nista potrebna. Glede na naše oznake je $n = 0$, $m = 1$ in $\beta_1 = 2$, zato bomo uporabili nastavek

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + D\ln(1+x^2) + E \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x}{\sqrt{4}}\right) + C.$$

Če konstant ni veliko, jih ponavadi označimo kar s črkami z začetka abecede. Z odvajanjem zgornje enakosti dobimo

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x^2)^2} &= \frac{A(x^2+1) - 2x(Ax+B)}{(1+x^2)^2} + \frac{2Dx}{1+x^2} + \frac{E}{1+x^2}, \\ &= \frac{-Ax^2 + A - 2Bx + 2Dx(1+x^2) + E(1+x^2)}{(1+x^2)^2}, \\ &= \frac{x^3(2D) + x^2(-A+E) + x(-2B+2D) + (A+E)}{(1+x^2)^2}.\end{aligned}$$

Dobimo sistem štirih enačb za štiri neznanke:

$$\begin{aligned}2D &= 0, \\ -A+E &= 0, \\ -2B+2D &= 0, \\ A+E &= 1,\end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$, $D = 0$ in $E = \frac{1}{2}$. Sledi

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C.$$

$$(2) \underline{\int \frac{2x^3+7x^2+8x+4}{(x^2+2x+2)^2}\,dx:}$$

Tokrat uporabimo nastavek

$$\int \frac{2x^3+7x^2+8x+4}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + D\ln(x^2+2x+2) + E\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+2}{2}\right) + C.$$

Z odvajanjem zgornje enakosti dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{2x^3+7x^2+8x+4}{(x^2+2x+2)^2} &= \frac{A(x^2+2x+2)-(Ax+B)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{D(2x+2)}{x^2+2x+2} + \frac{E}{x^2+2x+2}, \\
&= \frac{A(x^2+2x+2)-(Ax+B)(2x+2)+(D(2x+2)+E)(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}, \\
&= \frac{x^3(2D)+x^2(-A+6D+E)+x(-2B+8D+2E)+2(A-B+2D+E)}{(x^2+2x+2)^2}.
\end{aligned}$$

Od tod dobimo sistem štirih enačb za štiri neznanke:

$$\begin{aligned}
2D &= 2, \\
-A+6D+E &= 7, \\
-2B+8D+2E &= 8, \\
2A-2B+4D+2E &= 4,
\end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 0$, $B = 1$, $D = 1$ in $E = 1$. Sledi

$$\int \frac{2x^3+7x^2+8x+4}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = \frac{1}{x^2+2x+2} + \ln(x^2+2x+2) + \operatorname{arc\,tg}(x+1) + C.$$

Integrali nekaterih iracionalnih funkcij

Izmed iracionalnih funkcij se bomo omejili na takšne, ki imajo v imenovalcu kvadratni koren kvadratnega polinoma. Takšne funkcije se pogosto pojavijo pri integraciji enačb gibanja fizikalnih sistemov z eno prostostno stopnjo.

(I) Integrali tipa $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$

Integrand $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}}$ je definiran, kjer je kvadratni polinom x^2+px+q pozitiven. Če je le-ta nerazcepen, je to povsod, sicer pa sestoji domena funkcije f iz dveh polneskončnih intervalov. Podobno kot pri integraciji racionalnih funkcij tudi tukaj najprej zapišimo

$$\begin{aligned} x^2+px+q &= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}, \\ &= t^2+h, \end{aligned}$$

kjer je $h=\frac{4q-p^2}{4}$ in $t=x+\frac{p}{2}$. Če je $h=0$, je izraz pod korenom popoln kvadrat, zato nas bo bolj zanimal primer $h\neq 0$. Iz tabele nedoločenih integralov v tem primeru preberemo, da je

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} &= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+h}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2+h}\right|+C, \\ &= \ln\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right|+C. \end{aligned}$$

(II) Integrali tipa $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}}$

V tem primeru ima kvadratni polinom pod korenom negativno predznačen vodilni člen, zato bo integrand definiran kvečjemu na enem intervalu, če bo diskriminanta kvadratnega polinoma pozitivna. Rezultat bo precej drugačen kot v prejšnjem primeru.

Predpostavimo, da je $D=p^2+4q>0$ in pišimo

$$\begin{aligned} -x^2+px+q &= -\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+\frac{p^2+4q}{4}, \\ &= -\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+e^2, \\ &= e^2(1-t^2), \end{aligned}$$

kjer je $e=\sqrt{\frac{p^2+4q}{4}}$ in $t=\frac{x-\frac{p}{2}}{e}$. Od tod dobimo

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}} &= \int \frac{e\,dt}{\sqrt{e^2(1-t^2)}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \\ &= \arcsin t + C = \arcsin\left(\frac{2x-p}{2e}\right)+C, \\ &= \arcsin\left(\frac{2x-p}{\sqrt{p^2+4q}}\right)+C. \end{aligned}$$

(III) Integrali tipa $\int \frac{P(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Za konec si poglejmo še malo bolj splošen primer, ko je P polinom stopnje $n\geq 1$. Ta integral lahko izračunamo s pomočjo nastavka

$$\int \frac{P(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+K\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

kjer je Q nek polinom stopnje $n-1$, K pa konstanta. Koeficiente polinoma Q in pa vrednost konstante K dobimo z odvajanjem zgornje enakosti in pa z reševanjem tako dobljenega sistema linearnih enačb. Nato nam še preostane, da izračunamo integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Ta integral lahko prevedemo na enega izmed že obravnavanih integralov. Če je $a>0$, izpod korena izpostavimo a, če pa je $a<0$, pa $|a|=-a$. V primeru $a=0$ je člen pod korenom linearen, integral pa lahko izračunamo z uvedbo nove spremenljivke $t=bx+c$.

Zgled.

$\underline{\int \sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx :}$

Integral najprej prepišemo v obliko

$$\int \sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx = \int \frac{\alpha^2-x^2}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}\,dx,$$

ki nam omogoča, da uporabimo nastavek. V tem primeru se nastavek glasi

$$\int \frac{\alpha^2-x^2}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}\,dx = (Ax+B)\sqrt{\alpha^2-x^2} + K\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}.$$

Z odvajanjem te enakosti dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha^2-x^2}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} &= A\sqrt{\alpha^2-x^2} + \frac{(Ax+B)(-2x)}{2\sqrt{\alpha^2-x^2}} + \frac{K}{\sqrt{\alpha^2-x^2}},\\
&= \frac{A(\alpha^2-x^2)-x(Ax+B)+K}{\sqrt{\alpha^2-x^2}},\\
&= \frac{x^2(-2A)+x(-B)+(A\alpha^2+K)}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}
\end{aligned}$$

S primerjavo koeficientov polinomov v števcu pridemo do sistema treh enačb za tri neznanke

$$\begin{aligned}
-2A &= -1,\\
-B &= 0,\\
A\alpha^2+K &= \alpha^2,
\end{aligned}$$

ki ima rešitev $A=\frac{1}{2}$, $B=0$ in $K=\frac{1}{2}\alpha^2$. V primeru (II) smo že izračunali, da je

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{\alpha}\right)+C.$$

Rezultat se torej glasi

$$\int \sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{\alpha^2-x^2} + \frac{1}{2}\alpha^2\arcsin\left(\frac{x}{\alpha}\right)+C.$$

Integrali nekaterih kotnih funkcij

Za konec si poglejmo še nekaj enostavnih zgledov integralov kotnih funkcij.

(I) Integrali tipa $\int \sin^m x\,dx$ in $\int \cos^m x\,dx$

Izračunali bomo samo integral potence funkcije sinus. Podobno idejo lahko uporabimo tudi za integriranje potenc funkcije kosinus. Ločili bomo dva primera.

1) $m = 2k+1$ je liho število: Integral bomo rešili z uvedbo spremenljivke $t = \cos x$, kar pomeni, da je $dt = -\sin x\,dx$. Sledi

$$\int \sin^m x\,dx = \int \left(\sin^2 x\right)^k \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^k \sin x\,dx = -\int (1-t^2)^k\,dt,$$

kar pomeni, da smo integral prevedli na integral polinoma, ki pa ga znamo integrirati.

2) $m = 2k$ je sodo število: V tem primeru bomo uporabili adicijski izrek za kotne funkcije. Zapišemo lahko namreč

$$\sin^m x = (\sin^2 x)^k = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k.$$

S tem smo integral prevedli v obliko

$$\int \sin^m x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k dx,$$

kjer kotna funkcija cos nastopa z najvišjo potenco $k = \frac{m}{2}$. Z uvedbo nove spremenljivke $t = 2x$ dobimo integral linearne kombinacije potenc funkcije cos. Lihe potence lahko integriramo kot v primeru 1), pri sodih potencah pa induktivno razpolavljamo potence, dokler je potrebno.

Zgled.

$\int \cos^4 x\,dx$:

Računajmo

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x\,dx &= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx,\\
&= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx,\\
&= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\cdot 2\sin 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx,\\
&= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\,dx,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x,\\
&= \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.
\end{aligned}
$$

Integrala funkcij $\cos 2x$ in $\cos 4x$ bi lahko rešili z uvedbo nove spremenljivke, lahko pa jih tudi kar uganemo.

(II) Integrali tipa $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$

V tem primeru se ravnamo po naslednjih navodilih:

- Če je m lih, uporabimo substitucijo $t = \cos x$.
- Če je n lih, uporabimo substitucijo $t = \sin x$.
- Če sta m in n oba soda, z uporabo formul za dvojne kote znižamo potence.

Zgled.

(1) $\underline{\displaystyle\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx}$:

Uporabili bomo substitucijo $t = \sin x$ ($dt = \cos x\, dx$), od koder sledi

$$\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx = \int t^3(1-t^2)\, dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C.$$

(2) $\underline{\displaystyle\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx}$:

V tem primeru bomo uporabili formulo $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. Računajmo

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx &= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\, dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\, dx,\\
&= \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C.
\end{aligned}
$$