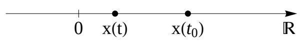
Odvod

Opremljeni s predznanjem o funkcijah in limitah se lahko lotimo enega izmed najpomembnejših matematičnih pojmov v fiziki. Odvode uporabljamo za opisovanje sprememb fizikalnih količin. Osnovni količini v dinamiki, hitrost in pospešek, sta pravzaprav oba odvoda ustrezne funkcije (realne ali vektorske) ene spremenljivke, ki je v tem primeru čas. Znana primera odvodov funkcij več spremenljivk pa sta na primer gravitacijsko in pa električno polje. Poleg samih fizikalnih količin pa odvodi igrajo ključno vlogo v mnogih fizikalnih zakonih, ki jih opisujemo z diferencialnimi enačbami. Te ponavadi opisujejo, kako se fizikalni sistem odziva na vplive okolice, tako da povedo, kakšni so odvodi ustreznih funkcij.

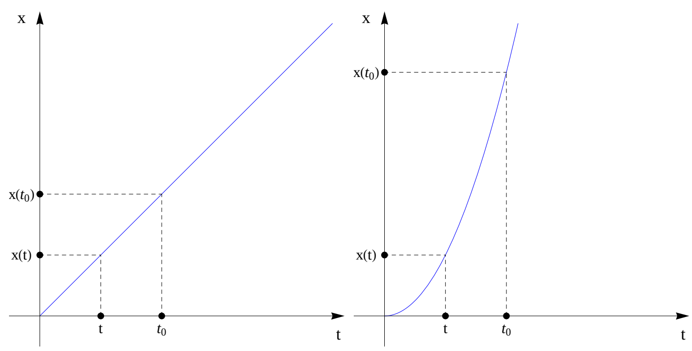
Za motivacijo si poglejmo sistem, ki ga dobro poznamo že iz srednje šole. Denimo, da se točka giblje po premici. Njen položaj ob času t glede na neko izbrano točko na premici opišemo s funkcijo $x = x(t)$ (če bi se točka gibala po prostoru, bi namesto navadne potrebovali vektorsko funkcijo).



Matematični model, s katerim opišemo gibanje točke, je funkcija ene realne spremenljivke

$$x : (a, b) \to \mathbb{R},$$

kjer je (a, b) časovni interval, med katerim opazujemo gibanje točke. Dobro že poznamo enakomerno gibanje in pa enakomerno pospešeno gibanje, ki ju opišemo z naslednjima grafoma:



V prvem primeru je hitrost točke ves čas konstantna, v drugem primeru pa hitrost linearno narašča. Naš cilj bo sedaj poiskati definicijo hitrosti v primeru poljubnega gibanja točke in jo nato geometrijsko interpretirati.

Zanimala nas bo hitrost točke ob času t_0. Izraz

$$\overline{v} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

nam pove, kolikšna je povprečna hitrost točke med časoma t_0 in t. Če je časovni interval med časoma t_0 in t prevelik, se lahko povprečna hitrost na časovnem intervalu precej razlikuje od trenutne hitrosti ob času t_0. Zdi pa se nam sprejemljivo, da se bo pri čedalje manjših časovnih intervalih povprečna hitrost čedalje bolj ujemala s trenutno hitrostjo, zato definiramo

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}.$$

Geometrijsko nam za dano funkcijo f predstavlja diferenčni kvocient

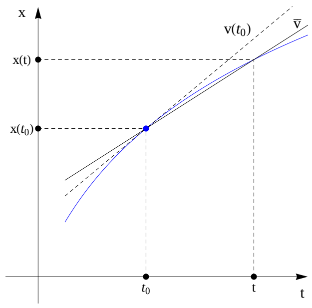
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

naklon sekante na graf funkcije skozi točki $(x_0, f(x_0))$ in $(x, f(x))$, medtem ko je

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

naklon tangente na graf funkcije f v točki $(x_0, f(x_0))$.

Trenutno hitrost točke torej dobimo, tako da z grafa njenega gibanja odčitamo naklon tangente, povprečna hitrost pa ustreza naklonu sekante.



Spoznajmo sedaj še formalno definicijo odvoda.

Definicija 1. *Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija, kjer je D odprta množica, in naj bo $x_0 \in D$. Če obstaja limita*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

jo imenujemo odvod funkcije f v točki x_0. Označimo ga z $f'(x_0)$.

To oznako je vpeljal Lagrange, pogosto pa uporabljamo tudi oznaki:

$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$	Leibnizov zapis,
$f'(t_0) = \dot{f}(t_0)$	Newtonov zapis (neodvisna spremenljivka je čas).

Kot smo že omenili, ima odvod geometrijski pomen naklona tangente na graf funkcije. Torej lahko enačbo tangente na graf funkcije f v točki $(x_0, f(x_0))$ zapišemo v obliki

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

V bližini dane točke je tangenta zelo podobna grafu funkcije, zato lahko iz njenega naklona sklepamo, ali funkcija v okolici dane točke pada, narašča, ali pa morda v njej zavzame ekstremno vrednost.

Definicija 2. *Naj bo funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ definirana na odprti množici D. Funkcija f je odvedljiva, če je odvedljiva v vsaki točki $x_0 \in D$. V tem primeru lahko definiramo novo funkcijo*

$$\begin{aligned} f' &: D \to \mathbb{R}, \\ f' &: x \mapsto f'(x), \end{aligned}$$

ki jo imenujemo odvod funkcije f.

Na odvod lahko gledamo torej tudi kot na operacijo med funkcijami. Seveda moramo poskrbeti, da je začetna funkcija odvedljiva, kar pa ni vedno res. Če je odvedljiva tudi funkcija f', lahko nadaljujemo z odvajanjem in dobimo drugi odvod $f'' = (f')'$ funkcije f. V splošnem označimo z

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

n-ti odvod funkcije f. Po dogovoru je $f^{(1)} = f'$ in $f^{(0)} = f$. V diferencialni obliki je

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

V tej obliki je že iz zapisa razvidno, kaj je neodvisna spremenljivka.

V praksi le poredko funkcije odvajamo po definiciji. Za nekatere osnovne funkcije enkrat za vselej izračunamo njihove odvode na dolgo in jih nato zapišemo v tabelo. Pri računanju odvodov bolj kompliciranih funkcij pa si nato pomagamo s pravili za odvajanje. Če nam funkcije ne uspe odvajati s pomočjo omenjenih postopkov, poskusimo še z računanjem odvoda po definiciji z limito diferenčnih kvocientov.

Za začetek si poglejmo, kako se po definiciji izračuna odvode nekaterih elementarnih funkcij.

Zgled. (1) Odvod konstantne funkcije $f(x) = a$ je enak:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a-a}{h} = 0.$$

(2) Odvod linearne funkcije $f(x) = kx + n$ je:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(k(x+h)+n) - (kx+n)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{kh}{h} = k.$$

(3) Odvod potenčne funkcije $f(x) = x^n$ je:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots\right) - x^n}{h}, \\ &= \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots\right) = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

(4) Pri računanju odvoda sinusne funkcije $f(x) = \sin x$ si pomagamo z limito $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ in pa s faktorizacijsko formulo:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}, \\
&= \lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x.
\end{aligned}$$

(5) Odvod kosinusne funkcije $f(x) = \cos x$ lahko izračunamo z upoštevanjem identitete $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ in pa s prevedbo na prejšnji primer:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin\left(x + h + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{h}, \\
&= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.
\end{aligned}$$

Funkcije, ki jih srečamo v srednji šoli so ponavadi vse odvedljive, zato je morda malce presenetljiv podatek, da je delež odvedljivih funkcij zelo majhen v množici vseh funkcij. Je pa res, da so ravno odvedljive funkcije najbolj uporabne v fiziki in v tehniških vedah.

Velja si zapomniti, da je odvedljivost funkcije močnejši pogoj kot pa zveznost, kar pomeni, da je odvedljivih funkcij manj kot zveznih.

Trditev 3. *Vsaka odvedljiva funkcija je tudi zvezna.*

Dokaz. Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija in $x_0 \in D$. Za poljuben dovolj majhen $h \neq 0$ potem lahko pišemo

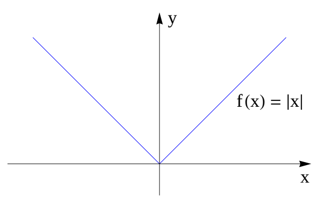
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h\left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right).$$

Ker je f odvedljiva v x_0, obstaja limita $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ in

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) &= \lim_{h \to 0} f(x_0) + \lim_{h \to 0} h \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \\
&= f(x_0) + 0 \cdot f'(x_0) = f(x_0).
\end{aligned}$$

Limita funkcije f v x_0 se torej ujema z vrednostjo funkcije f v x_0, kar pa pomeni, da je f zvezna v x_0. Ker je bil $x_0 \in D$ poljuben, je f zvezna funkcija. $\square$

V obratno smer trditev ne drži. Funkcija $f(x) = |x|$ je namreč zvezna, a ni odvedljiva.



Odvedljivost v točki $x = 0$ bi namreč implicirala, da obstaja limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h},$$

kar pa hitro vidimo, da ni res. Obstajata pa leva in desna limita, ki sta enaki -1 oziroma 1. To pomeni, da ima graf funkcije f v točki $x = 0$ levo in desno tangento, ki pa ne sovpadata.

V nadaljevanju bomo spoznali nekaj pravil za odvajanje, ki nam precej olajšajo računanje.

Trditev 4 (Pravila za odvajanje)**.** *Naj bosta $f : D^{odp} \to \mathbb{R}$, $g : E^{odp} \to \mathbb{R}$ funkciji. Če sta funkciji f in g odvedljivi v točki $x_0 \in D \cap E$, velja:*

(1) Funkcija $f + g$ je odvedljiva v točki x_0 in

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(2) Funkcija $f \cdot g$ je odvedljiva v točki x_0 in

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(3) Če je $g(x_0) \neq 0$, je funkcija $\frac{f}{g}$ odvedljiva v točki x_0 in

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Dokaz. (1) Formulo za odvod vsote dobimo iz enakosti:

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}, \\
&= f'(x_0) + g'(x_0).
\end{aligned}$$

(2) Računajmo:

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f \cdot g)(x_0+h) - (f \cdot g)(x_0)}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right) g(x_0+h) + \lim_{h\to 0} f(x_0) \left(\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}\right), \\
&= f'(x_0) \left(\lim_{h\to 0} g(x_0+h)\right) + \left(\lim_{h\to 0} f(x_0)\right) g'(x_0).
\end{aligned}$$

Ker je funkcija g odvedljiva, je tudi zvezna po Trditvi 3, zato je:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(x_0) &= f'(x_0)\left(\lim_{h\to 0} g(x_0+h)\right) + \left(\lim_{h\to 0} f(x_0)\right) g'(x_0),\\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).\end{aligned}$$

(3) Izpeljava formule za odvod kvocienta je podobna izpeljavi formule za odvod produkta:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x_0+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{h},\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h},\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0+h)}{hg(x_0+h)g(x_0)},\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_0+h)}{hg(x_0+h)g(x_0)},\\ &= \frac{\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)g(x_0) - \lim_{h\to 0} f(x_0)\left(\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)}{\lim_{h\to 0} g(x_0+h)g(x_0)},\\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.\end{aligned}$$

□

S pomočjo teh pravil in pa že izračunanih odvodov bi lahko izračunali odvode polinomov, racionalnih funkcij in pa funkcij tangens in kotangens. V praksi pa nam pogosto prideta prav tudi formuli za odvod kompozituma oziroma odvod inverzne funkcije. Preden jih navedemo, si poglejmo odvod še z alternativnega zornega kota.

Tangenta na graf funkcije f v točki $(x_0, f(x_0))$ ima obliko

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Če pišemo $x = x_0 + h$ in upoštevamo, da se za majhne h tangenta dobro prilega grafu funkcije, dobimo, da za majhne h velja

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h.$$

Označimo sedaj z

$$\alpha(h) = f(x_0 + h) - (f(x_0) + f'(x_0) \cdot h)$$

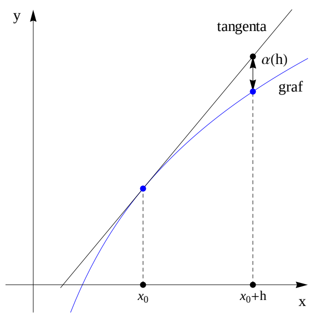
napako pri aproksimaciji funkcije z njeno tangento. Pričakujemo, da bo šla napaka $\alpha(h)$ pri majhnih vrednostih h proti 0. Velja pa še več. Ta napaka gre proti nič hitreje kot h, saj je

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-(f(x_0)+f'(x_0)\cdot h)}{h},\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right),\\ &= f'(x_0)-f'(x_0)=0.\end{aligned}$$

Natančna formula pri aproksimaciji prvega reda se torej glasi

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot h+\alpha(h),$$

kjer je α neka funkcija, ki zadošča pogoju $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h}=0$. Aproksimacije višjih redov bomo spoznali v poglavju o Taylorjevi vrsti.



S pomočjo aproksimacij prvega reda bomo sedaj dokazali formulo za odvod kompozituma dveh funkcij.

Trditev 5 (Verižno pravilo)**.** *Naj bosta $f : D^{odp} \to \mathbb{R}$ in $g : E^{odp} \to \mathbb{R}$ funkciji. Če je funkcija g odvedljiva v točki $x_0 \in g^{-1}(D)$ in je funkcija f odvedljiva v točki $g(x_0)$, je funkcija $f \circ g$ odvedljiva v točki x_0 in velja*

$$(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0).$$

Dokaz. Označimo $y_0 = g(x_0)$. Po predpostavki odvedljivosti funkcij f in g potem lahko z aproksimacijo prvega reda pišemo

$$\begin{aligned}\alpha(h) &= g(x_0+h)-g(x_0)-hg'(x_0),\\ \beta(k) &= f(y_0+k)-f(y_0)-kf'(y_0),\end{aligned}$$

kjer za funkciji α in β velja $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h}=0$ oziroma $\lim\limits_{k\to 0}\frac{\beta(k)}{k}=0$.

Ker nas zanima kompozitum funkcij, spremenljivki k in h ne bosta neodvisni, pač pa bomo definirali

$$k=g(x_0+h)-g(x_0).$$

Sledi

$$|k| = |g(x_0+h) - g(x_0)| = |\alpha(h) + hg'(x_0)| \leq |h| \left(\left| \frac{\alpha(h)}{h} \right| + |g'(x_0)| \right).$$

Ko gre $h \to 0$, gre izraz na desni strani neenakosti proti nič in zato tudi $|k| \to 0$. Zdaj velja

$$\begin{aligned} f(g(x_0+h)) - f(g(x_0)) - hf'(g(x_0))g'(x_0) &= f(y_0+k) - f(y_0) - hf'(y_0)g'(x_0), \\ &= \beta(k) + kf'(y_0) - hf'(y_0)g'(x_0), \\ &= \beta(k) + f'(y_0)(k - hg'(x_0)), \\ &= \beta(k) + f'(y_0)\alpha(h). \end{aligned}$$

Sedaj napravimo oceno

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0)) - hf'(g(x_0))g'(x_0)}{h} \right| &= \left| \frac{\beta(k) + f'(y_0)\alpha(h)}{h} \right|, \\ &\leq \left| \frac{\beta(k)}{h} \right| + |f'(y_0)| \left| \frac{\alpha(h)}{h} \right|, \\ &\leq \left| \frac{\beta(k)}{k} \right| \left| \frac{k}{h} \right| + |f'(y_0)| \left| \frac{\alpha(h)}{h} \right|. \end{aligned}$$

Z uporabo neenakosti $|k| \leq |h| \left(\left| \frac{\alpha(h)}{h} \right| + |g'(x_0)| \right)$ od tod sledi

$$\left| \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0)) - hf'(g(x_0))g'(x_0)}{h} \right| \leq \left| \frac{\beta(k)}{k} \right| \left(\left| \frac{\alpha(h)}{h} \right| + |g'(x_0)| \right) + |f'(y_0)| \left| \frac{\alpha(h)}{h} \right|.$$

Ko gre $h \to 0$, gre izraz na desni proti nič, od koder pa sledi

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

□

Iz verižnega pravila lahko izpeljemo formulo za odvod inverzne funkcije.

Trditev 6 (Odvod inverzne funkcije)**.** *Naj bo $f : D \to E$ bijekcija med odprtima množicama D in E. Če je funkcija f odvedljiva v točki $x_0 \in D$ in je $f'(x_0) \neq 0$, je funkcija $f^{-1} : E \to D$ odvedljiva v točki $y_0 = f(x_0)$ in velja*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dokaz. Označimo $y = y_0 + h$. Potem je

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h}, \\ &= \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}, \\ &= \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}. \end{aligned}$$

Ker je funkcija f odvedljiva, je tudi zvezna po Trditvi 3. Inverzna funkcija f^{-1} je torej prav tako zvezna. Če označimo $x = f^{-1}(y)$, iz zveznosti inverzne funkcije sledi, da se x približuje $f^{-1}(y_0) = x_0$, ko se y približuje y_0. Od tod dobimo

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(y_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}, \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}, \\ &= \frac{1}{f'(x_0)}.\end{aligned}$$

□

Z uporabo pravil za odvajanje lahko izračunamo odvode elementarnih funkcij.

Zgled. (1) Polinomi: Polinome dobimo s seštevanjem produktov konstant in potenčnih funkcij. Odvod polinoma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ je enak

$$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_2 x + a_1.$$

Odvod polinoma stopnje n je polinom stopnje $n-1$.
(2) Racionalne funkcije: Odvod racionalne funkcije $\frac{P(x)}{Q(x)}$ je enak

$$\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)' = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q(x)^2}.$$

Odvod racionalne funkcije je racionalna funkcija.
(3) Kotne funkcije: Pokazali smo že, da velja

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \cos x, \\ (\cos x)' &= -\sin x.\end{aligned}$$

Za funkciji tangens in kotangens pa velja:

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \\ (\operatorname{ctg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

Odvodi kotnih funkcij so kotne funkcije.

(4) Ciklometrične funkcije: Pri računanju odvodov ciklometričnih funkcij bomo uporabili formulo za odvod inverzne funkcije. Spomnimo se, da je funkcija $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ inverz funkcije $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$. Pri računanju

odvoda bomo definicijsko območje $\arcsin$ zožili na odprt interval $(-1, 1)$. Za $x \in (-1, 1)$ dobimo

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je funkcija $\cos$ pozitivna, zato je

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}.$$

Od tod sledi

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Odvod funkcije $\arccos$ na intervalu $(-1, 1)$ je enak:

$$\begin{aligned}(\arccos x)' &= \frac{1}{\cos'(\arccos x)},\\ &= -\frac{1}{\sin(\arccos x)},\\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}},\\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.\end{aligned}$$

Funkciji $\operatorname{arc\,tg}$ in $\operatorname{arc\,ctg}$ sta definirani na $\mathbb{R}$, njuna odvoda pa sta:

$$\begin{aligned}(\operatorname{arc\,tg} x)' &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arc\,tg} x)}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arc\,tg} x)} = \frac{1}{1 + x^2},\\ (\operatorname{arc\,ctg} x)' &= -\frac{1}{\frac{1}{\sin^2(\operatorname{arc\,ctg} x)}} = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2(\operatorname{arc\,ctg} x)} = -\frac{1}{1 + x^2}.\end{aligned}$$

Vidimo, da so odvodi ciklometričnih funkcij racionalne in pa iracionalne funkcije. Odvoda funkcij $\arcsin$ in $\arccos$ imata singularnosti pri $x = -1$ in $x = 1$, kar pomeni, da imata obe funkciji blizu robov intervalov skoraj navpični tangenti.

(5) Logaritemske funkcije: Odvod logaritemske funkcije $f(x) = \log_a x$ za $a > 0$ in $a \neq 1$ bomo izračunali po definiciji:

$$\begin{aligned}(\log_a x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x + h) - \log_a x}{h},\\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\log_a \frac{x+h}{x}}{h},\\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \cdot \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right),\\ &= \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}.\end{aligned}$$

Ker je logaritemska funkcija zvezna, lahko zamenjamo vrstni red limite in pa izračuna funkcije. Če upoštevamo še, da velja $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, dobimo

$$\begin{aligned}
(\log_a x)' &= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}, \\
&= \frac{1}{x}\log_a\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right), \\
&= \frac{1}{x}\log_a e, \\
&= \frac{1}{x\ln a}.
\end{aligned}$$

V posebnem primeru, ko je $a = e$, je $\ln e = 1$ in

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

(6) Eksponentna funkcija: Eksponentna funkcija je inverz logaritemske funkcije, zato je

$$(a^x)' = \frac{1}{\log_a'(a^x)} = \frac{1}{\frac{1}{a^x\ln a}} = a^x\ln a.$$

Še posebej si velja zapomniti primer

$$(e^x)' = e^x,$$

ki pove, da je funkcija $f(x) = e^x$ enaka svojemu odvodu. To je tudi eden izmed razlogov, zakaj je število e tako pomembno v naravoslovju.

(7) Potenčna funkcija: Odvod potenčne funkcije $f(x) = x^\alpha$ za $\alpha \in \mathbb{R}$ bomo izračunali s pomočjo verižnega pravila:

$$(x^\alpha)' = (e^{\ln x^\alpha})' = (e^{\alpha\ln x})' = e^{\alpha\ln x}\cdot(\alpha\ln x)' = e^{\alpha\ln x}\cdot\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Ta formula se ujema s formulo za odvod potenčne funkcije z naravnim eksponentom, ki smo jo izračunali po definiciji.

Za konec še na hitro povzemimo pravila za odvajanje, ki smo jih spoznali. Formule za odvod vsote, produkta in kvocienta lahko zapišemo v obliki:

$$\begin{aligned}
(f+g)' &= f'+g', \\
(f\cdot g)' &= f'g+fg', \\
\left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g-fg'}{g^2}.
\end{aligned}$$

Poleg teh sta uporabni še formuli za odvod kompozituma in pa odvod inverzne funkcije:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0),$$
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Seznam funkcij, katerih odvode si morda splača zapomniti na pamet, pa je podan v naslednji tabeli:

Funkcija	Odvod
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{(\sin x)^2}$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arc\,tg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arc\,ctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Analiza funkcij

S pomočjo odvoda lahko analiziramo obnašanje funkcije: iščemo ekstreme in ugotovimo, ali funkcija narašča ali pada. če je odvod pozitiven ali negativen, funkcija narašča oziroma pada, med ničlami odvoda pa iščemo morebitne kandidate za ekstremne vrednosti funkcije.

Definicija 7. *Naj bo $f : D^{odp} \to \mathbb{R}$ funkcija ene realne spremenljivke.*

· *Funkcija f ima v $x_0 \in D$ (strogi) lokalni minimum, če obstaja $\delta > 0$, da za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (D \setminus \{x_0\})$ velja:*

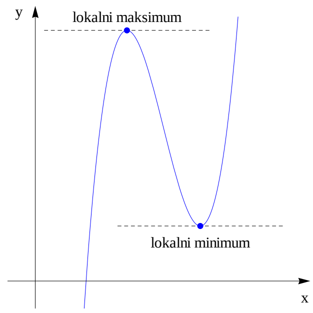
$$f(x) \geq f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)).$$

· *Funkcija f ima v $x_0 \in D$ (strogi) lokalni maksimum, če obstaja $\delta > 0$, da za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (D \setminus \{x_0\})$ velja:*

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0)).$$

V obeh primerih pravimo, da ima f v točki x_0 (strogi) lokalni ekstrem.

Pokazali bomo, da je v primeru, ko je funkcija odvedljiva, njena tangenta v lokalnem ekstremu vodoravna.



Od tod bo sledilo, da so možni kandidati za lokalne ekstreme odvedljive funkcije f rešitve enačbe $f'(x) = 0$.

Trditev 8. *Naj ima funkcija $f : D^{odp} \to \mathbb{R}$ v x_0 lokalni ekstrem. Če je f odvedljiva v x_0, potem je $f'(x_0) = 0$.*

Dokaz. Trditev bomo dokazali s pomočjo dokaza s protislovjem. Najprej definirajmo funkcijo $Q : D \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$Q(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & ;\ x \neq x_0, \\ f'(x_0) & ;\ x = x_0. \end{cases}$$

Ker je funkcija f odvedljiva v x_0, je $\lim\limits_{x \to x_0} Q(x) = Q(x_0)$, kar pomeni, da je Q zvezna v x_0.

1) Recimo, da je $Q(x_0) = f'(x_0) > 0$. Iz zveznosti Q v x_0 sledi, da lahko najdemo tak $\delta > 0$, da je $Q(x) > 0$ za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$. Na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ torej za vsak $x \neq x_0$ velja

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

kar pa pomeni, da je

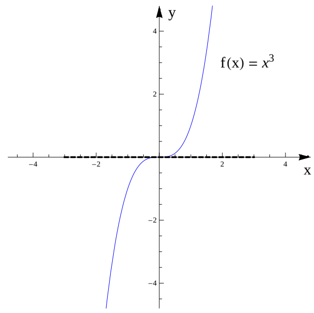
$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) > 0 \quad & \text{za } x > x_0, \\ f(x) - f(x_0) < 0 \quad & \text{za } x < x_0. \end{aligned}$$

Od tod bi sledilo, da v točki x_0 ni ekstrema, kar pa je v protislovju s predpostavko.

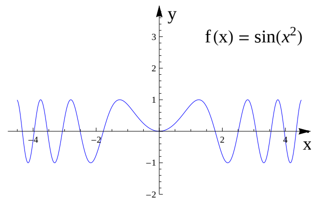
2) Če je $Q(x_0) = f'(x_0) < 0$, podobno kot prej dokažemo, da to vodi v protislovje.

3) Ostane nam le še možnost $Q(x_0) = f'(x_0) = 0$, kar smo želeli dokazati. □

Pogoj $f'(x_0) = 0$ je potreben pogoj, ki mu mora zadoščati ekstremna točka odvedljive funkcije, ni pa zadosten. Protiprimer je funkcija $f(x) = x^3$, za katero velja $f'(0) = 0$, vendar pa $x = 0$ ni ekstremna točka funkcije f. Ima pa funkcija f vodoravno tangento v točki $x = 0$.



Zgled. (1) Poglejmo si funkcijo $f(x) = \sin(x^2)$.



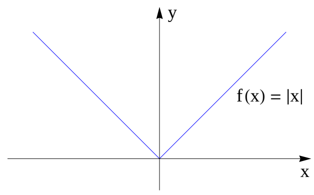
Funkcija f je kompozicija sinusne in kvadratne funkcije, zato je odvedljiva, njen odvod pa je

$$f'(x) = 2x\cos(x^2).$$

V točki $x = 0$ ima funkcija f strogi lokalni minimum, ostali ekstremi pa so v točkah

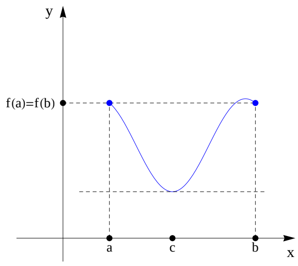
$$x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

(2) Funkcija $f(x) = |x|$ ima v točki $x = 0$ strogi lokalni minimum, vendar pa tam ni odvedljiva.



To pomeni, da so lahko lokalni ekstremi doseženi tudi v točkah, kjer funkcija ni odvedljiva.

V poglavju o zveznih funkcijah smo pokazali, da vsaka zvezna (odvedljiva) funkcija na zaprtem intervalu zavzame svoj maksimum in svoj minimum. Lahko se zgodi, da sta ta ekstrema dosežena v robnih točkah intervala, če je na primer funkcija monotona. Če pa vrednosti funkcije v obeh robnih točkah sovpadata, pa ima funkcija nujno ekstrem v notranjosti intervala. V tej točki je potem tangenta na graf funkcije vodoravna. Temu rezultatu ponavadi rečemo Rolleov izrek.



Trditev 9 (Rolleov izrek)**.** *Naj bo* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *zvezna funkcija, ki je odvedljiva na intervalu* (a, b)*. Če je* $f(a) = f(b)$*, obstaja takšna točka* $c \in (a, b)$*, da je* $f'(c) = 0$.

Dokaz. Funkcija f je zvezna na intervalu $[a, b]$, zato je omejena, najdemo pa lahko tudi takšna $u, v \in [a, b]$, da velja:

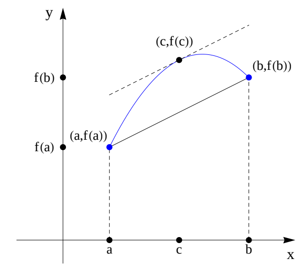
$$f(u) = \sup(f),$$
$$f(v) = \inf(f).$$

Od tod sledi, da sta u in v lokalna ekstrema funkcije f, ker pa je funkcija f odvedljiva, je $f'(u) = f'(v) = 0$ po Trditvi 8.

- Če je $u \in (a, b)$, vzamemo $c = u$. Potem je $f'(c) = f'(u) = 0$.
- Če je $v \in (a, b)$, vzamemo $c = v$. Potem je $f'(c) = f'(v) = 0$.
- Če je $u \in \{a, b\}$, je $\inf(f) = \sup(f)$, kar pomeni, da je f konstantna funkcija. Potem za vsak $c \in (a, b)$ velja $f'(c) = 0$.

□

Posplošitev Rolleovega izreka je Lagrangeev izrek. Če vrednosti funkcije v robnih točkah intervala $[a, b]$ nista enaki, zveznica skozi ustrezni točki ni vodoravna. Lagrangeev izrek potem pove, da obstaja točka $c \in (a, b)$, da je naklon tangente na graf funkcije f v točki $(c, f(c))$ enak naklonu zveznice skozi točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$.



Trditev 10 (Lagrangeev izrek)**.** *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki je odvedljiva na intervalu (a, b). Potem obstaja takšna točka $c \in (a, b)$, da je*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Dokaz. Če dobro pogledamo skici pri Rolleovemu in pa Lagrangeevemu izreku, vidimo, da je slednja malce zarotirana verzija slike pri Rolleovemu izreku. Ideja bo, da naši funkciji odštejemo linearno funkcijo z ustreznim naklonom. Tako bomo primer prevedli na Rolleov izrek.

Definirajmo funkcijo $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$h(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) x.$$

Funkcija h je zvezna na intervalu $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b). V robnih točkah intervala $[a, b]$ sta njeni vrednosti:

$$\begin{aligned}
h(a) = f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) a &= \frac{f(a)(b - a) - (f(b) - f(a))a}{b - a}, \\
&= \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a}, \\
h(b) = f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) b &= \frac{f(b)(b - a) - (f(b) - f(a))b}{b - a}, \\
&= \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a}.
\end{aligned}$$

Vidimo, da je $h(a) = h(b)$, kar po Rolleovemu izreku implicira, da obstaja $c \in (a, b)$, da je $h'(c) = 0$. Odvod funkcije h je enak

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

kar pomeni, da je

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

oziroma $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. □

Enakost iz Lagrangeevega izreka včasih zapišemo v obliki

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

kjer imamo na levi strani naklon tangente na graf v točki c, na desni strani pa naklon zveznice med krajiščema grafa.

Fizikalna interpretacija Lagrangeevega izreka pove, da med gibanjem točke zmeraj obstaja nek trenutek, v katerem je trenutna hitrost točke enaka njeni povprečni hitrosti med celotnim gibanjem.

Še bolj splošen kot Lagrangeev izrek je Cauchyjev izrek.

Trditev 11 (Cauchyjev izrek)**.** *Naj bosta $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji, ki sta odvedljivi na intervalu (a, b). Potem obstaja točka $c \in (a, b)$, da je*

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

Dokaz. Ideja dokaza je podobna kot pri dokazu Lagrangeevega izreka.

Definirajmo funkcijo $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a)).$$

Funkcija h je potem zvezna na intervalu $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b). V robnih točkah intervala $[a, b]$ je:

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a)(g(b) - g(a)) - g(a)(f(b) - f(a)) = f(a)g(b) - g(a)f(b), \\ h(b) &= f(b)(g(b) - g(a)) - g(b)(f(b) - f(a)) = f(a)g(b) - g(a)f(b). \end{aligned}$$

Spet je $h(a) = h(b)$, zato po Rolleovemu izreku obstaja $c \in (a, b)$, da je $h'(c) = 0$. Ker je odvod funkcije h enak

$$h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a)),$$

je

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

□

Če v Cauchyjevemu izreku vzamemo funkcijo $g(x) = x$, dobimo enakost

$$f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$$

iz Lagrangeevega izreka, kar pomeni, da je Lagrangeev izrek posebna verzija Cauchyjevega izreka.

S pomočjo Lagrangeevega izreka bomo sedaj izpeljali povezavo med odvodom funkcije in pa naraščanjem oziroma padanjem funkcije.

Trditev 12. *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki je odvedljiva na intervalu (a, b). Potem velja:*

(1) Če je $f'(x) > 0$ za vsak $x \in (a, b)$, je f strogo naraščajoča na $[a, b]$.

(2) Če je $f'(x) < 0$ za vsak $x \in (a, b)$, je f strogo padajoča na $[a, b]$.

(3) Če je $f'(x) = 0$ za vsak $x \in (a, b)$, je f konstantna na $[a, b]$.

Dokaz. (1) Izberimo poljubna $x, y \in [a, b]$, tako da je $x < y$. Pokazati želimo, da je potem $f(x) < f(y)$. Če uporabimo Lagrangeev izrek za zožitev funkcije f na interval $[x, y]$, lahko najdemo tak $c \in (x, y)$, da je

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Ker je odvod funkcije f pozitiven in $x < y$, je torej

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) > 0,$$

kar pomeni, da je $f(y) > f(x)$.

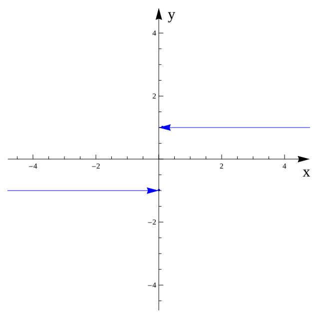
(2) Dokaz je podoben kot pri točki (1).

(3) Recimo sedaj, da je $f'(c) = 0$ za vsak $c \in (a, b)$. Izberimo poljuben $x \in (a, b]$. Po Lagrangeevem izreku za zožitev funkcije f na interval $[a, x]$ lahko najdemo nek $c \in (a, x)$, da je

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) = 0.$$

Torej je $f(x) = f(a)$ za vsak $x \in (a, b]$ (jasno tudi za $x = a$), kar pa pomeni, da je funkcija f konstantna. $\square$

Če ima funkcija ničeln odvod na celem intervalu, je torej konstantna. Pri tem je ključna predpostavka, da je funkcija definirana na intervalu. Če je domena funkcije sestavljena iz večih intervalov, trditev več ne drži. Odvod zožitve funkcije sgn na $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ je na primer povsod enak nič, funkcija pa ni konstantna.



Je pa funkcija konstantna na vsakem intervalu posebej. Takšnim funkcijam rečemo *lokalno konstantne* funkcije. Bolj splošno bi lahko trditev formulirali v smislu, da je funkcija, ki ima ničeln odvod, lokalno konstantna.

Spoznali smo že potreben pogoj za obstoj ekstremov odvedljivih funkcij. Če je točka x_0 ekstremna točka odvedljive funkcije f, mora biti $f'(x_0) = 0$. Točkam, ki zadoščajo temu pogoju, rečemo stacionarne točke.

Definicija 13. *Točka a je stacionarna točka funkcije $f : D^{odp} \to \mathbb{R}$, če je f odvedljiva v a in je $f'(a) = 0$.*

Vsaka ekstremna točka odvedljive funkcije je torej stacionarna, obratno pa ni nujno res, kot smo že videli v primeru funkcije $f(x) = x^3$.

Če najdemo neko stacionarno točko, nas seveda zanima, ali obstajajo kakšni preprosti kriteriji, ki nam povedo, ali je ta točka tudi ekstremna. V nadaljevanju si bomo pogledali tri kriterije, ki nam zagotavljajo da imamo v dani točki lokalni ekstrem funkcije.

Trditev 14 (Zadostni pogoj za ekstrem 1)**.** *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki je odvedljiva na $(a, c) \cup (c, b)$ za nek $c \in (a, b)$. Potem velja:*

(1) Če je $f'(x) < 0$ za vsak $x \in (a, c)$ in $f'(x) > 0$ za vsak $x \in (c, b)$, ima f v točki c strogi lokalni minimum.

(2) Če je $f'(x) > 0$ za vsak $x \in (a, c)$ in $f'(x) < 0$ za vsak $x \in (c, b)$, ima f v točki c strogi lokalni maksimum.

Dokaz. (1) Iz predpostavk in iz Trditve 12 sledi, da f strogo pada na intervalu $[a, c]$ ter strogo narašča na intervalu $[c, b]$. Torej za vsak $x \in [a, c)$ velja $f(x) > f(c)$, za vsak $x \in (c, b]$ pa $f(c) < f(x)$. Oboje skupaj pomeni, da ima f v c strogi lokalni minimum.

(2) Dokaz je analogen kot pri (1). □

Pri tej karakterizaciji ekstremne točke smo potrebovali samo prvi odvod funkcije f. Lahko pa si pomagamo tudi z višjimi odvodi.

Najprej uvedimo še nekaj oznak. Naj bo $f : D^{\text{odp}} \to \mathbb{R}$ funkcija, za katero obstajajo vsi odvodi $f', f'', \ldots, f^{(n)}$. Potem rečemo, da je f *n-krat odvedljiva* funkcija. Če je funkcija $f^{(n)}$ zvezna, rečemo, da je f *n-krat zvezno odvedljiva* funkcija. Množico vseh n-krat zvezno odvedljivih funkcij na odprti množici D označimo z

$$\mathcal{C}^n(D).$$

Neskončnokrat odvedljivim funkcijam rečemo *gladke funkcije.* Primeri gladkih funkcij so polinomi, racionalne funkcije, kotne funkcije, logaritemske in eksponentne funkcije,... Množico gladkih funkcij na odprti množici D označimo z

$$\mathcal{C}^\infty(D) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(D).$$

Trditev 15 (Zadostni pogoj za ekstrem 2)**.** *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki je dvakrat zvezno odvedljiva na (a, b), in naj bo c stacionarna točka funkcije f (oziroma $f'(c) = 0$).*

(1) Če je $f''(c) < 0$, ima f v točki c strogi lokalni maksimum.

(2) Če je $f''(c) > 0$, ima f v točki c strogi lokalni minimum.

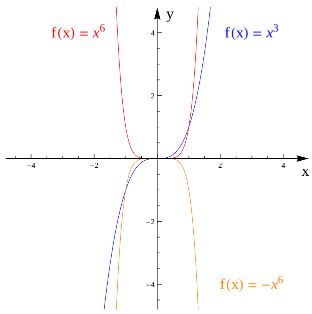
Dokaz. (1) Naj bo $f''(c) < 0$. Ker je drugi odvod f'' zvezen, lahko najdemo tak $\delta > 0$, da je $(c - \delta, c + \delta) \subset (a, b)$ in $f''(x) < 0$ za vsak $x \in (c - \delta, c + \delta)$. To pa po Trditvi 12 pomeni, da je funkcija f' strogo padajoča na intervalu $(c - \delta, c + \delta)$. Ker je $f'(c) = 0$, je torej

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \quad \text{za } x \in (c - \delta, c), \\ f'(x) &< 0 \quad \text{za } x \in (c, c + \delta). \end{aligned}$$

Z uporabo prvega zadostnega pogoja za ekstrem od tod sledi, da ima funkcija f v c strogi lokalni maksimum.

(2) Dokaz je analogen kot pri (1). □

Drugi zadostni pogoj za ekstrem nam nič pove, kaj se zgodi, ko je hkrati $f'(c) = 0$ in $f''(c) = 0$. V tem primeru namreč lahko nastopita tako lokalni maksimum kot lokalni minimum, lahko pa ekstrema sploh ni. Primerov takšnih funkcij ni težko najti, saj so dobre že kar potenčne funkcije. Potenčna funkcija $f(x) = x^{2n+1}$ z lihim eksponentom ima v točki $x = 0$ stacionarno točko, ki pa ni ekstrem. Potenčna funkcija $f(x) = \pm x^{2n}$ s sodim eksponentom pa ima v $x = 0$ lokalni ekstrem, ki je lahko ali minimum ali pa maksimum, odvisno od predznaka.



Če smo našli točko, za katero je $f'(c) = 0$ in $f''(c) = 0$, nadaljujemo z odvajanjem, dokler ne pridemo do neničelnega odvoda (če seveda funkcijo lahko tolikokrat odvajamo). Prvi neničelni odvod nam potem pove, kakšen je tip stacionarne točke. Ta kriterij bomo zaenkrat samo navedli, dokazali pa ga bomo v poglavju o Taylorjevi vrsti.

Trditev 16 (Zadostni pogoj za ekstrem 3)**.** *Naj bo funkcija $f : D^{odp} \to \mathbb{R}$ vsaj n-krat zvezno odvedljiva ($n \geq 2$) in naj bo $x_0 \in D$ stacionarna točka funkcije f. Privzemimo, da je $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(x_0) = 0$ in $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Potem velja:*

(1) Če je $n = 2k$, ima f v točki x_0 strogi lokalni ekstrem. In sicer:

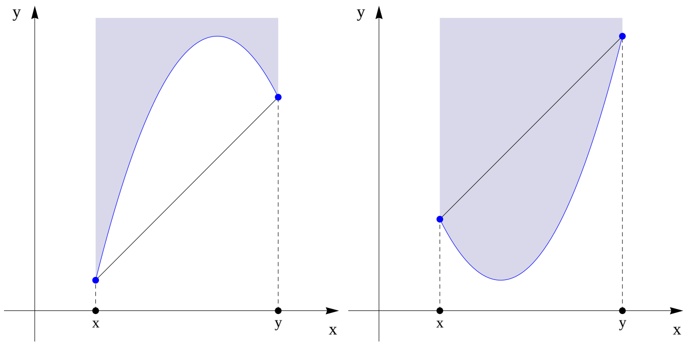
- *če je $f^{(n)}(x_0) < 0$, ima f v točki x_0 strogi lokalni maksimum,*
- *če je $f^{(n)}(x_0) > 0$, ima f v točki x_0 strogi lokalni minimum.*

(2) Če je $n = 2k + 1$, funkcija f v točki x_0 nima ekstrema.

S tem kriterijem lahko klasificiramo skoraj vse stacionarne točke gladkih funkcij. Teoretično pa obstajajo tudi funkcije, ki imajo v kakšni točki vse odvode enake nič, a so zelo redke.

V drugem izmed kriterijev zgoraj smo že spoznali, da predznak drugega odvoda neposredno vpliva na tip stacionarne točke. Ima pa drugi odvod tudi svoj geometrijski pomen. Velikost drugega odvoda vpliva na ukrivljenost grafa funkcije. Kot primer iz fizike lahko navedemo drugi Newtonov zakon, ki pove, da skupek zunanjih vplivov na neko točkasto telo določa ukrivljenost tira točke. V tem kontekstu igra vlogo drugega odvoda seveda pospešek točke. Z ukrivljenostjo se v tem trenutku ne bomo ukvarjali, spoznali pa bomo pojma konveksnosti in konkavnosti, ki sta neposredno povezana s predznakom drugega odvoda funkcije.

Za motivacijo si poglejmo grafa naslednjih funkcij:



V prvem primeru leži graf funkcije nad zveznico med dvema točkama na grafu, v drugem primeru pa pod zveznico. Tema dvema lastnostima funkcije rečemo *konkavnost* oziroma *konveksnost*.

Še drugače si lahko stvar predstavljamo na naslednji način. Recimo, da se po grafu funkcije sprehajamo od leve proti desni. Če graf zavija v levo (pozitivna ukrivljenost), je funkcija konveksna, če pa zavija v desno (negativna ukrivljenost), je funkcija konkavna. V točkah, kjer je drugi odvod ničeln, lahko funkcija preide iz območja konveksnosti v območje konkavnosti in obratno.

Definicija 17. *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija ene realne spremenljivke.*

- *Funkcija f je (strogo) konveksna, če za poljubna $x, y \in [a, b]$, $x < y$, in za vsak $\alpha \in (0, 1)$ velja*

$$f(\alpha y + (1 - \alpha)x) \overset{(<)}{\leq} \alpha f(y) + (1 - \alpha)f(x).$$

- *Funkcija f je (strogo) konkavna, če za poljubna $x, y \in [a, b]$, $x < y$, in za vsak $\alpha \in (0, 1)$ velja*

$$f(\alpha y + (1 - \alpha)x) \overset{(>)}{\geq} \alpha f(y) + (1 - \alpha)f(x).$$

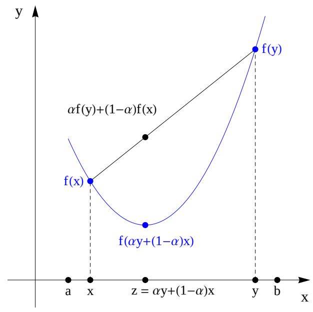
Izrazu oblike

$$z = \alpha y + (1 - \alpha)x,$$

kjer je $\alpha \in [0, 1]$, rečemo *konveksna kombinacija* točk x in y. Ko α preteče interval $[0, 1]$, preteče z daljico med x in y (ko je $\alpha = 0$, je $z = x$, ko pa je $\alpha = 1$, je $z = y$). Podobno lahko vidimo, da izrazi oblike

$$(\alpha y + (1 - \alpha)x, \alpha f(y) + (1 - \alpha)f(x)), \quad \alpha \in [0, 1]$$

določajo ravno zveznico med točkama $(x, f(x))$ in $(y, f(y))$. Neenakosti iz definicije torej ne pomenijo nič drugega, kot da leži graf pod (konveksnost) ali pa nad (konkavnost) zveznico med poljubnima dvema točkama na grafu.



V naslednji trditvi bomo dokazali, da je pozitivnost drugega odvoda povezana s konveksnostjo, negativnost drugega odvoda pa s konkavnostjo funkcije.

Trditev 18. *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki je odvedljiva na (a, b). Potem velja:*

(1) Če je funkcija f' (strogo) naraščajoča na (a, b), je f (strogo) konveksna na $[a, b]$. Če je f slučajno 2-krat odvedljiva na (a, b) in je $f''(x) \overset{(>)}{\geq} 0$ za vsak $x \in (a, b)$, je f (strogo) konveksna na $[a, b]$.

(2) Če je funkcija f' (strogo) padajoča na (a, b), je f (strogo) konkavna na $[a, b]$. Če je f slučajno 2-krat odvedljiva na (a, b) in je $f''(x) \overset{(<)}{\leq} 0$ za vsak $x \in (a, b)$, je f (strogo) konkavna na $[a, b]$.

Dokaz. (1) Izberimo poljubna $x, y \in [a, b]$, $x < y$, in denimo, da je funkcija f' naraščajoča na (a, b). Dokazati moramo, da za vsak $z = \alpha y + (1 - \alpha)x$, kjer je $\alpha \in (0, 1)$, velja

$$f(z) \leq \alpha f(y) + (1 - \alpha)f(x).$$

Po Lagrangeevem izreku lahko najdemo $c \in (x, z)$ in $d \in (z, y)$, da velja:

$$f(z) - f(x) = f'(c)(z - x),$$
$$f(y) - f(z) = f'(d)(y - z).$$

Po drugi strani pa imamo enakost

$$(1 - \alpha)(z - x) = z - x - \alpha z + \alpha x = (\alpha y + x - \alpha x) - x - \alpha z + \alpha x = \alpha(y - z).$$

Ker je funkcija f' naraščajoča, iz $x < c < z < d < y$ sledi $f'(c) \leq f'(d)$. Skupaj z zgornjimi enakostmi lahko od tod izpeljemo neenakost:

$$\begin{aligned}(1-\alpha)(f(z)-f(x)) &= (1-\alpha)f'(c)(z-x),\\ &\leq (1-\alpha)f'(d)(z-x),\\ &= \alpha f'(d)(y-z),\\ &= \alpha(f(y)-f(z)).\end{aligned}$$

To neenakost lahko prepišemo v neenakost

$$f(z) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha)f(x),$$

ki smo jo želeli dokazati.

Če je f 2-krat odvedljiva na (a,b) in je $f''(x) \geq 0$ za vsak $x \in (a,b)$, je po Trditvi 12 funkcija f' naraščajoča na (a,b). Po že dokazanem od tod sledi, da je f konveksna na $[a,b]$.

(2) Dokažemo podobno kot (1). $\square$

L'Hospitalovo pravilo

Z odvodi lahko izračunamo tudi limite nekaterih kvocientov funkcij. Primere uporabe najdemo pri študiju asimptotskega obnašanja funkcij. Pokazali bomo na primer, da logaritemska funkcija narašča počasneje kot poljubna potenčna funkcija, eksponentna funkcija pa hitreje kot poljubna potenčna funkcija.

Trditev 19 (L'Hospitalovo pravilo)**.** *Naj bosta $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ odvedljivi funkciji in naj bo $x_0 \in (a,b)$ skupna ničla funkcij f in g (to pomeni, da je $f(x_0) = g(x_0) = 0$). Privzemimo dodatno še, da je $g(x) \neq 0$ in $g'(x) \neq 0$ za vsak $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$. Če obstaja limita $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, potem obstaja tudi limita $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ in velja*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dokaz. V dokazu bomo definirali nekaj pomožnih funkcij, ki nam bodo omogočale izpeljati enakost iz trditve. Najprej bomo definirali funkcijo $k : (a,b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Iz predpostavk v trditvi sledi, da je funkcija k zvezna in odvedljiva na odprti množici $(a,b) \setminus \{x_0\}$.

Nadalje definirajmo družino funkcij $h_x : (a,b) \to \mathbb{R}$ s predpisi

$$h_x(t) = f(t) - k(x)g(t).$$

Za vsak fiksen $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ je h_x zvezna in odvedljiva funkcija, odvisna od spremenljivke t na intervalu $t \in (a,b)$. Različne vrednosti spremenljivke x lahko seveda določajo različne funkcije h_x.

Izberimo sedaj poljuben $x \in (a, x_0)$. Potem velja:

$$\begin{aligned} h_x(x_0) &= f(x_0) - k(x)g(x_0) = 0 - 0 = 0, \\ h_x(x) &= f(x) - k(x)g(x) = f(x) - \frac{f(x)}{g(x)}g(x) = 0. \end{aligned}$$

Funkcija h_x torej zavzame isti vrednosti v točkah x in x_0, zato lahko po Rolleovemu izreku najdemo nek $c_x \in (x, x_0)$, da je $h_x'(c_x) = 0$. V tej enakosti je s h_x' mišljen odvod funkcije $h_x(t) = f(t) - k(x)g(t)$ po spremenljivki t, ki pa je enak

$$h_x'(t) = f'(t) - k(x)g'(t).$$

Če vstavimo $t = c_x$, se enakost $h_x'(c_x) = 0$ prepiše v $f'(c_x) - k(x)g'(c_x) = 0$, oziroma

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Za vsak $x \in (a, x_0)$ lahko torej najdemo nek $c_x \in (x, x_0)$ (odvisen od x), da velja zgornja enakost.

Ko se x z leve približuje proti x_0, se mora hkrati tudi c_x približevati k x_0, kar pa pomeni, da je

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0-} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x \to x_0-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Analogno lahko dokažemo, da podobna enakost velja tudi za desni limiti, od koder pa sledi, da se limiti v trditvi ujemata. $\square$

Ta verzija L'Hospitalovega pravila je uporabna za računanje limit tipa $\frac{0}{0}$ v okolici neke točke. Podobno pa dokažemo tudi variante L'Hospitalovega pravila za računanje limit tipa $\frac{\infty}{\infty}$ v okolici dane točke in pa za računanje limit tipa $\frac{0}{0}$ in $\frac{\infty}{\infty}$ v neskončnosti.

(1) Naj bosta $f, g : (a, x_0) \cup (x_0, b) \to \mathbb{R}$ odvedljivi funkciji in naj velja $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ ter $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ (funkciji f in g imata skupni pol). Če obstaja limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, potem obstaja tudi limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, in limiti sta enaki.

(2) Naj bosta $f, g : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ odvedljivi funkciji in naj bo $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ ter $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$. Privzemimo dodatno še, da velja $g(x) \neq 0$ in $g'(x) \neq 0$ za vsak $x \in (a, \infty)$. Če obstaja limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, potem obstaja tudi limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, in limiti sta enaki.

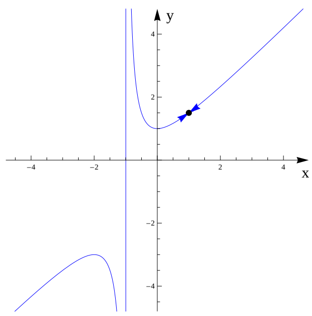
(3) Naj bosta $f, g : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ odvedljivi funkciji, ki zadoščata pogojema $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ ter $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty$. Če obstaja limita $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, potem obstaja tudi limita $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, in limiti sta enaki.

L'Hospitalovo pravilo praviloma uporabljamo pri iskanju odpravljivih singularnosti funkcij in pa pri analizi asimptotskega obnašanja funkcij.

Zgled. (1) Poglejmo si za začetek racionalno funkcijo $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$. Njen predpis sicer ni definiran v točki $x = 1$, je pa točka $x = 1$ skupna ničla števca in imenovalca, zato domnevamo, da bi se dalo funkcijo f zvezno razširiti tudi skozi točko $x = 1$. Limita funkcije f v točki $x = 1$ je enaka

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}.$$

Če sedaj dodatno definiramo $f(1) = \frac{3}{2}$, smo tako odpravili singularnost funkcije v točki $x = 1$. Ima pa funkcija f še vedno singularnost (pol) v točki $x = -1$, ki pa je ne moremo odpraviti.

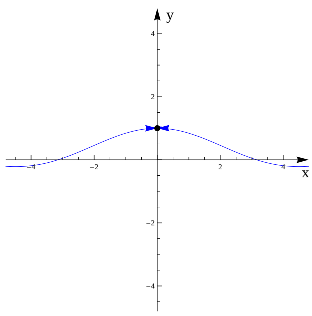


(2) Pri funkciji $f(x) = \frac{e^{ax}-1}{x}$ imamo v točki $x = 0$ nedoločenost tipa $\frac{0}{0}$. Z uporabo L'Hospitalovega pravila dobimo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{ae^{ax}}{1} = a.$$

(3) Limito $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ smo že izračunali na dolgo v poglavju o funkcijah. Precej hitreje pa s pomočjo L'Hospitalovega pravila dobimo

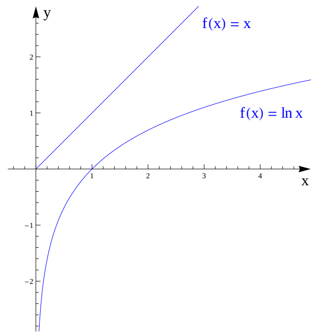
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$



(4) Analizirajmo sedaj obnašanje funkcije $f(x) = x \ln x$ za majhne x. V točki $x = 0$ ima funkcija nedoločenost tipa $0 \cdot (-\infty)$, zato jo moramo malce preoblikovati, da dobimo eno izmed nedoločenosti, ki smo jih navedli v L'Hospitalovemu pravilu. Računajmo

$$\lim_{x \to 0}(x \ln x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0}(-x) = 0.$$

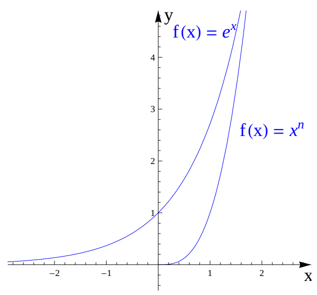
To pomeni, da za majhne vrednosti linearna funkcija x pada hitreje proti nič, kot gre logaritemska funkcija $\ln x$ proti minus neskončnosti.



(5) Za konec si poglejmo še primerjavo med obnašanjem potenčne in pa eksponentne funkcije v neskončnosti. Funkcija $f(x) = \frac{x^n}{e^x}$ ima v neskončnosti nedoločenost tipa $\frac{\infty}{\infty}$. Limito v neskončnosti izračunamo z L'Hospitalovim pravilom, ki ga bomo morali v tem primeru uporabiti večkrat

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \ldots = \lim_{x \to \infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

Od tod sklepamo, da eksponentna funkcija raste hitreje kot poljubna potenčna funkcija.



Risanje grafov funkcij

Če imamo možnost, si pri risanju grafov funkcij pomagamo z računalniškimi orodji, ki nam grafe elementarnih funkcij narišejo s precejšno natančnostjo. Sicer pa lahko z uporabo matematičnih orodij, ki smo jih spoznali v tem razdelku, vsaj približno skiciramo graf funkcije tudi sami.

Pri skiciranju grafa funkcije si pomagamo z naslednjimi opornimi točkami:

(1) Najprej določimo definicijsko območje funkcije. Če ni že eksplicitno določeno, ponavadi za domeno vzamemo kar množico vseh točk, za katere je definiran predpis funkcije.

(2) Poiščemo ničle in pole funkcije ter analiziramo obnašanje funkcije v robnih točkah domene ter v neskončnosti.

(3) Izračunamo odvod funkcije ter poiščemo stacionarne točke, intervale naraščanja in intervale padanja funkcije.

(4) Izračunamo drugi odvod funkcije in nato poiščemo prevoje, intervale konveksnosti in intervale konkavnosti funkcije.

Zgled. Poskusimo na primer skicirati graf funkcije $f(x) = x \ln x$.

- Logaritemska funkcija $\ln x$ je definirana samo za pozitivna realna števila, zato je naravna domena funkcije f enaka $D = (0, \infty)$.

- Funkcija f ima ničlo $x = 1$. Polov funkcija f nima, saj smo že izračunali, da je limita funkcije f v robni točki domene $x = 0$ enaka

$$\lim_{x \to 0} (x \ln x) = 0.$$

  Ker sta tako linearna funkcija kot logaritemska funkcija naraščajoči in rasteta čez vse meje, je

$$\lim_{x \to \infty} (x \ln x) = \infty.$$

- Odvod funkcije f je enak

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

  Funkcija f torej pada na intervalu $(0, \frac{1}{e})$ in narašča na intervalu $(\frac{1}{e}, \infty)$. V točki $x_0 = \frac{1}{e}$ ima funkcija f strogi lokalni minimum. Limita odvoda, ko gre x proti 0, je enaka

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = -\infty,$$

  kar pomeni, da se graf funkcije f približuje točki $(0, 0)$ v skoraj navpični smeri.

- Drugi odvod funkcije f je enak

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

  in je torej povsod pozitiven, kar pomeni, da je funkcija f konveksna. Prevojev ni.

Na koncu s pomočjo vseh teh podatkov skiciramo graf funkcije.