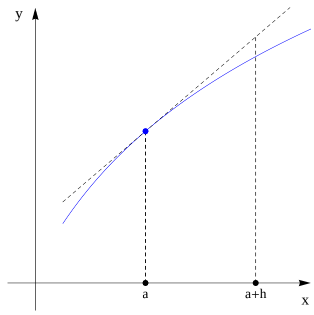
# Taylorjeva vrsta in Taylorjeva formula

Večino funkcij, ki se uporabljajo v praktičnih problemih, smo že spoznali, nismo pa nič govorili o tem, kako računamo njihove vrednosti. Brez kalkulatorja namreč najbrž ne bi znali računati vrednosti eksponentne, logaritemske ali pa trigonometričnih funkcij. V tem poglavju bomo spoznali, kako lahko približno računamo vrednosti takšnih funkcij in izpeljali formulo za oceno napake pri takšni aproksimaciji.

Naj bo $f : D^{\mathrm{odp}} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija in naj bo $a \in D$. Iz poglavja o odvodu že vemo, da je blizu točke $a$ tangenta na graf funkcije dober približek funkcije.




To pomeni, da imamo za majhne vrednosti $h$ dobro linearno aproksimacijo

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h.$$

**Zgled.** Vzemimo funkcijo $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Zanimale nas bodo vrednosti v okolici $a = 1000$. Odvod funkcije $f$ je enak $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, vrednost v točki $a$ pa je $f(1000) = \sqrt[3]{1000} = 10$. Če aproksimiramo funkcijo s tangento, dobimo

$$f(1000+h) \approx f(1000) + f'(1000) \cdot h = 10 + \frac{1}{3}1000^{-\frac{2}{3}} \cdot h = 10 + \frac{1}{300}h.$$

Tako s pomočjo linearne aproksimacije dobimo na primer

$$\sqrt[3]{1003} \approx 10 + \frac{3}{300} = 10,01.$$

Natančna vrednost, zaokrožena na pet mest za decimalno vejico je $10,00999$.

Zgornji zgled nam kaže, da je lahko linearna aproksimacija dokaj dobra. Problem pa je, da zaenkrat ne vemo vnaprej, ali je natančnost dovolj dobra za naše potrebe, in kaj storiti, če temu ni tako. Da bi rešili ta dva problema, bomo najprej na aproksimacijo s tangento pogledali še z drugega zornega kota. Pišimo $x = a + h$. Potem je

$$f(x) \approx f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

aproksimacija funkcije $f$ v okolici točke $a$ s polinomom prve stopnje. Ključna lastnost tega polinoma je, da ima isto vrednost in isti odvod kot funkcija $f$ v točki $a$. Od tod dobimo idejo za aproksimacijo funkcije s polinomi višjih redov. Pri aproksimaciji reda $n$ bomo izbrali takšen polinom reda $n$, katerega prvih $n$ odvodov v dani točki se ujema z odvodi funkcije. V mnogih primerih dobimo z višanjem reda čedalje boljšo aproksimacijo funkcije.

**Trditev 1.** *Naj bo $P$ polinom stopnje $n$ in $a \in \mathbb{R}$. Tedaj velja*

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

*za vsak $x \in \mathbb{R}$.*

*Dokaz.* Naj bo

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Zanimalo nas bo obnašanje polinoma $P$ v okolici točke $a$, zato bomo označili $x = a + h$ in si mislili, da je $h$ neodvisna spremenljivka. Če polinom $P$ razvijemo po potencah spremenljivke $h$, dobimo izraz

$$\begin{aligned} P(a+h) &= a_n(a+h)^n + a_{n-1}(a+h)^{n-1} + \ldots + a_1(a+h) + a_0, \\ &= b_n h^n + b_{n-1}h^{n-1} + \ldots + b_1 h + b_0. \end{aligned}$$

Koeficienti $b_0, b_1, \ldots, b_n$ so odvisni od koeficientov polinoma $P$ in pa od točke $a$. Z uporabo binomske formule bi jih lahko eksplicitno izračunali, za občutek pa si poglejmo na primer samo prva dva:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + \ldots + a_n a^n, \\ b_1 &= a_1 + 2a_2 a + 3a_3 a^2 + \ldots + n a_n a^{n-1}. \end{aligned}$$

Krajše lahko ti dve enakosti zapišemo v obliki $b_0 = P(a)$ in $b_1 = P'(a)$. V nadaljevanju bomo pokazali, da lahko pravzaprav vse koeficiente $b_k$ izrazimo z vrednostmi odvodov polinoma $P$ v točki $a$. Ker je $P(a+h) = P(x)$ in $\frac{dx}{dh} = 1$, sledi iz verižnega pravila za odvod enakost

$$\frac{dP(a+h)}{dh} = \frac{dP(x)}{dx}\frac{dx}{dh} = P'(x).$$

Od tod dobimo

$$\begin{aligned} (P(a+h))' &= nb_n h^{n-1} + (n-1)b_{n-1}h^{n-2} + \ldots + b_1 + 0, \\ (P(a+h))'' &= n(n-1)b_n h^{n-2} + (n-1)(n-2)b_{n-1}h^{n-3} + \ldots + 0 + 0, \\ &\vdots \\ (P(a+h))^{(n)} &= n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))b_n + 0 + \ldots + 0. \end{aligned}$$

Če izračunamo odvode v točki $h = 0$ (oziroma $x = a$), dobimo, da velja $P^{(k)}(a) = k!b_k$, kar nam da

$$b_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}.$$

Ko to vstavimo v formulo, dobimo ravno

$$\begin{aligned} P(x) &= b_n h^n + b_{n-1}h^{n-1} + \ldots + b_1 h + b_0, \\ &= \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \ldots + P'(a)(x-a) + P(a). \end{aligned}$$

□

Zgornja trditev nam pove, da je polinom $P$ stopnje $n$ enolično določen s števili $P(a), P'(a), P''(a), \ldots, P^{(n)}(a)$ za nek $a \in \mathbb{R}$. Koeficienti polinoma so tako v tesni zvezi z vrednostmi odvodov polinoma v točki $a = 0$. Za poljubne gladke funkcije to ni več nujno res. Vrednosti odvodov v neki točki funkcije namreč ne določajo natanko. Obstaja pa poseben razred analitičnih funkcij, ki so v okolici dane točke enolično določene z vrednostmi odvodov.

V bolj splošni situaciji lahko poskusimo najti polinom, katerega odvodi do vključno reda $n$ se ujemajo z odvodi dane funkcije. Ta enolično določen polinom interpretiramo kot polinomsko aproksimacijo reda $n$ dane funkcije v okolici dane točke.

**Trditev 2.** *Naj bo funkcija $f : D^{odp} \to \mathbb{R}$ $n$-krat odvedljiva v točki $a \in D$. Tedaj obstaja natanko en polinom stopnje kvečjemu $n$, za katerega velja:*

$$\begin{aligned} P(a) &= f(a), \\ P'(a) &= f'(a), \\ P''(a) &= f''(a), \\ &\vdots \\ P^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a). \end{aligned}$$

Polinomu iz zgornje trditve rečemo Taylorjev polinom reda $n$ za funkcijo $f$, razvit okoli točke $a$. Označimo ga s

$$T_n f(x;a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Funkcija $f$ in polinom $T_n f(x;a)$ se v okolici točke $a$ obnašata zelo podobno. Če je $f$ kar polinom stopnje $n$, se popolnoma ujemata, v splošnem pa se razlikujeta za neko razliko $R_n$. V mnogih primerih lahko ocenimo velikost razlike $R_n$, kar nam omogoča, da v okviru željene natančnosti funkcijo $f$ nadomestimo s polinomom.

**Zgled.** (1) Vzemimo polinom $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$. V tej obliki je razvit po potencah $x = x - 0$, torej okoli točke $a = 0$. Radi bi ga razvili po potencah $x - 2$, oziroma okoli točke $a = 2$. Ker je $f$ polinom stopnje 3, moramo izračunati prve tri odvode funkcije $f$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 - 4x - 4,\\
f''(x) &= 6x - 4,\\
f'''(x) &= 6.
\end{aligned}$$

Od tod dobimo $f(2) = 0$, $f'(2) = 0$, $f''(2) = 8$ in $f'''(2) = 6$, kar nam da

$$f(x) = 0 + 0(x-2) + \frac{8}{2}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^3 = 4(x-2)^2 + (x-2)^3.$$

Izračunajmo še prvih nekaj Taylorjevih polinomov funkcije $f$:

$$\begin{aligned}
T_0 f(x;2) &= 0,\\
T_1 f(x;2) &= 0,\\
T_2 f(x;2) &= 4(x-2)^2,\\
T_3 f(x;2) &= 4(x-2)^2 + (x-2)^3,\\
T_4 f(x;2) &= 4(x-2)^2 + (x-2)^3.
\end{aligned}$$

Taylorjevi polinomi višjega reda bolj natančno aproksimirajo funkcijo $f$. Ker je $f$ polinom stopnje 3, pa za vse $n \geq 3$ velja $f(x) = T_n f(x;2)$.

(2) Razvijmo sedaj funkcijo $f(x) = e^x$ okoli točke $a = 0$. Ker velja $f^{(k)}(x) = e^x$, je $f^{(k)}(0) = 1$ za vsak $k \geq 0$. Od tod dobimo

$$T_n f(x;0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

(3) Za razvoj funkcije $f(x) = \sin x$ okoli točke $a = 0$ najprej izračunajmo prve štiri odvode:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos x,\\
f''(x) &= -\sin x,\\
f'''(x) &= -\cos x,\\
f''''(x) &= \sin x.
\end{aligned}$$

Vidimo, da je $f'''' = f$, od koder lahko sklepamo, da se odvodi funkcije $f$ ponavljajo periodično s periodo 4. Vrednosti odvodov so $f^{(4k)}(0) = 0$, $f^{(4k+1)}(0) = 1$, $f^{(4k+2)}(0) = 0$ in $f^{(4k+3)}(0) = -1$. Od tod dobimo razvoj

$$\begin{aligned}
T_m f(x;0) &= 0 + \frac{1}{1}x + \frac{0}{2}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \ldots,\\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots
\end{aligned}$$

Imamo samo člene pri lihih potencah, kar je posledica lihosti sinusne funkcije. Kompaktno lahko Taylorjeve polinome sinusne funkcije zapišemo v obliki

$$T_{2m+1}f(x;0) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

(4) Podobno lahko izračunamo tudi razvoje funkcije $f(x) = \cos x$ okoli točke $a = 0$. Ker je $\cos x = (\sin x)'$, moramo samo prestaviti za ena odvode sinusne funkcije, da dobimo odvode kosinusne funkcije. Ker je funkcija $f$ soda, njeni Taylorjevi razvoji vsebujejo samo sode potence, zapišemo pa jih lahko s formulo

$$T_{2m}f(x;0) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}.$$

Naj bo sedaj $f : D^{\text{odp}} \to \mathbb{R}$ poljubna $(n+1)$-krat odvedljiva funkcija in izberimo $a \in D$. Potem imamo aproksimacijo

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Pričakujemo, da bo z višanjem reda napaka aproksimacije čedalje manjša, zanima pa nas, kako velik $n$ moramo vzeti, da bo napaka v okviru naše tolerance. V ta namen bomo najprej izpeljali oceno za napako aproksimacije. Pišimo

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x).$$

Ta formula je sedaj natančna, problem pa je v tem, da ne poznamo natančne vrednosti ostanka $R_n(x)$. Da bi ga lahko vsaj ocenili, bomo najprej definirali pomožno funkcijo

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^n}{n!} - R_n(x)\left(\frac{x-t}{x-a}\right)^p.$$

Vzeli bomo, da sta $a$ in $x$ fiksni različni točki množice $D$, $t$ pa je spremenljivka, ki leži na intervalu med $a$ in $x$ (le-ta mora cel ležati znotraj $D$). Poleg tega naj bo še $p$ poljubno naravno število, ki nam bo pri različnih izbirah dalo različne oblike ostanka. Izbira funkcije $F$ se zdi na prvi pogled precej misteriozna, kot bomo videli v nadaljevanju, pa bomo pri takšni izbiri lahko s pomočjo Rolleovega izreka zapisali formulo za ostanek.

Najprej opazimo, da je funkcija $F$ definirana na intervalu med $a$ in $x$, kjer je tudi zvezna, hkrati pa je odvedljiva v notranjosti tega intervala. V robnih točkah intervala je

$$F(a) = f(x) - f(a) - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} - R_n(x)\left(\frac{x-a}{x-a}\right)^p = 0,$$

$$F(x) = f(x) - f(x) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x)(x-x)^n}{n!} - R_n(x)\left(\frac{x-x}{x-a}\right)^p = 0.$$

Torej je $F(a) = F(x) = 0$, kar pa po Rolleovem izreku pomeni, da obstaja $\xi$ na intervalu med $a$ in $x$, da je $F'(\xi) = 0$. Če odvajamo člen $\frac{f^{(k)}(t)(x-t)^k}{k!}$ po parametru $t$, dobimo

$$\left(\frac{f^{(k)}(t)(x-t)^k}{k!}\right)' = \frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k}{k!} - \frac{kf^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}}{k!}.$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)(x-t)^k}{k!} - R_n(x)\left(\frac{x-t}{x-a}\right)^p\right)', \\
&= 0 - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{pR_n(x)}{x-a}\left(\frac{x-t}{x-a}\right)^{p-1}, \\
&= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k}{k!} + \frac{pR_n(x)}{x-a}\left(\frac{x-t}{x-a}\right)^{p-1}, \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} + \frac{pR_n(x)}{x-a}\left(\frac{x-t}{x-a}\right)^{p-1}.
\end{aligned}$$

Če upoštevamo, da je $F'(\xi) = 0$, dobimo

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!} = \frac{pR_n(x)}{x-a}\left(\frac{x-\xi}{x-a}\right)^{p-1},$$

od koder lahko izrazimo ostanek v obliki

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^p(x-\xi)^{n-p+1}}{p \cdot n!} f^{(n+1)}(\xi)$$

za nek $\xi$ med $a$ in $x$. Različne izbire $p$-jev nam bodo dale različne oblike ostankov, vidimo pa, da je ostanek odvisen od $(n+1)$-vega odvoda funkcije $f$. Če znamo oceniti velikost funkcije $f^{(n+1)}$, lahko navzgor ocenimo velikost ostanka. Preden spoznamo nekaj konkretnih oblik ostankov, bomo daljico med $a$ in $x$ parametrizirali na standardni način. Število $\xi$ lahko na enoličen način zapišemo v obliki

$$\xi = \theta(x-a) + a$$

za nek $\theta \in (0,1)$. Vrednost 0 bi ustrezala točki $a$, vrednost 1 pa točki $x$. Parameter $\theta$ nam pove, kje na daljici med $a$ in $x$ se nahaja točka $\xi$. Od tod dobimo, da je

$$x - \xi = x - a - \theta(x-a) = (x-a)(1-\theta),$$

zato lahko zapišemo formulo za ostanek tudi v obliki

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{p \cdot n!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)).$$

Pri izbiri $p = n + 1$ dobimo Lagrangeevo obliko ostanka

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Ta oblika je primerna za ocenjevanje velikosti ostanka, saj ponavadi znamo oceniti velikost $f^{(n+1)}$. Nato lahko izračunamo, kako blizu $a$ mora biti $x$, da zadostimo izbrani toleranci.

Če izberemo $p = 1$, pa dobimo Cauchyjevo obliko ostanka

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)).$$

Opozoriti velja, da so pri različnih izbirah števila $p$ ustrezna števila $\theta$ med sabo različna.

**Izrek 3** (Taylorjeva formula z ostankom)**.** *Naj bo $f : D^{odp} \to \mathbb{R}$ poljubna $(n+1)$-krat odvedljiva funkcija in naj bo $a \in D$. Potem za vsak $x \in D$ obstaja tak $\theta \in (0,1)$, da velja*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Taylorjeva formula nam pomaga oceniti ostanek $R_n$ pri aproksimaciji funkcije s Taylorjevim polinomom reda $n$. Če funkcija $f$ ni polinom, ostanek $R_n$ načeloma ni nikoli enak nič, lahko pa se zgodi, da pri danem $x$ vrednosti $R_n(x)$ konvergirajo proti nič. V tem primeru velja

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Izrazu na desni strani rečemo Taylorjeva vrsta za funkcijo $f$, razvita okoli točke $a$. V mnogih primerih Taylorjeva vrsta funkcije konvergira k funkciji, ni pa to vedno res. Lahko se zgodi, da Taylorjeva vrsta sploh ne konvergira, ali pa da konvergira k neki drugi funkciji.

Pri večini funkcij, ki jih uporabljamo v praksi, Taylorjeva vrsta vsaj na neki okolici dane točke konvergira k funkciji sami. Poglejmo si nekaj pomembnih primerov.

**Zgled.** (1) Najprej si poglejmo eksponentno vrsto, prirejeno eksponentni funkciji $f(x) = e^x$ okoli točke $a = 0$. Izračunali smo že, da je

$$T_n f(x;0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Od tod dobimo Taylorjevo vrsto eksponentne funkcije

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

Sedaj nas zanima, za katere $x \in \mathbb{R}$ Taylorjeva vrsta konvergira k funkciji $f$. Če upoštevamo, da je $f^{(n+1)}(x) = e^x$ in $a = 0$, dobimo iz Lagrangeeve oblike ostanka

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}.$$

Število $e^{\theta x}$ je neka konstanta, neodvisna od $n$. Če je $|x| \leq 1$, hitro vidimo, da gre $R_n(x) \to 0$ pri $n \to \infty$. V primeru, ko je $|x| > 1$, gre $R_n(x)$ prav tako proti nič, ker narašča $(n+1)!$ hitreje kot pa $|x|^{n+1}$ pri $n \to \infty$. To lahko dokažemo induktivno na naslednji način. Izberimo tak $N$, da velja $N > |x|$. Za $n \geq N$ potem velja

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \left( \frac{|x|^n}{n!} \right) \cdot \frac{|x|}{n+1} < \frac{|x|^n}{n!}.$$

Zaporedje $|R_n(x)|$ je torej od $N$ dalje padajoče. Hkrati pa je kvocient dveh zaporednih členov manjši od $\frac{|x|}{N}$, kar pomeni, da lahko zaporedje navzgor omejimo s konvergentnim geometrijskim zaporedjem. Od tod sklepamo, da $|R_n(x)| \to 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Torej imamo za vsak $x \in \mathbb{R}$ enakost

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots.$$

Pri $x = 1$ dobimo vrsto za Eulerjevo število

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots.$$

Z uporabo Taylorjeve formule lahko ocenimo, kako hitro ta vrsta konvergira. Imamo namreč oceno

$$R_n(1) = \frac{e^\theta}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Ostanek hitro pada proti nič. Pri $n = 5$ je $R_n(1) = \frac{1}{240}$, pri $n = 14$ pa imamo že aproksimacijo na 11 decimalk.

(2) Taylorjeva vrsta funkcije $f(x) = \sin x$ okoli točke $a = 0$ je enaka

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots.$$

Odvodi sinusne funkcije so ali sinusne ali pa kosinusne funkcije, zato so po absolutni vrednosti omejeni z 1. Od tod dobimo oceno za velikost ostanka

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

S podobnim sklepom kot pri eksponentni vrsti je

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

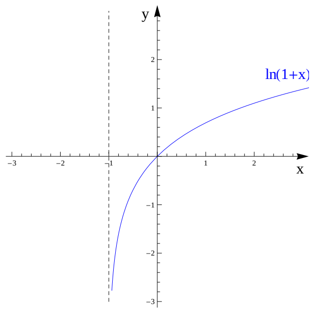
kar pomeni, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots .$$

(3) Na podoben način lahko izpeljemo tudi vrsto za funkcijo $f(x) = \cos x$ okoli točke $a = 0$, da dobimo

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots .$$

(4) Kot naslednjo si bomo pogledali vrsto za logaritemsko funkcijo. Ker logaritem ni definiran v točki $x = 0$, bomo vzeli funkcijo $f(x) = \ln(x+1)$ in jo razvili okoli točke $a = 0$.




Funkcija $f$ ima pol pri $x = -1$, zato v tem primeru ne moremo pričakovati, da bo Taylorjeva vrsta konvergirala na celi realni osi. Najprej izračunajmo odvode funkcije $f$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}, \\ f''(x) &= -(x+1)^{-2}, \\ f'''(x) &= 2(x+1)^{-3}, \\ f''''(x) &= -3!(x+1)^{-4}. \end{aligned}$$

Od tod lahko induktivno izpeljemo, da za $k \in \mathbb{N}$ velja

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(x+1)^{-k}.$$

V točki $a = 0$ dobimo

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f^{(k)}(0) &= (-1)^{k-1}(k-1)!, \qquad k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

kar nam da Taylorjevo vrsto za logaritemsko funkcijo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$

Poglejmo sedaj, kako je z ostankom. V Lagrangeevi obliki dobimo

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{(-1)^n n!(1+\theta x)^{-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}$$

za nek $\theta \in (0,1)$. Če je $0 \leq x \leq 1$, je $1 + \theta x \geq 1$, kar nam da oceno

$$|R_n(x)| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}\right| \leq \frac{1}{n+1},$$

kar pomeni, da za $0 \leq x \leq 1$ velja $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Če je $-1 < x < 0$, si z Lagrangeevo obliko ostanka ne moremo pomagati, zato si poglejmo še Cauchyjevo obliko ostanka

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta x), \\ &= \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}(-1)^n n!(1+\theta x)^{-n-1}, \\ &= \frac{(-1)^n x}{1+\theta x} \cdot \left(\frac{(1-\theta)x}{1+\theta x}\right)^n \end{aligned}$$

Sedaj bomo ocenili ulomek na desni strani zadnje vrstice. Ker je $-1 < x < 0$, je $1 + \theta x > 1 - \theta$, kar pomeni, da je

$$\left|\frac{(1-\theta)x}{1+\theta x}\right| < \left|\frac{(1-\theta)x}{1-\theta}\right| = |x|.$$

Od tod dobimo oceno

$$|R_n(x)| = \left|\frac{(-1)^n x}{1+\theta x} \cdot \left(\frac{(1-\theta)x}{1+\theta x}\right)^n\right| < \frac{|x|}{1+\theta x} \cdot |x|^n$$

Na desni strani imamo konvergentno geometrijsko zaporedje, kar pomeni, da je spet $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Zaenkrat smo torej pokazali, da za $-1 < x \leq 1$ velja

$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$

Pri izbiri $x = 1$ lahko od tod izračunamo vsoto znane alternirajoče vrste

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Pri $x = -1$ dobimo divergentno harmonično vrsto, medtem ko Taylorjeva vrsta prav tako divergira pri $|x| > 1$, saj v tem primeru absolutne vrednosti členov rastejo čez vse meje.

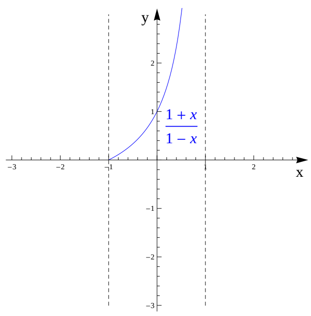
Zgoraj izračunana vrsta nam omogoča izračunati logaritme števil med 0 in 2. Za izračun logaritmov večjih števil pa si lahko pomagamo z naslednjim trikom. Za $|x| < 1$ velja

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \\ \ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots. \end{aligned}$$

Če ti dve vrsti odštejemo, dobimo

$$\begin{aligned} \ln(1+x) - \ln(1-x) &= 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \dots, \\ \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= 2x\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^6}{7} + \dots\right). \end{aligned}$$

Funkcija $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ zavzame pri $|x| < 1$ vsako vrednost na intervalu $(0, \infty)$ natanko enkrat.




To nam sedaj omogoča, da izračunamo logaritem poljubnega pozitivnega števila.

(5) Podobno kot pri logaritemski bomo izračunali tudi Taylorjevo vrsto potenčne funkcije. Spet bomo zaradi definiranosti v okolici točke $a = 0$ vzeli funkcijo $f(x) = (1+x)^\alpha$ za nek $\alpha \in \mathbb{R}$. Odvodi funkcije $f$ so tedaj:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}, \end{aligned}$$

kar pomeni, da je $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$. Definirajmo sedaj posplošeni binomski simbol

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{n!}.$$

Definiran je za poljuben $\alpha \in \mathbb{R}$ in za vsak $n = 0, 1, 2, \ldots$. Če je $\alpha \in \mathbb{N}$, se ujema z običajnim binomskim simbolom, saj je tedaj

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha!}{n!(\alpha - n)!}.$$

Taylorjevo vrsto potenčne funkcije lahko sedaj zapišemo v obliki

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Tej vrsti rečemo binomska vrsta. Pri obravnavi njene konvergence bomo ločili dva primera.

(i) Če je $\alpha = m \in \mathbb{N}$, je funkcija $f$ pravzaprav polinom. V tem primeru je $\binom{m}{n} = 0$ za $n > m$, kar pomeni, da je

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n.$$

To enakost že poznamo, veljavna pa je za vsak $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Naj bo sedaj $\alpha \in \mathbb{R}$ poljuben. Zanima nas ocena ostanka. Če je $0 \le x < 1$, si bomo pomagali z Lagrangeevo obliko ostanka

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \binom{\alpha}{n+1} (1+\theta x)^{\alpha-(n+1)} x^{n+1}, \\ &= (1+\theta x)^{\alpha} \cdot \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n+1)} \left( \frac{x}{1+\theta x} \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Ker je $0 \le x < 1$ in $0 < \theta < 1$, je $\frac{x}{1+\theta x} \le x$, zato lahko ocenimo

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\le (1+\theta x)^{\alpha} \cdot \left| \frac{\alpha}{1} \right| \cdot \left| \frac{\alpha-1}{2} \right| \cdot \left| \frac{\alpha-2}{3} \right| \cdot \ldots \cdot \left| \frac{\alpha-n}{n+1} \right| x^{n+1}, \\ &= (1+\theta x)^{\alpha} \cdot \left| \frac{\alpha}{1} x \right| \cdot \left| \frac{\alpha-1}{2} x \right| \cdot \left| \frac{\alpha-2}{3} x \right| \cdot \ldots \cdot \left| \frac{\alpha-n}{n+1} x \right|. \end{aligned}$$

Iz limite

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha-n}{n+1} x \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\alpha}{n} - 1}{1 + \frac{1}{n}} x \right| = |x| < 1$$

sledi, da lahko od nekega člena dalje zaporedje $(|R_n(x)|)$ majoriziramo s konvergentnim geometrijskim zaporedjem, od koder sledi, da je $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

V primeru, ko je $-1 < x < 0$, si bomo pomagali s Cauchyjevo obliko ostanka:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!} (1+\theta x)^{\alpha-(n+1)} (1-\theta)^n x^{n+1}, \\ &= \left( \alpha \cdot \frac{\alpha-1}{1} \cdot \frac{\alpha-2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{\alpha-n}{n} \right) \left( \frac{(1-\theta)x}{1+\theta x} \right)^n x(1+\theta x)^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Ker je $-1 < x < 0$, imamo podobno kot pri logaritemski vrsti oceno

$$\left|\frac{(1-\theta)x}{1+\theta x}\right| < \left|\frac{(1-\theta)x}{1-\theta}\right| = |x|.$$

Sledi

$$|R_n(x)| = |\alpha x|(1+\theta x)^{\alpha-1}\left|\frac{\alpha-1}{1}x\right| \cdot \left|\frac{\alpha-2}{2}x\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{\alpha-n}{n}x\right|.$$

Ker je

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n}x\right| = |x| < 1,$$

je zaporedje $(|R_n(x)|)$ spet majoriziramo s konvergentnim geometrijskim zaporedjem, kar pomeni, da je $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Kot rezultat dobimo formulo

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,$$

ki velja za vse $|x| < 1$.

(6) Za konec si poglejmo še Leibnizevo formulo za izračun višjih odvodov produkta dveh funkcij. Naj bosta $f$ in $g$ dovolj gladki funkciji. Potem je

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)' &= f'g + fg',\\
(f\cdot g)'' &= f''g + f'g' + f'g' + fg'' = f''g + 2f'g' + fg'',\\
(f\cdot g)''' &= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''.
\end{aligned}$$

Z indukcijo lahko dokažemo, da za poljuben $n \in \mathbb{N}$ velja

$$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}.$$

Kot zgled uporabe si poglejmo še dokaz tretjega zadostnega pogoja za ekstrem funkcije ene spremenljivke.

**Trditev 4** (Zadostni pogoj za ekstrem 3)**.** *Naj bo funkcija $f : D^{odp} \to \mathbb{R}$ vsaj $n$-krat zvezno odvedljiva ($n \geq 2$) in naj bo $x_0 \in D$ stacionarna točka funkcije $f$. Privzemimo, da je $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(x_0) = 0$ in $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Potem velja:*

*(1) Če je $n = 2k$, ima $f$ v točki $x_0$ strogi lokalni ekstrem. In sicer:*

- *če je $f^{(n)}(x_0) < 0$, ima $f$ v točki $x_0$ strogi lokalni maksimum,*
- *če je $f^{(n)}(x_0) > 0$, ima $f$ v točki $x_0$ strogi lokalni minimum.*

*(2) Če je $n = 2k + 1$, funkcija $f$ v točki $x_0$ nima ekstrema.*

*Dokaz.* Izberimo tako majhen interval $(a, b) \subset D$, ki vsebuje točko $x_0$, da je $f^{(n)}|_{(a,b)}$ brez ničel in vseskozi istega predznaka. Takšen interval lahko najdemo zato, ker je $f^{(n)}$ zvezna funkcija in je $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Za poljuben $x \in (a, b)$ nam Taylorjeva formula za $f$, razvita okoli točke $x_0$ da enakost

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^n.$$

Po predpostavkah iz trditve so namreč vsi ostali vmesni členi enaki nič. Izraz $f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))$ ima na $(a, b)$ ves čas isti predznak, zato je obnašanje funkcije v okolici točke $x_0$ odvisno od člena $(x - x_0)^n$. Če je $n = 2k$, bo ta člen ves čas pozitiven, kar pomeni, da ima $f$ v $x_0$ lokalni ekstrem, če pa je $n = 2k + 1$, pa bo ta člen levo od $x_0$ negativen, desno od $x_0$ pa pozitiven. Ekstrema v tem primeru torej ni. □

## Potenčne vrste

V tem poglavju bomo posplošili pojem Taylorjeve vrste. Potenčna vrsta je vrsta oblike

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

kjer so $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{C}$ konstante, $z$ pa kompleksna spremenljivka. To je posplošitev polinoma. Lahko si tudi mislimo, da je potenčna vrsta polinom neskončne stopnje. Če se omejimo na realne koeficiente in gledamo samo $z \in \mathbb{R}$, govorimo o realnih potenčnih vrstah.

V tej osnovni obliki je potenčna vrsta razvita okoli točke $a = 0$. Bolj splošno pa lahko gledamo tudi potenčne vrste, ki so razvite okoli poljubne točke $a \in \mathbb{C}$ in so oblike

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n.$$

Če za $z$ vstavimo neko poljubno kompleksno število, dobimo številsko vrsto. Kot vemo vsaka številska vrsta ni nujno konvergentna, zato nas bo najprej zanimalo območje konvergence potenčne vrste. Kot bomo videli, bo to praviloma nek krog v kompleksni ravnini s središčem v točki $a$. Včasih bo območje konvergence cela kompleksna ravnina (kot pri Taylorjevih vrstah eksponentne, sinusne in kosinusne funkcije), včasih pa bo vrsta konvergirala samo v točki $a$.

**Trditev 5.** *Če potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergira za nek $z_0 \in \mathbb{C}$, potem absolutno konvergira za vsak $z \in \mathbb{C}$, za katerega je $|z| < |z_0|$.*

*Dokaz.* Denimo, da vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ konvergira za nek $z_0 \neq 0$ (v primeru $z_0 = 0$ je pogoj iz trditve avtomatično izpolnjen). Od tod sledi, da njeni členi konvergirajo proti nič, kar pa pomeni, da je zaporedje $(a_n z_0^n)$ omejeno. Torej obstaja tak $M > 0$, da je $|a_n z_0^n| < M$ za vsak $n = 0, 1, 2, \ldots$. Vzemimo sedaj poljuben $z \in \mathbb{C}$, za katerega je $|z| < |z_0|$. Potem obstaja pozitivno realno število $q$, da velja

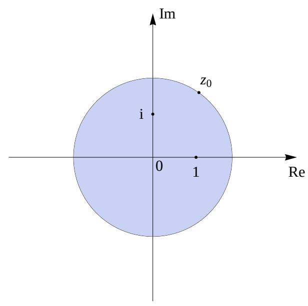
$$0 \leq \left| \frac{z}{z_0} \right| = q < 1.$$

Sedaj lahko ocenimo

$$|a_n z^n| = \left| a_n z_0^n \left( \frac{z}{z_0} \right)^n \right| = |a_n z_0^n q^n| = |a_n z_0^n|\, q^n \leq M q^n.$$

Vrsta $\sum a_n z_0^n$ ima torej konvergentno majoranto $\sum M q^n$, zato je absolutno konvergentna. □

Iz zgornje trditve lahko sklepamo naslednje: če vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergira za nek $z_0 \in \mathbb{C}$, potem konvergira (absolutno) v notranjosti kroga s polmerom $|z_0|$ in s središčem v koordinatnem izhodišču.




Sedaj bi radi našli po absolutni vrednosti največji možni $z_0$, za katerega potenčna vrsta konvergira. Zmeraj to ne bo mogoče, vedno pa bomo lahko našli supremum absolutnih vrednosti kompleksnih števil, za katere vrsta konvergira.

**Posledica 6.** *Za vsako potenčno vrsto $\sum a_n z^n$ obstaja natanko določen $R \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$, da velja:*

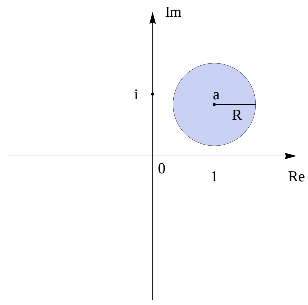
1. *Vrsta $\sum a_n z^n$ absolutno konvergira, če je $|z| < R$.*
2. *Vrsta $\sum a_n z^n$ divergira, če je $|z| > R$.*

**Definicija 7.** *Številu $R$ rečemo konvergenčni polmer potenčne vrste.*

To pomeni, da vsaka potenčna vrsta konvergira v notranjosti kroga s polmerom $R$. V zunanjosti tega kroga vrsta divergira, na robu kroga pa lahko ali konvergira ali pa divergira. Če je $R = \infty$, vrsta konvergira na celi kompleksni ravnini, če pa je $R = 0$, pa vrsta konvergira samo v točki $z = 0$.

V realnem primeru to pomeni, da vrsta konvergira na nekem simetričnem intervalu glede na točko 0. Logaritemska vrsta ima na primer konvergenčni polmer enak $R = 1$. To pomeni, da konvergira na intervalu $(-1, 1)$, kot smo že premislili, pa v točki $x = 1$ konvergira, v točki $x = -1$ pa divergira.

Če je vrsta razvita okoli točke $a \in \mathbb{C}$, je območje konvergence potenčne vrste nek krog s središčem v točki $a$.




**Definicija 8.** *Naj bo $(a_n)$ zaporedje realnih števil in naj bo $E$ množica stekališč zaporedja $(a_n)$. Potem definiramo*

$$\lim_{n\to\infty} \sup(a_n) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

*na naslednji način:*

1. *če je zaporedje $(a_n)$ navzgor neomejeno, je*

$$\lim_{n\to\infty} \sup(a_n) = \infty,$$

2. *če je zaporedje $(a_n)$ navzgor omejeno in je $E \neq \emptyset$, potem definiramo*

$$\lim_{n\to\infty} \sup(a_n) = \sup E,$$

3. *če je zaporedje $(a_n)$ navzgor omejeno in je $E = \emptyset$, definiramo*

$$\lim_{n\to\infty} \sup(a_n) = -\infty.$$

Številu $\lim_{n\to\infty} \sup(a_n)$ rečemo limes superior danega zaporedja in ga interpretiramo kot največje stekališče zaporedja $(a_n)$. Definiramo lahko tudi limes inferior s predpisom

$$\lim_{n\to\infty} \inf(a_n) = -\lim_{n\to\infty} \sup(-a_n).$$

**Trditev 9.** *Za potenčno vrsto* $\sum a_n z^n$ *je njen konvergenčni polmer enak*

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

*Dokaz.* Pri dokazu si bomo pomagali s korenskim kriterijem za številske vrste. Označimo najprej

$$\alpha = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Potem je

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \lim_{n\to\infty} \sup |z| \sqrt[n]{|a_n|} = |z| \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{\alpha}.$$

Če je torej $|z| < \alpha$, je

$$\sqrt[n]{|a_n z^n|} \leq q < 1$$

za vse $n$ od nekod dalje, kar pa po koren–skem kriteriju pomeni, da vrsta $\sum a_n z^n$ konvergira.

Podobno lahko pokažemo, da za $|z| > \alpha$ potenčna vrsta divergira, kar pa skupaj s prejšnjo lastnostjo pomeni, da je $\alpha = R$. $\square$

Če je v zgornji trditvi $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, to interpretiramo kot $R = \infty$, če pa je $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, pa je $R = 0$.

Podobno kot polinome lahko množimo tudi potenčne vrste. Denimo, da sta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ potenčni vrsti. Produkt teh dveh vrst je potenčna vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

katere koeficienti so dani s predpisi

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

**Trditev 10.** *Če sta vrsti* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *in* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *konvergentni v točki* $z_0 \in \mathbb{C}$ *in je vsaj ena izmed njih v tej točki tudi absolutno konvergentna, je tudi njun produkt konvergenten v tej točki. Za vsote teh vrst velja*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z_0^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z_0^n.$$

*Dokaz.* Denimo, da vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ absolutno konvergira in da vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z_0^n$ konvergira. Označimo zaradi enostavnosti

$$\begin{aligned} u_n &= a_n z_0^n, \\ v_n &= b_n z_0^n, \\ w_n &= c_n z_0^n \end{aligned}$$

in še

$$\begin{aligned} U_n &= u_0 + u_1 + \ldots + u_n, \\ V_n &= v_0 + v_1 + \ldots + v_n, \\ W_n &= w_0 + w_1 + \ldots + w_n. \end{aligned}$$

Naj bo še $U = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ in $V = \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$. Prepričamo se lahko, da potem velja

$$\begin{aligned} W_n &= u_0 V_n + u_1 V_{n-1} + \ldots + u_n V_0, \\ W_{n+m} &= u_0 V_{n+m} + \ldots + u_m V_n + \ldots + u_{n+m} V_0. \end{aligned}$$

Naš cilj je pokazati, da zaporedje $(W_n)$ konvergira proti $UV$. To bo sledilo iz dejstva, da je izraz $|W_{n+m} - UV|$ poljubno majhen, če je le $n$ dovolj velik.

Izberimo torej poljuben $\epsilon > 0$. Ker je vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$ konvergentna, obstaja tako število $n \in \mathbb{N}$, da za vsak $p \geq 0$ velja $|V_{n+p} - V| < \epsilon$. Če označimo $\eta_p = V_{n+p} - V$, je

$$u_0 V_{n+m} + \ldots + u_m V_n = (u_0 + u_1 + \ldots + u_m)V + u_0 \eta_m + \ldots + u_m \eta_0.$$

Ker so vsi $\eta_i$ po absolutni vrednosti manjši od $\epsilon$, lahko ocenimo izraz na desni

$$|u_0 \eta_m + \ldots + u_m \eta_0| < (|u_0| + |u_1| + \ldots + |u_m|)\, \epsilon \leq A\epsilon,$$

kjer je

$$A = |u_0| + |u_1| + |u_2| + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| > 0.$$

Tak $A$ obstaja, ker je vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ absolutno konvergentna. Poleg tega lahko najdemo tudi tak $m_0$, da za vsak $m \geq m_0$ in za vsak $p \geq 0$ velja

$$|u_{m+1}| + \ldots + |u_{m+p}| < \epsilon.$$

Med drugim od tod po trikotniški neenakosti sledi, da je $|u_m - U| \leq \epsilon$ za vsak $m \geq m_0$. Sedaj lahko napravimo naslednjo oceno

$$\begin{aligned} |W_{n+m} - UV| &= |u_0 V_{n+m} + \ldots + u_m V_n + u_{m+1} V_{n-1} + \ldots + u_{n+m} V_0 - UV|, \\ &= |(u_0 + \ldots + u_m)V + u_0 \eta_m + \ldots + u_m \eta_0 + u_{m+1} V_{n-1} + \ldots + u_{n+m} V_0 - UV|, \\ &= |(U_m - U)V + u_0 \eta_m + \ldots + u_m \eta_0 + u_{m+1} V_{n-1} + \ldots + u_{n+m} V_0|, \\ &\leq |(U_m - U)V| + |u_0 \eta_m + \ldots + u_m \eta_0| + |u_{m+1} V_{n-1}| + \ldots + |u_{n+m} V_0|. \end{aligned}$$

Ocenili smo že, da za $m \geq m_0$ velja $|u_m - U| \leq \epsilon$ in $|u_0\eta_m + \ldots + u_m\eta_0| < A\epsilon$, ker pa je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ konvergentna, pa je zaporedje $(|V_k|)$ omejeno, zato lahko najdemo tak $B > 0$, da za vsak $k \geq 0$ velja $|V_k| < B$. Od tod dobimo

$$
\begin{aligned}
|W_{n+m} - UV| &\leq |(U_m - U)V| + |u_0\eta_m + \ldots + u_m\eta_0| + |u_{m+1}V_{n-1}| + \ldots + |u_{n+m}V_0|, \\
&\leq |V|\epsilon + A\epsilon + B(|u_{m+1}| + \ldots + |u_{n+m}|), \\
&\leq (|V| + A + B)\epsilon.
\end{aligned}
$$

Če je torej $n + m$ dovolj velik, bo vsota $W_{n+m}$ poljubno blizu številu $UV$. Od tod sledi, da vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ konvergira, njena vsota pa je enaka $UV$. $\square$

**Eksponentna funkcija v $\mathbb{C}$**

Teorija potenčnih vrst nam omogoča, da nekatere znane funkcije realne spremenljivke razširimo na kompleksna števila. Kompleksno eksponentno funkcijo lahko definiramo s predpisom

$$
\begin{aligned}
&\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \\
&\exp : z \mapsto e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

Potenčna vrsta na desni ima neskončen konvergenčni radij, zato konvergira absolutno za vsak $z \in \mathbb{C}$. Podobno lahko definiramo tudi sinus in kosinus kompleksne spremenljivke:

$$
\begin{aligned}
\sin z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\
\cos z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}.
\end{aligned}
$$

Tudi ti dve vrsti konvergirata na celi kompleksni ravnini.

Na hitro si poglejmo nekaj lastnosti teh treh funkcij in zvezo med njimi. Za poljuben $y \in \mathbb{R}$ je

$$
\begin{aligned}
\cos y + i \sin y &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = e^{iy}.
\end{aligned}
$$

Tako smo izpeljali Eulerjevo formulo

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Vzemimo sedaj poljubna $z, w \in \mathbb{C}$. Potem je

$$e^z \cdot e^w = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} \frac{z^j}{j!} \cdot \frac{w^{k-j}}{(k-j)!}\right).$$

Po drugi strani pa je

$$e^{z+w} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+w)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z^j w^{k-j}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{k!} \cdot \frac{k!}{j!(k-j)!} z^j w^{k-j}\right).$$

Oboje skupaj nam pove, da že znana enakost

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$

velja tudi za kompleksna števila. Pri izbiri $z = x + iy$ dobimo

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

## Enakomerna konvergenca

Pri študiju potenčnih vrst smo videli, da lahko z eno potenčno vrsto hkrati opišemo neskončno številskih vrst, po eno za vsak $z \in \mathbb{C}$. Potenčne vrste so poseben primer funkcijskih vrst. Te lahko v nekaterih točkah konvergirajo, v nekaterih pa ne. V tem poglavju bomo spoznali različne načine konvergence funkcijskih vrst in pa pomemben pojem enakomerne konvergence.

**Definicija 11.** *Naj bo $(f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ zaporedje funkcij.*

- *Zaporedje $(f_n)$ konvergira v točki $x \in D$, če obstaja limita $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.*
- *Zaporedje $(f_n)$ konvergira po točkah k funkciji $f : D \to \mathbb{R}$, če za vsak $x \in D$ velja*
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$
- *Vrsta $\sum f_n$ konvergira v točki $x \in D$, če konvergira vrsta $\sum f_n(x)$.*
- *Vrsta $\sum f_n$ konvergira po točkah k funkciji $g : D \to \mathbb{R}$, če za vsak $x \in D$ velja*
$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$
- *Zaporedje funkcij $(f_n)$ konvergira enakomerno na množici $D$ k funkciji $f : D \to \mathbb{R}$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq N$ in za vsak $x \in D$ velja $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.*

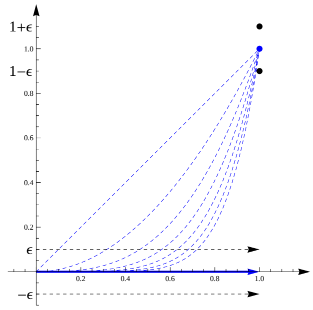
· *Vrsta* $\sum f_n$ *konvergira enakomerno na* $D$ *k funkciji* $g : D \to \mathbb{R}$*, če zaporedje delnih vsot* $(s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k)$ *konvergira enakomerno na* $D$ *k* $g$*.*

Enakomerna konvergenca nam pove, da zaporedje konvergira pri vseh točkah približno enako hitro. Iz definicije sledi, da je vsako enakomerno konvergentno zaporedje tudi konvergentno po točkah. Obratno ne velja.

**Zgled.** Kot primer funkcijskega zaporedja, ki ne konvergira enakomerno, si poglejmo zaporedje funkcij $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, definiranih s predpisi $f_n(x) = x^n$. To zaporedje po točkah na $[0,1]$ konvergira k funkciji

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in [0,1), \\ 1 & ; x = 1, \end{cases}$$

vendar pa konvergenca ni enakomerna.




Kot vidimo na sliki, konvergira zaporedje v točkah blizu $x = 0$ precej hitreje kot pa v točkah blizu $x = 1$.

**Trditev 12.** *Zaporedje* $(f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ *konvergira enakomerno na* $D$ *natanko takrat, ko za vsak* $\epsilon > 0$ *obstaja tak* $N \in \mathbb{N}$*, da za vsaka* $m, n \geq N$ *in za vsak* $x \in D$ *velja*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

*Dokaz.* ($\Longrightarrow$) Izberimo $\epsilon > 0$. Potem obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq N$ in za vsak $x \in D$ velja $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2$. Za poljubna $m, n \geq N$ je potem po trikotniški neenakosti

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)|, \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Iz pogoja v trditvi sledi, da je zaporedje $(f_n(x))$ Cauchyjevo za vsak $x \in D$. To pomeni, da je konvergentno, zato zaporedje funkcij $(f_n)$ po točkah konvergira k neki funkciji $f : D \to \mathbb{R}$. Izberimo sedaj poljuben $\epsilon > 0$. Potem obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da za vsaka $m, n \geq N$ in za vsak $x \in D$ velja $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon/2$. Torej za vsak $x \in D$ in za vsak $n \geq N$ velja

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \to \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

$\square$

**Trditev 13.** *Naj bo* ($f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) *zaporedje zveznih funkcij, ki konvergira enakomerno na* $D$ *k funkciji* $f : D \to \mathbb{R}$. *Tedaj je tudi funkcija* $f$ *zvezna.*

*Dokaz.* Pokazali bomo, da je funkcija $f$ zvezna v poljubni točki $x \in D$. Izberimo torej $\epsilon > 0$. Ker zaporedje $(f_n)$ enakomerno konvergira k $f$, lahko najdemo tak $n$, da za vsak $y \in D$ velja $|f_n(y) - f(y)| < \epsilon/3$. Ker je $f_n$ zvezna v točki $x$, lahko nadalje najdemo tak $\delta > 0$, za vsak $y \in D$, ki zadošča $|x - y| < \delta$, velja $|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon/3$. Z uporabo trikotniške neenakosti tako dobimo, da za vsak $y \in (x - \delta, x + \delta)$ velja

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|, \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

$\square$

**Posledica 14.** *Naj bo* $\sum f_n$ *vsota zveznih funkcij* $f_n : D \to \mathbb{R}$, *ki enakomerno konvergira k funkciji* $g : D \to \mathbb{R}$. *Tedaj je funkcija* $g$ *zvezna.*

**Trditev 15.** *Naj bo* ($f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$) *zaporedje integrabilnih funkcij, ki enakomerno konvergira k funkciji* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Tedaj je tudi funkcija* $f$ *integrabilna na* $[a, b]$ *in velja*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

*Dokaz.* Ker so vse funkcije $f_n$ integrabilne, so omejene, zato je tudi njihova enakomerna limita $f$ omejena. Označimo

$$\epsilon_n = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|.$$

Potem za vsak $x \in [a, b]$ velja

$$f_n(x) - \epsilon_n \leq f(x) \leq f_n(x) + \epsilon_n.$$

Od tod sledi

$$\int_a^b f_n(x)\,dx - \epsilon_n(b - a) = \int_a^b (f_n(x) - \epsilon_n)\,dx \leq \int_{\underline{a}}^b f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b f_n(x)\,dx + \epsilon_n(b - a) = \int_a^b (f_n(x) + \epsilon_n)\,dx \geq \int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx,$$

kar nam da oceno

$$0 \leq \int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx - \int_{\underline{a}}^b f(x)\,dx \leq 2\epsilon_n(b - a).$$

Ker zaporedje $(f_n)$ konvergira k $f$ enakomerno, je $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$, zato je funkcija $f$ integrabilna in velja

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

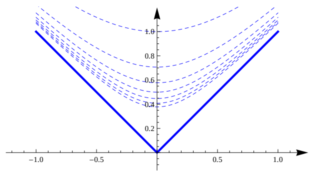
□

Zgornja trditev nam pove, da je enakomerna limita integrabilnih funkcij spet integrabilna funkcija in da lahko zamenjamo vrstni red limite in pa integrala, saj lahko enakost iz trditve zapišemo tudi v obliki

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Naslednji zgled nam bo pokazal, da so pri odvodu stvari bolj zapletene.

**Zgled.** Vzemimo zaporedje funkcij $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$, definiranih s predpisi $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. To zaporedje konvergira enakomerno k $f(x) = |x|$.



Čeprav so vse funkcije $f_n$ odvedljive in konvergirajo enakomerno k $f$, funkcija $f$ ni odvedljiva v točki $x = 0$. Izkaže se, da zaporedje odvodov $(f'_n)$ konvergira po točkah (vendar ne enakomerno) k funkciji

$$g(x) = \begin{cases} 1 & ;\ x > 0, \\ -1 & ;\ x < 0, \\ 0 & ;\ x = 0. \end{cases}$$

Kot bomo videli v naslednji trditvi, lahko zamenjamo vrstni red odvoda in limite, če zaporedje odvodov konvergira enakomerno.

**Trditev 16.** *Naj bo zaporedje funkcij $(f_n : (a,b) \to \mathbb{R})$ konvergentno v neki točki $x_0 \in (a,b)$ in denimo, da so vse funkcije odvedljive na $(a,b)$ in da zaporedje odvodov $(f'_n)$ konvergira enakomerno k funkciji $g : (a,b) \to \mathbb{R}$. Tedaj zaporedje funkcij $(f_n)$ enakomerno konvergira k neki odvedljivi funkciji $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, za katero velja $f' = g$.*

*Dokaz.* Najprej bomo pokazali, da zaporedje $(f_n)$ enakomerno konvergira. Izberimo $\epsilon > 0$. Ker zaporedje $(f'_n)$ enakomerno konvergira, obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da za vsaka $m, n \geq N$ in za vsak $\xi \in (a,b)$ velja

$$|f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Če uporabimo Lagrangeev izrek za funkcijo $f_n - f_m$ na intervalu med $x$ in $t$, kjer sta $x, t \in (a, b)$, dobimo

$$|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(t) - f_m(t))| = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)||x - t| < \frac{\epsilon|x - t|}{2(b - a)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Predpostavimo lahko tudi, da je $N$ tako velik, da za $m, n \geq N$ velja

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Če pišemo $t = x_0$, lahko iz zadnjih dveh ocen dobimo oceno

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_m(x)| &\leq |(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|, \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,\end{aligned}$$

ki velja za vsak $x \in (a, b)$ in za vsaka $m, n \geq N$. Po Cauchyjevem pogoju od tod sledi, da zaporedje $(f_n)$ konvergira enakomerno na $(a, b)$ k neki funkciji $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

Pokazati moramo še, da je funkcija $f$ odvedljiva in da velja $f' = g$. Izberimo $x \in (a, b)$. Za $t \in (a, b) \setminus \{x\}$ lahko potem definiramo

$$\begin{aligned}\phi_n(t) &= \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}, \\ \phi(t) &= \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.\end{aligned}$$

Izberimo sedaj $\epsilon > 0$. Pokazali smo že, da obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da imamo za vsaka $m, n \geq N$ in za vsaka $x, t \in (a, b)$ oceno

$$|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(t) - f_m(t))| < \frac{\epsilon|x - t|}{2(b - a)},$$

ki jo lahko prepišemo v

$$|\phi_n(t) - \phi_m(t)| < \frac{\epsilon}{2(b - a)}.$$

Od tod sledi, da zaporedje $(\phi_n)$ konvergira enakomerno na $(a, b) \setminus \{x\}$ k funkciji $\phi$. Sedaj si poglejmo oceno

$$|\phi(t) - g(x)| \leq |\phi(t) - \phi_n(t)| + |\phi_n(t) - f_n'(x)| + |f_n'(x) - g(x)|.$$

Ker konvergirata $(\phi_n)$ k $\phi$ in $(f_n')$ k $g$ enakomerno, lahko najdemo dovolj velik $n$, da za vsak $t \in (a, b) \setminus \{x\}$ in za $x$ veljata oceni

$$\begin{aligned}|\phi(t) - \phi_n(t)| &< \frac{\epsilon}{3}, \\ |f_n'(x) - g(x)| &< \frac{\epsilon}{3}.\end{aligned}$$

Poleg tega je po definiciji odvoda $\lim_{t\to x}\phi_n(t) = f_n'(x)$, zato lahko najdemo neko majhno okolico $V$ točke $x$, da za $t \in (V \cap (a,b)) \setminus \{x\}$ velja

$$|\phi_n(t) - f_n'(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Zadnje tri neenakosti nam skupaj povedo, da za $t \in V$ velja

$$|\phi(t) - g(x)| < \epsilon,$$

kar pa pomeni, da je $\lim_{t\to x}\phi(t) = g(x)$. Od tod sledi

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\phi(t) = g(x),$$

kar smo želeli pokazati. □

V primeru, ko so izpolnjeni pogoji iz trditve lahko torej zamenjamo vrstni red odvoda in limite, saj velja

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

**Posledica 17.** *Naj bo $\sum f_n$ vsota odvedljivih funkcij ($f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$), ki konvergira v neki točki $x_0 \in (a,b)$ in denimo, da vrsta $\sum f_n'$ konvergira enakomerno k funkciji $g : (a,b) \to \mathbb{R}$. Tedaj $\sum f_n$ enakomerno konvergira k neki odvedljivi funkciji $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, za katero velja $f' = g$.*

Rezultate iz tega poglavja bomo sedaj uporabili na konkretnem primeru realnih potenčnih vrst. Vzemimo potenčno vrsto $\sum a_n x^n$ s konvergenčnim polmerom $R$. Vsota te vrste je funkcija $f : (-R,R) \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Zanimale nas bodo lastnosti funkcije $f$.

**Trditev 18.** *Naj bo $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ realna potenčna vrsta s konvergenčnim polmerom $R$. Tedaj $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ enakomerno konvergira na $[-r,r]$ za vsak $0 \le r < R$.*

*Dokaz.* Izberimo poljuben $0 < r < R$. Radi bi pokazali, da vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ enakomerno konvergira na intervalu $[-r,r] \subset (-R,R)$.

Izberemo lahko tak $x_0$, da je $r < x_0 < R$. Ker je $x_0 < R$, zaporedje $(|a_n x_0^n|)$ konvergira proti nič in je torej omejeno. Torej lahko najdemo tak $M$, da za vsak $n \ge 0$ velja

$$|a_n x_0^n| \le M.$$

Poleg tega za vsak $x \in [-r, r]$ velja

$$0 \leq \left|\frac{x}{x_0}\right| \leq \left|\frac{r}{x_0}\right| = q < 1.$$

Ti oceni nam omogočata, da potenčno vrsto majoriziramo s konvergentno geometrijsko vrsto. Imamo namreč

$$|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| \leq M q^n,$$

kar pomeni, da za $n > m$ velja

$$|S_n - S_m| = |a_{m+1}x^{m+1} + \ldots + a_n x^n| \leq M(q^{m+1} + \ldots + q^n).$$

Če sta $m$ in $n$ dovolj velika, je izraz na desni poljubno majhen, zato po Cauchyjevem kriteriju vrsta $\sum a_n x^n$ enakomerno konvergira na $[-r, r]$. $\square$

**Trditev 19.** *Naj bo* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *realna potenčna vrsta s konvergenčnim polmerom* $R$ *in naj bo* $f$ *funkcija, ki je vsota te vrste na* $(a - R, a + R)$. *Potem velja:*

(*i*) *Funkcija* $f$ *je odvedljiva na intervalu* $(a - R, a + R)$.

(*ii*) *Tudi vrsta* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ *ima konvergenčni polmer* $R$, *njena vsota na intervalu* $(a - R, a + R)$ *pa je* $f'$.

*Dokaz.* (ii) Najprej pokažimo, da je konvergenčni polmer vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ enak $R$. To sledi iz enakosti:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|n a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sup \left(\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{|a_n|}\right), \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}, \\
&= 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}, \\
&= \frac{1}{R}.
\end{aligned}$$

(i) Odvedljivost vsote potenčne vrste sledi iz Trditve 18 in iz Posledice 17. Prav tako od tod sledi, da je

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

$\square$

**Zgled.** (1) Najprej vzemimo eksponentno vrsto

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Če jo členoma odvajamo, dobimo

$$(e^x)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \overset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x,$$

kot smo pričakovali.

(2) Logaritemska vrsta

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

ima konvergenčni polmer $R = 1$. Enakomerno konvergira na vsakem zaprtem podintervalu intervala $(-1, 1)$, vendar pa ne konvergira enakomerno na celem intervalu. To je posledica tega, da je njena vsota neomejena, vsaka končna delna vsota pa je omejena. Pri odvajanju logaritemske vrste dobimo geometrijsko vrsto

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots,$$

ki konvergira za $|x| < 1$.

(3) Taylorjeva vrsta sinusne funkcije

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

ima konvergenčni polmer $R = \infty$. Z odvajanjem dobimo vrsto

$$(\sin x)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

ki jo lahko prepoznamo kot Taylorjevo vrsto kosinusne funkcije.

(4) Za konec si poglejmo še binomsko vrsto

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

s konvergenčnim polmerom $R = 1$. Če jo odvajamo po členih, dobimo

$$\alpha(1+x)^{\alpha-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1}$$

oziroma

$$(1+x)^{\alpha-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\alpha} \binom{\alpha}{n} x^{n-1} \overset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k} x^k.$$

Funkcijam, ki jih lahko v okolici vsake točke iz definicijskega območja zapišemo s Taylorjevo vrsto, rečemo analitične funkcije. Če ima Taylorjeva vrsta neskončen konvergenčni polmer, pa takšni funkciji rečemo cela funkcija. Primera analitičnih funkcij sta logaritemska in racionalna funkcija, primeri celih funkcij pa eksponentna, sinusna in kosinusna funkcija.