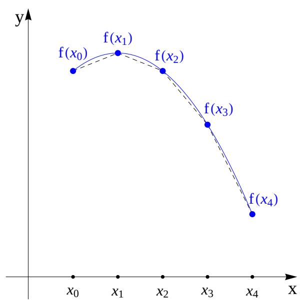
Uporaba integrala

Ideje, povezane z integracijo, se pojavljajo na mnogih različnih področjih. Od matematike in fizike, pa do uporabnih ved kot sta na primer strojništvo in gradbeništvo. S pomočjo integralov lahko računamo površine in volumne teles, dolžine krivulj, središča in težišča likov oziroma teles, vztrajnostne momente... Pri tem predmetu se bomo omejili na računanje dolžin, ploščin, površin in volumnov. Za računanje težišč in vztrajnostnih momentov pa je bolj elegantno uporabiti večkratne integrale.

Dolžine krivulj

Krivulja kot graf funkcije

Pričeli bomo s študijem dolžine ravninskih krivulj. Recimo, da bi radi izračunali dolžino grafa zvezno odvedljive funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (odvedljivost v robnih točkah pomeni, da je f zvezno odvedljiva na nekem večjem intervalu (c, d), ki vsebuje $[a, b]$). Aproksimacijo za dolžino grafa bomo dobili na naslednji način. Najprej si izberimo delitev $D = \{x_k\}_{k=0}^{k=n}$ intervala $[a, b]$. Graf funkcije f potem razpade na unijo n lokov (po en lok nad vsakim izmed podintervalov). Vsakega izmed teh lokov aproksimiramo z daljico s krajišči v robnih točkah loka, cel graf pa s poligonalno črto, ki jo tvorijo te daljice.



S pomočjo Pitagorovega izreka dobimo dolžino te črte

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Dolžina te črte se ne ujema natančno z dolžino grafa funkcije, saj je v splošnem nekoliko manjša. Pri tej aproksimaciji smo namreč vzeli nekaj točk na grafu in jih povezali z najkrajšimi možnimi potmi med njimi. Če nanje napnemo ukrivljene loke, pa bomo s tem kvečjemu povečali skupno dolžino lokov. Pri čedalje finejši delitvi se bodo loki čedalje bolj ujemali z daljicami, zato pričakujemo, da bomo v limiti, ko bodo šle dolžine podintervalov proti nič, dobili ravno dolžino grafa funkcije. To nas že spominja na definicijo določenega integrala, malce pa se moramo še potruditi, da ugotovimo, kateri izraz moramo pravzaprav integrirati.

Po Lagrangeevem izreku lahko na vsakem intervalu $[x_{k-1}, x_k]$ najdemo takšno točko ξ_k, da velja

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

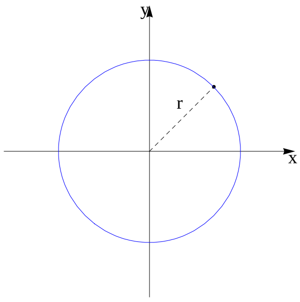
Potem pa lahko zapišemo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(\xi_k)\Delta x_k)^2}, \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}.\end{aligned}$$

V tem izrazu prepoznamo Riemannovo vsoto zvezno odvedljive funkcije $\sqrt{1+f'^2}$ na intervalu $[a, b]$, prirejeno delitvi D in izbiri točk $\{\xi_k\}$. Limita Riemannovih vsot je enaka določenemu integralu te funkcije, kar pomeni, da je dolžina grafa K funkcije f na intervalu $[a, b]$ enaka

$$s(K) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Zgled. Izračunajmo z zgornjo formulo obseg krožnice s polmerom r. Cele krožnice sicer eksplicitno ne moremo podati z grafom funkcije, lahko pa definiramo polkrožnico kot graf funkcije $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.



Odvod funkcije f je enak

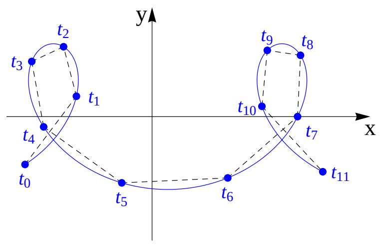
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

od tod pa dobimo

$$\begin{aligned}s(K) &= 2\int_{-r}^{r} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx, \\ &= 2\int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx, \\ &= 2r \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\Big|_{-r}^{r}, \\ &= 2r\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right), \\ &= 2\pi r.\end{aligned}$$

Parametrično podana krivulja

Predvsem v fiziki krivulje (trajektorije delcev) podajamo v parametrični obliki. Za opis ravninske krivulje potrebujemo par funkcij oziroma vektorsko funkcijo
$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$
za $t \in [\alpha, \beta]$. Vsaka vrednost parametra t določa neko točko v ravnini, ko t preteče cel interval $[\alpha, \beta]$, pa tako dobimo neko krivuljo. V fiziki s parametrom t označujemo čas, vektorska funkcija $\vec{r}$ pa določa gibanje točke po ravnini. Lahko si mislimo, da je dolžina krivulje, ki jo bomo izračunali, enaka dolžini poti, ki jo opravi točka.



Najprej si izberimo delitev $D = \{t_k\}_{k=0}^{k=n}$ intervala $[\alpha, \beta]$ in podobno kot prej našo krivuljo aproksimirajmo z lomljeno črto. Dolžina lomljene črte je v tem primeru

$$s(L) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}.$$

Lagrangeev izrek za funkciji x oziroma y nam potem pove, da obstajata $\xi_k, \zeta_k \in [t_{k-1}, t_k]$, da velja

$$\begin{aligned} x(t_k) - x(t_{k-1}) &= \dot{x}(\zeta_k)\Delta t_k, \\ y(t_k) - y(t_{k-1}) &= \dot{y}(\xi_k)\Delta t_k. \end{aligned}$$

Izraz za dolžino poligonalne črte se tako poenostavi v

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} = \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k \sqrt{\dot{x}(\zeta_k)^2 + \dot{y}(\xi_k)^2}.$$

V limiti, ko gredo dolžine podintervalov proti nič, sta si ξ_k in ζ_k čedalje bolj blizu, zato lahko vzamemo kar $\zeta_k = \xi_k$ in dobimo

$$\lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k \sqrt{\dot{x}(\zeta_k)^2 + \dot{y}(\xi_k)^2} = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k \sqrt{\dot{x}(\xi_k)^2 + \dot{y}(\xi_k)^2}.$$

V tem izrazu prepoznamo limito Riemannovih vsot za funkcijo $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ na intervalu $[\alpha, \beta]$, od koder sklepamo, da je dolžina parametrično podane krivulje K enaka

$$s(K) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt.$$

Graf funkcije je poseben primer parametrično podane krivulje. Če je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva, lahko njen graf opišemo tudi s parametrizacijo

$$\begin{aligned} x(t) &= t, \\ y(t) &= f(t), \end{aligned}$$

za $t \in [a, b]$. Potem je $\dot{x}(t) = 1$ in $\dot{y}(t) = f'(t)$, od tod pa sledi

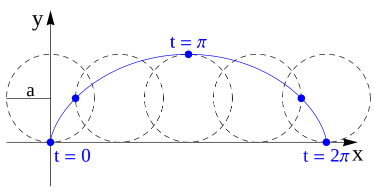
$$\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt$$

Podoben račun velja tudi v primeru, ko x koordinate ne parametriziramo linearno, ampak z neko naraščajočo funkcijo $x = x(t)$.

Zgled. Kot primer uporabe zgornje formule izračunajmo dolžino enega loka cikloide. Podamo ga lahko parametrično s predpisom

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t - \sin t), \\ y(t) &= a(1 - \cos t), \end{aligned}$$

kjer je a pozitivna konstanta, parameter t pa teče po intervalu $[0, 2\pi]$.



Geometrično lahko opišemo cikloido kot krivuljo, ki jo opiše točka na obodu krožnice s polmerom a pri kotaljenju po premici.

Za odvoda te parametrizacije velja $\dot{x}(t) = a(1 - \cos t)$ in $\dot{y}(t) = a \sin t$, od koder lahko izpeljemo

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}.$$

Torej je dolžina enega loka cikloide enaka

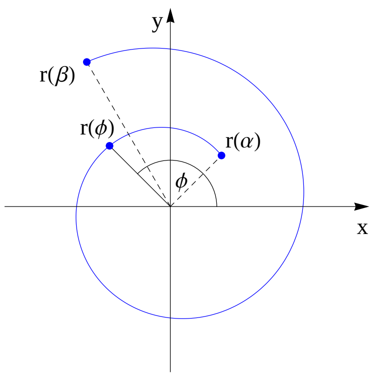
$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2}\, dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

Krivulja, podana v polarnih koordinatah

V posebnem primeru lahko za parameter ravninske krivulje vzamemo polarni kot. Spomnimo se, da imamo naslednjo zvezo med kartezičnimi in polarnimi koordinatami točke

$$x = r\cos\phi,$$
$$y = r\sin\phi.$$

Namesto, da bi podali koordinati x in y kot funkciji spremenljivke t, bomo podali razdaljo točke od izhodišča $r = r(\phi)$ kot funkcijo polarnega kota ϕ. Ko rišemo graf takšne krivulje, po eni strani enakomerno krožimo okoli izhodišča, zraven pa se mu približujemo oziroma oddaljujemo od njega, odvisno od funkcije $r(\phi)$. Polarni kot je klasično sicer definiran samo za $\phi \in [0, 2\pi]$, pri risanju pa nimamo problemov tudi če ϕ prekorači meje tega intervala. V tem primeru namreč samo odštejemo ustrezen večkratnik 2π in nadaljujemo z risanjem.



Formalno krivuljo v polarnih koordinatah podamo z zvezno odvedljivo funkcijo $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Če upoštevamo, da je

$$x(\phi) = r(\phi)\cos\phi,$$
$$y(\phi) = r(\phi)\sin\phi,$$

od tod sledi

$$x'(\phi) = r'(\phi)\cos\phi - r(\phi)\sin\phi,$$
$$y'(\phi) = r'(\phi)\sin\phi + r(\phi)\cos\phi.$$

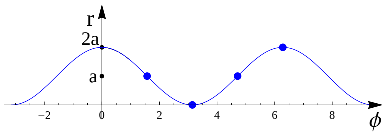
Za izračun dolžine krivulje moramo najprej izraziti vsoto kvadratov teh dveh odvodov

$$\begin{aligned} x'(\phi)^2 + y'(\phi)^2 &= (r'(\phi)\cos\phi - r(\phi)\sin\phi)^2 + (r'(\phi)\sin\phi + r(\phi)\cos\phi)^2, \\ &= r(\phi)^2 + r'(\phi)^2. \end{aligned}$$

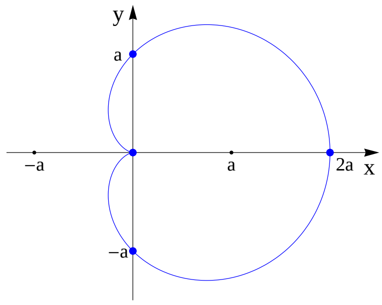
Od tod dobimo formulo za dolžino krivulje K, podane v polarnih koordinatah

$$s(K) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r(\phi)^2 + r'(\phi)^2}\, d\phi.$$

Zgled. Izračunajmo dolžino krivulje, ki je podana v polarnih koordinatah s predpisom $r(\phi) = a(1 + \cos\phi)$ za nek $a > 0$. Graf funkcije r ima obliko



Vidimo, da je funkcija r 2π-periodična, kar pomeni, da je naša krivulja sklenjena. Skiciramo jo tako, da si izberemo nekaj točk na njej, potem pa skoznje poskusimo narisati krivuljo, upoštevajoč, kako se spreminja razdalja točke od izhodišča.



Zaradi njene oblike tej krivulji rečemo kardioida. Gladka je povsod, razen v koordinatnem izhodišču, kjer ima ost. To je posledica singularnosti polarnih koordinat pri $r = 0$.

Za izračun obsega kardioide najprej opazimo, da je $r'(\phi) = -a\sin\phi$. Od tod sledi

$$\begin{aligned}
\sqrt{r(\phi)^2 + r'(\phi)^2} &= \sqrt{a^2(1+\cos\phi)^2 + a^2\sin^2\phi}, \\
&= \sqrt{2a^2(1+\cos\phi)}, \\
&= \sqrt{4a^2\cos^2\frac{\phi}{2}}.
\end{aligned}$$

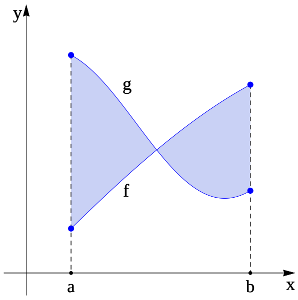
Pri korenjenju moramo biti pozorni, saj je $\sqrt{4a^2\cos^2\frac{\phi}{2}} = 2a\cos\frac{\phi}{2}$ samo za $\phi \in [0, \pi]$, v splošnem pa velja $\sqrt{4a^2\cos^2\frac{\phi}{2}} = 2a\left|\cos\frac{\phi}{2}\right|$. Da bi se izognili integriranju absolutnih vrednosti, bomo upoštevali, da je kardioida simetrična glede na abscisno os, zato je dovolj izračunati dolžino njene zgornje polovice.

$$s(K) = 2\int_0^{\pi} \sqrt{r(\phi)^2 + r'(\phi)^2}\, d\phi = 2\int_0^{\pi} 2a\cos\frac{\phi}{2}\, d\phi = 8a\sin\frac{\phi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

Ploščine likov

Ploščina lika med grafoma funkcij

Ta primer smo pravzaprav že obravnavali v poglavju o določenem integralu. Naj bosta $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji. Zanima nas lik, ki je omejen z osema $x = a$, $x = b$ in pa z grafoma funkcij f in g.



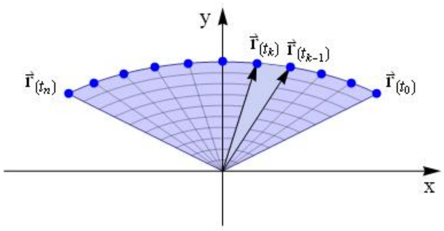
Ploščina tega lika je enaka

$$pl = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx.$$

V praksi ta integral izračunamo z razbitjem integracijskega intervala $[a, b]$ na dva kosa, glede na predznak funkcije $f - g$. Nato izračunamo vsak integral posebej.

Ploščina lika, ki ga omejuje parametrično podana krivulja

Naj bo sedaj $\vec{r} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ parametrizacija neke krivulje v ravnini. Med gibanjem opišejo zveznice točk na krivulji s koordinatnim izhodiščem nek lik. Za začetek bomo privzeli, da dana parametrizacija opisuje gibanje točke v pozitivni smeri okoli izhodišča.



Izberimo poljubno delitev $D = \{t_k\}_{k=0}^{k=n}$ intervala $[\alpha, \beta]$. Naš lik bomo aproksimirali s trikotniki z oglišči v točkah $\{0, \vec{r}(t_{k-1}), \vec{r}(t_k)\}$. Označimo $x_k = x(t_k)$ in $y_k = y(t_k)$. Ploščina enega takšnega trikotnika je potem enaka

$$\frac{|\vec{r}(t_{k-1}) \times \vec{r}(t_k)|}{2} = \frac{x_{k-1}y_k - x_k y_{k-1}}{2} = \frac{x_{k-1}(y_k - y_{k-1}) - (x_k - x_{k-1})y_{k-1}}{2}.$$

Z uporabomo Lagrangeevega izreka za funkciji x oziroma y lahko najdemo $\xi_k, \zeta_k \in [t_{k-1}, t_k]$, da velja

$$\begin{aligned} x_k - x_{k-1} &= \dot{x}(\zeta_k)\Delta t_k, \\ y_k - y_{k-1} &= \dot{y}(\xi_k)\Delta t_k. \end{aligned}$$

Ploščina aproksimacije našega lika je tako enaka

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x(t_{k-1})\dot{y}(\xi_k) - \dot{x}(\zeta_k)y(t_{k-1})}{2}\Delta t_k.$$

Podobno kot pri računanju dolžine krivulj se tudi tu izkaže, da lahko vzamemo pri računanju limite, ko gredo dolžine podintervalov proti nič, da je $t_{k-1} = \zeta_k = \xi_k$. Tako dobimo, da je ploščina lika, ki ga opišejo zveznice točk na krivulji s koordinatnim izhodiščem, enaka

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))\, dt.$$

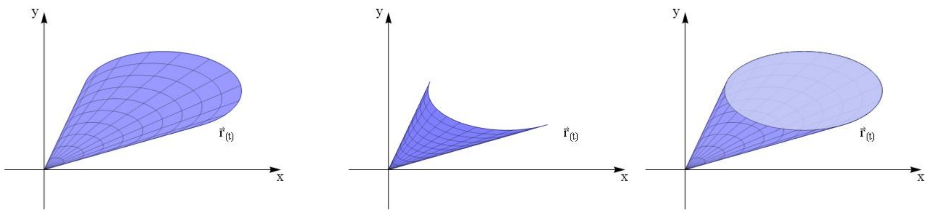
Izraz

$$\dot{S}(t) = \frac{1}{2}(x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))$$

fizikalno interpretiramo kot ploščinsko hitrost gibanja točke okoli izhodišča. Pomembno vlogo igra v Keplerjevem zakonu pri opisu gibanja točke v polju gravitacijske sile. V našem primeru nam zgornja formula pove, da je integral ploščinske hitrosti po času enak ploščini lika, ki ga opiše točka. Če je ploščinska hitrost konstantna, od tod sledi, da točka v enakih časovnih intervalih opiše like z enakimi ploščinami.

Ploščinska hitrost točke je pozitivna natanko takrat, ko se točka giblje v pozitivni smeri okoli izhodišča. Če se giblje v negativni smeri, dobimo negativno predznačeno ploščino lika, ki ga opiše med gibanjem. V splošnem pa je zgornji integral enak razliki ploščin likov, ki ju opiše med gibanjem v pozitivni oziroma v negativni smeri.

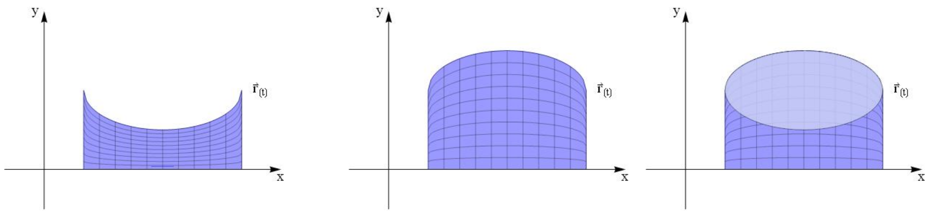
V primeru, ko je krivulja sklenjena, nam zgornji integral predstavlja ploščino lika, ki ga krivulja omejuje, če točka obkroži lik v pozitivni smeri.



Če nas zanima ploščina lika med krivuljo in abscisno osjo, postopamo na naslednji način. Recimo, da je na $[\alpha, \beta]$ ves čas $y(t) > 0$ in $\dot{x}(t) > 0$ (to pomeni, da se točka premika v desno). Potem je $dx = \dot{x}\, dt$, od koder sledi

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\dot{x}(t)\, dt.$$

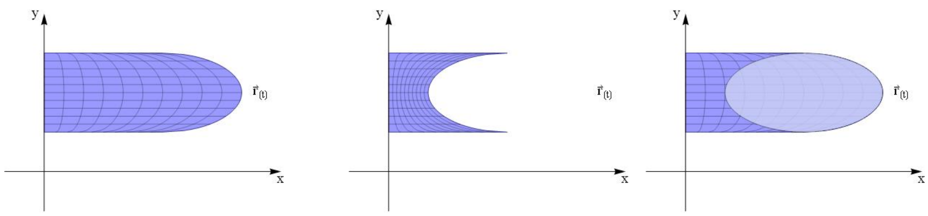
Če je $\dot{x}(t) < 0$, se točka premika v levo, ta integral pa predstavlja negativno predznačeno ploščino lika. V kolikor je krivulja sklenjena, pa je integral enak negativno predznačeni ploščini lika, ki ga krivulja omejuje, če lik obkrožimo v pozitivni smeri.



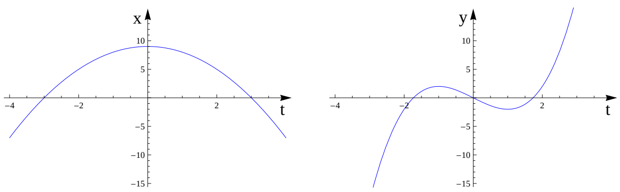
Študiramo lahko tudi ploščino lika med ordinatno osjo in krivuljo. Če je $\dot{y}(t) > 0$ in $x(t) > 0$, je njegova ploščina enaka

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)\dot{y}(t)\,dt.$$

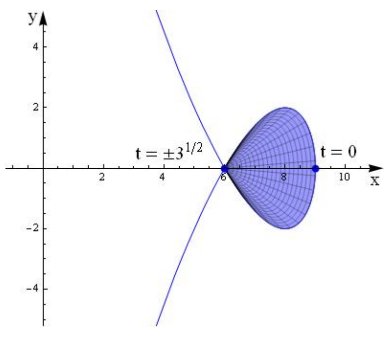
Če je $\dot{y}(t) < 0$, dobimo negativno predznačeno ploščino lika, če pa je krivulja sklenjena, pa je integral enak ploščini lika, ki ga krivulja omejuje. Spet moramo privzeti, da točka obkroži lik v pozitivni smeri.



Zgled. Izračunajmo ploščino lika, ki ga omejuje parametrično podana krivulja $\vec{r}(t) = (9 - t^2, t^3 - 3)$ za $t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Najprej skicirajmo grafa funkcij x in y.



Poglejmo še krivuljo in pa lik.



Točka se na intervalu $t \in (-\infty, 0)$ premika v desno, na intervalu $t \in (0, \infty)$ pa v levo. Na $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ se točka premika navzgor, na $(-1, 1)$ pa navzdol. Lik, katerega ploščino iščemo, opiše na intervalu $t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

Odvoda koordinat x in y sta $\dot{x} = -2t$ in $\dot{y} = 3t^2 - 3$. Od tod dobimo

$$\begin{aligned} y\dot{x} &= (t^3 - 3t)(-2t) = 6t^2 - 2t^4, \\ x\dot{y} &= (9 - t^2)(3t^2 - 3) = -3t^4 + 30t^2 - 27. \end{aligned}$$

Ker imamo opravka s sklenjeno krivuljo, lahko ploščino izračunamo na več načinov. Z integracijo v vodoravni smeri dobimo

$$S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} y\dot{x}\, dt = 2\int_0^{\sqrt{3}} (6t^2 - 2t^4)\, dt = \left(4t^3 - \frac{4t^5}{5}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{5}.$$

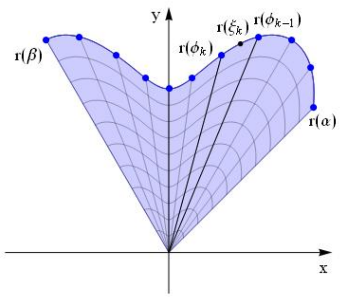
Če integriramo v navpični smeri, pa dobimo

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x\dot{y}\, dt = 2\int_0^{\sqrt{3}} (-3t^4 + 30t^2 - 27)\, dt, \\ &= \left(-\frac{6t^5}{5} + 20t^3 - 54t\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}, \\ &= -\frac{24\sqrt{3}}{5}. \end{aligned}$$

Vidimo, da dobimo pri integraciji po x pozitiven predznak, pri integraciji po y pa negativen predznak. To je obratno kot v formulah, ki smo jih omenili zgoraj. Razlog pa je v tem, da točka obkroži lik v negativni smeri.

Ploščina lika, podanega v polarnih koordinatah

Za konec si poglejmo še primer, ko imamo v polarnih koordinatah podano krivuljo s predpisom $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Zanima nas ploščina lika, ki ga opišejo zveznice točk na krivulji s koordinatnim izhodiščem.



Za izračun ploščine tega lika si najprej izberimo neko delitev $D = \{\phi_k\}_{k=0}^{k=n}$ intervala $[\alpha, \beta]$ in pa neko izbiro točk $\xi_k \in [\phi_{k-1}, \phi_k]$. Poltraki iz izhodišča, ki ustrezajo točkam delitve D, razdelijo naš lik na n rezin. Sedaj bomo vsako izmed teh rezin aproksimirali s krožnim izsekom (k-ti izsek ima polmer $r(\xi_k)$). Ploščina k-tega izseka je tako enaka

$$r(\xi_k)^2 \cdot \frac{\Delta\phi_k}{2},$$

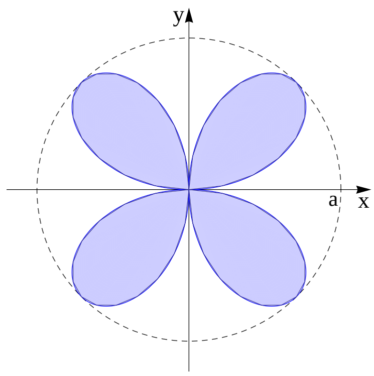
ploščina aproksimacije našega lika pa

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} r(\xi_k)^2 \Delta\phi_k.$$

V tem izrazu prepoznamo Riemannovo vsoto funkcije $\frac{1}{2}r^2$ na intervalu $[\alpha, \beta]$, prirejeno delitvi D in izbiri delilnih točk $\{\xi_k\}$. Ko pošljemo dolžine podintervalov v delitvah proti nič, dobimo v limiti, da je ploščina lika enaka

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\phi)^2 \, d\phi.$$

Zgled. Izračunajmo ploščino lika, ki ga omejuje krivulja, ki je v polarnih koordinatah podana s predpisom $r(\phi) = a|\sin 2\phi|$, za nek $a > 0$.



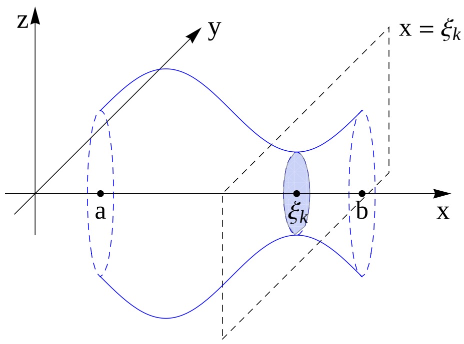
Najprej opazimo, da je lik sestavljen iz štirih enako velikih delov, zato je dovolj izračunati ploščino lika, ki ga omejuje krivulja pri $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Na tem intervalu se namreč lahko izognemo absolutnim vrednostim. Sledi

$$\begin{aligned} pl &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 2\phi \, d\phi, \\ &= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4\phi}{2} \, d\phi, \\ &= a^2 \left(\phi - \frac{\sin 4\phi}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}, \\ &= \frac{\pi a^2}{2}. \end{aligned}$$

Volumni teles

Za računanje volumnov teles je najprimerneje uporabiti trojne integrale. Če pa lahko dano telo razdelimo na rezine v obliki preprostih geometrijskih likov (na primer krogov, trikotnikov ali kvadratov), pa lahko njegov volumen izračunamo tudi s pomočjo enojnega integrala.

Denimo, da imamo telo v prostoru, ki leži med ravninama $x = a$ in $x = b$.



Za vsak $x_0 \in [a, b]$ je prerez tega telesa z ravnino $x = x_0$ nek lik, katerega ploščino označimo z $S(x_0)$. V lepih primerih tako pridemo do zvezne funkcije $S : [a, b] \to \mathbb{R}$. Izberimo sedaj neko delitev $D = \{x_k\}_{k=0}^{k=n}$ intervala $[a, b]$ in neko izbiro delilnih točk $\{\xi_k\}$. Našo telo bomo sedaj aproksimirali z unijo rezin, ki jih dobimo tako, da lik, pripadajoč točki ξ_k odebelimo na cel interval $[x_{k-1}, x_k]$. Volumen tako dobljene aproksimacije je enak

$$\sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k.$$

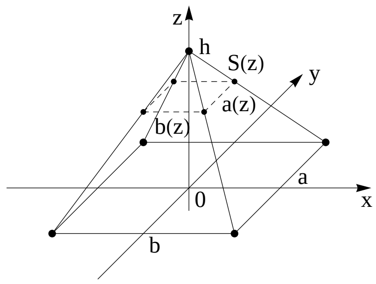
Če izberemo čedalje finejše delitve, bomo lahko naše telo poljubno dobro aproksimirali z unijo rezin, v limiti pa dobimo, da velja

$$V = \int_a^b S(x)\, dx.$$

Rotacijska telesa oziroma *vrtenine* so telesa, katerih volumne najlažje računamo s pomočjo enojnih integralov. Vrtenina je telo, katerega plašč dobimo z vrtenjem grafa zvezne funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ okoli abscisne osi. Prerez pri dani x koordinati je v tem primeru krog s ploščino $S(x) = \pi f(x)^2$. Za volumen vrtenine pa dobimo formulo

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx.$$

Zgled. (1) Za začetek izračunajmo volumen štiristrane piramide, ki ima višino h, njena osnovna ploskev pa je pravokotnik s stranicama dolžine a in b. Postavimo koordinatni sistem, tako da bo osnovna ploskev piramide ležala v xy-ravnini, vrh piramide pa na z-osi.



Če piramido presekamo z ravninami, ki so vzporedne xy-ravnini, dobimo spet pravokotnike. Dolžina njihovih stranic linearno pada od a oziroma b do 0. Na višini z sta ustrezni stranici dolgi

$$a(z) = a\left(1 - \frac{z}{h}\right),$$
$$b(z) = b\left(1 - \frac{z}{h}\right),$$

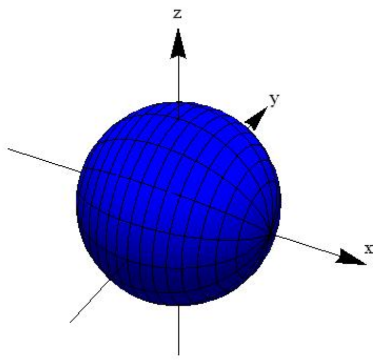
pravokotnik na višini z pa ima ploščino

$$S(z) = ab\left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 = \frac{ab(h-z)^2}{h^2}.$$

Tako smo prišli do zvezne funkcije $S : [0, h] \to \mathbb{R}$. Za izračun volumna piramide moramo izračunati določeni integral te funkcije. Tako dobimo

$$V = \int_0^h S(z)\,dz = \int_0^h \frac{ab(h-z)^2}{h^2}\,dz = -\frac{ab}{3h^2}(h-z)^3\Big|_0^h = \frac{abh}{3}.$$

(2) Krogla s polmerom R je primer vrtenine, ki jo dobimo z vrtenjem grafa funkcije $f : [-R, R] \to \mathbb{R}$, dane s predpisom $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, okoli abscisne osi.

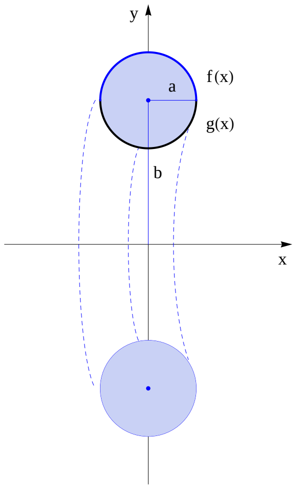


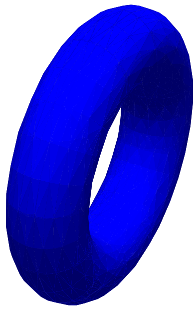
Od tod sledi, da je volumen krogle s polmerom R enak

$$V = \pi \int_{-R}^{R} f(x)^2\, dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Ta formula je seveda zelo znana, mi pa smo jo sedaj tudi izpeljali.

(3) Za konec izračunajmo še volumen torusa z velikim polmerom b in s polmerom cevi a.



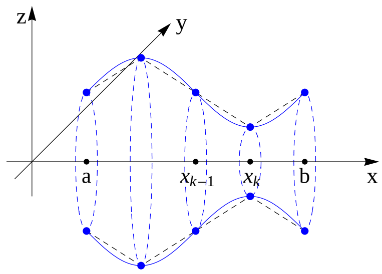


Torus dobimo z vrtenjem kroga, ki ga od spodaj omejuje graf funkcije $g(x) = b - \sqrt{a^2 - x^2}$, od zgoraj pa graf funkcije $f(x) = b + \sqrt{a^2 - x^2}$. Sledi

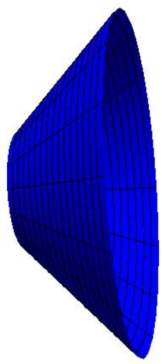
$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-a}^{a} f(x)^2\, dx - \pi \int_{-a}^{a} g(x)^2\, dx, \\
&= \pi \int_{-a}^{a} \left(\left(b + \sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 - \left(b - \sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 \right) dx, \\
&= 4\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx, \\
&= 4\pi ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\, \cos t\, dt; \qquad\qquad x = a \sin t, \\
&= 4\pi a^2 b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt, \\
&= 4\pi a^2 b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt, \\
&= 2\pi a^2 b \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}, \\
&= 2\pi^2 a^2 b.
\end{aligned}$$

Površina rotacijskega telesa

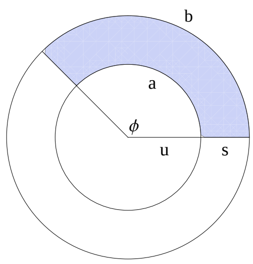
Spet vzemimo krivuljo $y = f(x)$, kjer je f zvezna pozitivna funkcija, in jo rotirajmo okoli osi x na intervalu $[a, b]$.



Vzemimo delitev $D = \{x_k\}_{k=0}^{k=n}$ intervala $[a, b]$ in naj bo $y_k = f(x_k)$. Krivuljo $y = f(x)$ bomo, podobno kot pri izračunu dolžine loka, aproksimirali s poligonalno črto. Pri rotaciji te poligonalne črte okoli abscisne osi bomo dobili telo, katerega plašč je sestavljen iz n plaščev prisekanih stožcev.



Najprej bomo izračunali površino enega takšnega prisekanega stožca, tako da ga bomo prerezali in razgrnili v ravnino.



Označimo $k_0 = \frac{\phi}{2\pi}$. Pri oznakah s slike je potem

$$a = 2\pi y_{k-1} = 2\pi u k_0,$$
$$b = 2\pi y_k = 2\pi(u + s)k_0.$$

Od tod sledi $y_{k-1} = uk_0$, $y_k = (u+s)k_0$ in

$$y_k - y_{k-1} = (u+s)k_0 - uk_0 = sk_0.$$

Površina plašča prisekanega stožca je tako enaka

$$\begin{aligned}
S &= (\pi(u+s)^2 - \pi u^2)k_0, \\
&= \pi \left(\frac{y_k^2}{k_0^2} - \frac{y_{k-1}^2}{k_0^2} \right) k_0, \\
&= \pi \left(y_k^2 - y_{k-1}^2 \right) \frac{1}{k_0}, \\
&= \pi \left(y_k + y_{k-1} \right) \frac{y_k - y_{k-1}}{k_0}, \\
&= \pi (y_k + y_{k-1}) s.
\end{aligned}$$

Stranica k-tega prisekanega stožca je $s = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}$. Če spet uporabimo Lagrangeev izrek, lahko najdemo točke $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, za katere je $y_k - y_{k-1} = f'(\xi_k)\Delta x_k$. Skupna površina aproksimacije je tako enaka

$$P(D) = \sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_k) + f(x_{k-1}))\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\Delta x_k.$$

Ker je funkcija f zvezna, bodo v limiti, ko gre $\Delta x_k \to 0$, točke x_k, x_{k-1} in ξ_k čedalje bolj skupaj, zato se bo limita izrazov $P(D)$ ujemala z limito Riemannovih vsot funkcije $2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}$. Zato lahko definiramo

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Recimo sedaj, da je krivulja podana v parametrični obliki $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ za $t \in [\alpha, \beta]$. Privzemimo še, da je $y(t) \geq 0$ na $[\alpha, \beta]$. Površina vrtenine, ki jo dobimo pri vrtenju krivulje okoli abscisne osi, je v tem primeru enaka

$$P = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt.$$

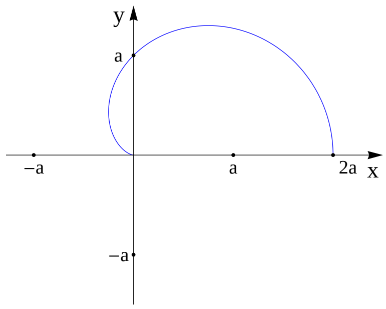
Če za parameter vzamemo polarni kot, krivuljo pa imamo podano v polarnih koordinatah $r = r(\phi)$ za $0 \leq \alpha \leq \phi \leq \beta \leq \pi$, je $x(\phi) = r(\phi)\cos\phi$ in $y(\phi) = r(\phi)\sin\phi$. V tem primeru je $\dot{x}(\phi)^2 + \dot{y}(\phi)^2 = r(\phi)^2 + r'(\phi)^2$ in

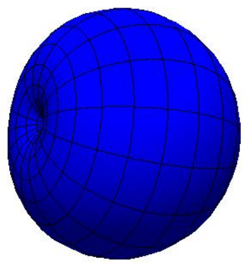
$$P = 2\pi \int_\alpha^\beta r(\phi)\sin\phi\sqrt{r(\phi)^2 + r'(\phi)^2}\, d\phi.$$

Zgled. (1) Kroglo s polmerom R lahko dobimo z vrtenjem grafa funkcije $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ okoli abscisne osi na intervalu $[-R, R]$. Odvod funkcije je enak $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, od koder dobimo, da je površina krogle s polmerom R enaka

$$P = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-R}^{R} R\, dx = 2\pi Rx \Big|_{-R}^{R} = 4\pi R^2.$$

(2) Izračunajmo sedaj površino plašča vrtenine, ki jo dobimo, če okoli abscisne osi zavrtimo del kardioide $r(\phi) = a(1 + \cos\phi)$, ki ustreza kotom $\phi \in [0, \pi]$.





Pri računanju obsega kardioide smo že izračunali, da velja

$$\sqrt{r(\phi)^2 + r'(\phi)^2} = \sqrt{4a^2 \cos^2 \frac{\phi}{2}}.$$

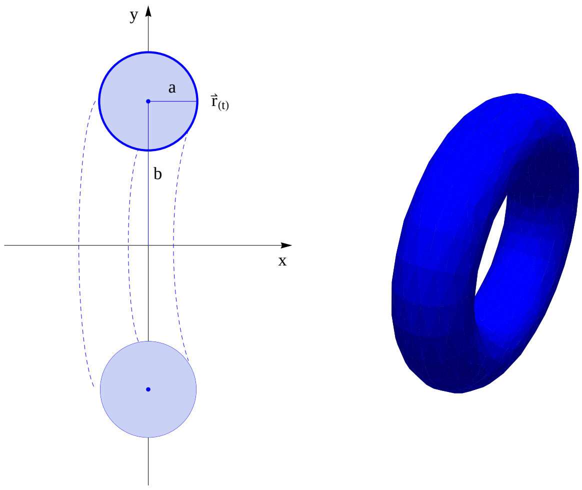
Ker je $\phi \in [0, \pi]$, je $\sqrt{4a^2 \cos^2 \frac{\phi}{2}} = 2a \cos \frac{\phi}{2}$. Površina vrtenine je tako enaka

$$\begin{aligned}
P &= 2\pi \int_0^{\pi} a(1 + \cos\phi) \sin\phi \cdot 2a \cos \frac{\phi}{2}\, d\phi, \\
&= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} 2\cos^2 \frac{\phi}{2} \cdot 2 \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} \cdot \cos \frac{\phi}{2}\, d\phi, \\
&= 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^4 \frac{\phi}{2} \sin \frac{\phi}{2}\, d\phi.
\end{aligned}$$

Vzemimo sedaj novo spremenljivko $u = \cos \frac{\phi}{2}$. Sledi $du = -\frac{1}{2} \sin \frac{\phi}{2}\, d\phi$ in

$$P = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^4 \frac{\phi}{2} \sin \frac{\phi}{2}\, d\phi = -32\pi a^2 \int_1^0 u^4\, du = -32\pi a^2 \frac{u^5}{5}\Big|_1^0 = \frac{32\pi a^2}{5}.$$

(3) Poglejmo si še torus z velikim polmerom b in s polmerom cevi a. Dobimo ga z vrtenjem krožnice $\vec{r}(t) = (a\cos t, b + a\sin t)$, za $t \in [0, 2\pi]$, okoli abscisne osi.



V tem primeru je $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 = a^2$. Sledi

$$P = 2\pi \int_0^{2\pi} (b + a\sin t)a\,dt = 2\pi a\,(bt - a\cos t)\Big|_0^{2\pi} = 4\pi^2 ab.$$

Krivulje v $\mathbb{R}^3$

Podobno kot krivulje v ravnini lahko študiramo tudi krivulje v prostoru. Denimo, da je

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

neka pot v $\mathbb{R}^3$. Mislimo si lahko, da nam ta pot določa premikanje neke točke po prostoru. Hitrost te točke je enaka $v(t) = \dot{r}(t)$. Da bo trajektorija točke predstavljala neko krivuljo, bomo privzeli, da je $|v(t)| > 0$, kar pomeni, da se točka nikoli ne ustavi. Ločna dolžina, ki jo opiše točka med začetnim časom t_0 in časom t, je enaka

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{r}(u)|\,du.$$

Ker je $\dot{s} = |\dot{r}| > 0$, je funkcija s strogo naraščajoča in obrnljiva, zato lahko našo krivuljo reparametriziramo

$$r(s) = r(t(s))$$

s parametrom s. Parametru s rečemo naravni parameter, po fizikalno pa nam predstavlja gibanje točke po krivulji s konstantno enotsko hitrostjo. Če odvajamo položaj točke po naravnem parametru, dobimo

$$T = \frac{dr}{ds} = \frac{dt}{ds}\dot{r} = \frac{1}{\dot{s}}\dot{r} = \frac{\dot{r}}{|\dot{r}|},$$

kar pomeni, da je $|T| = 1$. Vektor

$$T = \frac{dr}{ds}$$

je enotski tangentni vektor na krivuljo. Če je vektor T konstanten, je naša krivulja premica. V splošnem pa nam odvod vektorja T pove, v katero smer in koliko se naša krivulja ukrivlja. *Ukrivljenost* krivulje definiramo s predpisom

$$\kappa = \left| \frac{dT}{ds} \right|.$$

Če je $\kappa \neq 0$, lahko definiramo normalni vektor na krivuljo

$$N = \frac{\frac{dT}{ds}}{\left|\frac{dT}{ds}\right|} = \frac{T'}{\kappa}.$$

Po definiciji je torej $|N| = 1$ in

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N.$$

Z odvajanjem identitete $T \cdot T = 1$ dobimo, da velja $2T' \cdot T = 0$ oziroma $2\kappa N \cdot T = 0$, od koder sledi, da sta vektorja T in N pravokotna. Ker sta oba enotska vektorja, je enotski tudi vektor binormale, definiran s predpisom

$$B = T \times N.$$

Ortonormirano trojico vektorjev (T, N, B) imenujemo spremljajoči trirob krivulje. Poglejmo si še nekaj zvez med temi tremi vektorji. Najprej je

$$B' = \frac{dB}{ds} = T' \times N + T \times N' = \kappa N \times N + T \times N' = T \times N'.$$

Iz definicije vektorskega produkta od tod sledi, da je $B' \cdot T = 0$. Ker je B enotski vektor, je $B \cdot B = 1$, od koder pa z odvajanjem dobimo $2B' \cdot B = 0$. Vektor B' je torej pravokoten na vektorja T in B, zato mora biti vzporeden vektorju N. *Torzijo* krivulje definiramo implicitno s predpisom

$$B' = -\tau N$$

oziroma eksplicitno s $\tau = -B' \cdot N$. Za konec si poglejmo še odvod normalnega vektorja. Velja $N = B \times T$, od tod pa sledi

$$N' = B' \times T + B \times T' = -\tau N \times T + B \times \kappa N = -\tau(-B) + \kappa(-T) = -\kappa T + \tau B.$$

Izpeljane rezultate lahko povzamemo s Frenet-Serretovimi formulami

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{ds} &= \kappa N, \\
\frac{dN}{ds} &= -\kappa T + \tau B, \\
\frac{dB}{ds} &= -\tau N,
\end{aligned}$$

oziroma v matrični obliki

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

Ukrivljenost in torzija krivulje pa sta

$$\begin{aligned} \kappa &= \left|\frac{dT}{ds}\right|, \\ \tau &= -\frac{dB}{ds} \cdot N. \end{aligned}$$

Zgled. Poglejmo si krožnico s polmerom R in s središčem v koordinatnem izhodišču. Običajno jo parametriziramo s polarnim kotom ϕ za $\phi \in [0, 2\pi)$, lahko pa jo tudi z naravnim parametrom $s = R\phi$ za $s \in [0, 2\pi R)$. Potem je

$$\begin{aligned} x(s) &= R\cos\left(\frac{s}{R}\right), \\ y(s) &= R\sin\left(\frac{s}{R}\right). \end{aligned}$$

Če upoštevamo, da je $r(s) = (x(s), y(s))$, dobimo z odvajanjem po naravnem parametru

$$r'(s) = \left(-R\sin\left(\frac{s}{R}\right) \cdot \frac{1}{R}, R\cos\left(\frac{s}{R}\right) \cdot \frac{1}{R}\right) = \left(-\sin\left(\frac{s}{R}\right), \cos\left(\frac{s}{R}\right)\right).$$

Vidimo, da je $|r'(s)| = 1$, enotski tangentni vektor na krožnico pa je

$$T = \left(-\sin\left(\frac{s}{R}\right), \cos\left(\frac{s}{R}\right)\right).$$

Smer normale dobimo z odvajanjem vektorja T po naravnem parametru

$$T' = \left(-\cos\left(\frac{s}{R}\right) \cdot \frac{1}{R}, -\sin\left(\frac{s}{R}\right) \cdot \frac{1}{R}\right).$$

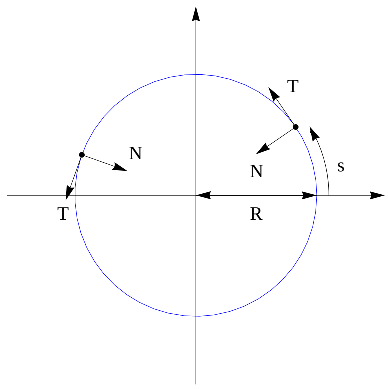
Od tod sklepamo dvoje. Velikost vektorja T' je enaka ukrivljenosti krožnice, njegova smer pa kaže v smeri normale na krožnico. Torej je

$$N = \left(-\cos\left(\frac{s}{R}\right), -\sin\left(\frac{s}{R}\right)\right)$$

in

$$\kappa = \frac{1}{R}.$$

Poglejmo si še skico.



Vektor binormale je enak

$$B = T \times N = \left(-\sin\left(\frac{s}{R}\right), \cos\left(\frac{s}{R}\right), 0\right) \times \left(-\cos\left(\frac{s}{R}\right), -\sin\left(\frac{s}{R}\right), 0\right) = (0,0,1)$$

in je, kot vidimo, konstanten. Od tod sledi, da je $B' = 0$, kar pa pomeni, da je $\tau = 0$. Nekaj podobnega velja v splošnem za ravninske krivulje. Vektor binormale je konstanten in kaže v smeri normale na ravnino, v kateri leži krivulja. Torzija ravninskih krivulj pa je ničelna.

Ukrivljenost krožnice s polmerom R je $\kappa = \frac{1}{R}$. Za splošno krivuljo pa lahko v vsaki točki (x, y, z) na krivulji, kjer je $\kappa \neq 0$, definiramo pritisnjeno krožnico. To je krožnica s polmerom R in s središčem v točki $(x, y, z) + R \cdot N$, ki se najbolje prilega krivulji v dani točki v smislu, da ima enako tangento in normalo kot krivulja v dani točki.

V splošnem je krivulja podana kot $r = r(t)$, reparametrizacija z naravnim parametrom pa je pogosto nepraktična in težko izračunljiva. Tedaj lahko vse zgoraj omenjene količine izračunamo kar v dani parametrizaciji. Privzemimo kot prej, da je $\dot{r}(t) \neq 0$ ter

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{r}(u)| \, du.$$

Če si mislimo, da je s predpisom $r = r(t)$ podano gibanje točke po prostoru in da spremenljivka t označuje čas, je $v(t) = \dot{r}(t)$ hitrost točke, $\dot{s}(t) = |v(t)|$ pa velikost hitrosti točke. Z uporabo verižnega pravila za odvajanje dobimo

$$\dot{r}(t) = \dot{s}(t) r'(s(t)) = \dot{s}(t) T(s(t)).$$

Z besedami to pomeni, da hitrost točke kaže v smeri enotskega tangentnega vektorja, njena velikost pa je $\dot{s}(t)$. Če zgornjo enakost še enkrat odvajamo, dobimo

$$\begin{aligned} \ddot{r}(t) &= \ddot{s}(t) T(s(t)) + \dot{s}(t) \frac{d}{dt} T(s(t)), \\ &= \ddot{s}(t) T(s(t)) + (\dot{s}(t))^2 \kappa(s(t)) N(s(t)). \end{aligned}$$

Pri računu smo uporabili, da velja $\frac{d}{dt}T(s(t)) = T'(s(t)) \cdot \dot{s}(t) = \kappa N \cdot \dot{s}(t)$. Iz rezultata lahko razberemo, da leži pospešek točke, ki se giblje po krivulji, v ravnini, ki jo napenjata tangentni in normalni vektor. Komponenta v tangencialni smeri $\ddot{s}$ nam pove, kako se spreminja velikost hitrosti, normalna komponenta $\dot{s}^2\kappa$ pa, kako se spreminja smer hitrosti. Le-ta je lahko prisotna, četudi se točka giblje enakomerno, kot na primer pri enakomernem kroženju. Iz teh enakosti bi sedaj radi izrazili ukrivljenost krivulje. Najprej je

$$\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t) = \dot{s}T \times (\ddot{s}T + \dot{s}^2\kappa N) = \dot{s}^3\kappa(T \times N) = \dot{s}^3\kappa B.$$

Absolutni vrednosti vektorjev na obeh straneh morata biti torej enaki. Če upoštevamo, da je $|B| = 1$, je torej

$$|\dot{r} \times \ddot{r}| = |\dot{s}|^3\kappa = |\dot{r}|^3\kappa,$$

od koder dobimo formulo za ukrivljenost

$$\kappa = \frac{|\dot{r} \times \ddot{r}|}{|\dot{r}|^3}.$$

Če je krivulja ravninska, se stvari še malce poenostavijo. V tem primeru je namreč $z(t) = 0$, od koder sledi

$$\dot{r} \times \ddot{r} = (\dot{x}, \dot{y}, 0) \times (\ddot{x}, \ddot{y}, 0) = (0, 0, \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})$$

in zato

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

V primeru ravninskih krivulj lahko definiramo tudi predznačeno ukrivljenost s predpisom

$$k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Jasno je $\kappa = |k|$, predznak k pa nam pove, v katero smer se vrti tangenta na krivuljo. Če je $k > 0$, se tangenta vrti v pozitivno smer, sicer pa v negativno.

Izpeljimo sedaj še podobno formulo za torzijo krivulje. Z odvajanjem pospeška dobimo

$$\dddot{r} = \frac{d}{dt}\left(\ddot{s}T + \dot{s}^2\kappa N\right) = \dddot{s}T + \ddot{s}\frac{dT}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\dot{s}^2\kappa\right)N + \dot{s}^2\kappa\frac{dN}{dt}.$$

Izračunali smo že, da je $\frac{dT}{dt} = \dot{s}\kappa N$, podobno pa lahko izpeljemo, da je tudi $\frac{dN}{dt} = \dot{s}N' = \dot{s}(-\kappa T + \tau B)$. Ko to vstavimo v zgornjo enakost, dobimo

$$\dddot{r} = \dddot{s}T + \ddot{s}\dot{s}\kappa N + \frac{d}{dt}\left(\dot{s}^2\kappa\right)N + \dot{s}^3\kappa(-\kappa T + \tau B).$$

Vektor na desni strani imamo izražen glede na ortonormirano bazo (T, N, B). Če celo enakost skalarno pomnožimo z vektorjem B, dobimo komponento v smeri vektorja B, ki je enaka

$$\dddot{r} \cdot B = \dot{s}^3 \kappa \tau.$$

Ker je $\dot{r} \times \ddot{r} = \dot{s}^3 \kappa B$ in $|\dot{r} \times \ddot{r}| = |\dot{s}^3 \kappa|$, pa po drugi strani dobimo

$$(\dot{r} \times \ddot{r}) \cdot \dddot{r} = (\dot{s}^3 \kappa B) \cdot \dddot{r} = \dot{s}^3 \kappa (\dddot{r} \cdot B) = (\dot{s}^3 \kappa)^2 \tau = |\dot{r} \times \ddot{r}|^2 \tau.$$

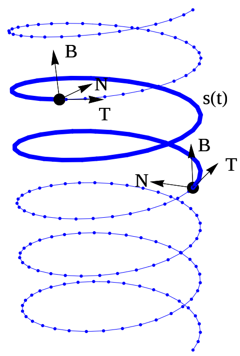
Od tod dobimo formulo za izračun torzije prostorske krivulje

$$\tau = \frac{(\dot{r} \times \ddot{r}) \cdot \dddot{r}}{|\dot{r} \times \ddot{r}|^2}.$$

Zgled. Kot primer prostorske krivulje bomo vzeli vijačnico s parametrizacijo

$$r(t) = (R \cos t, R \sin t, Rkt),$$

kjer sta R in k pozitivni konstanti. Tloris vijačnice je krožnica s polmerom R, parameter k pa nam pove, kako strmo se vijačnica dviga.



Z odvajanjem dobimo

$$\dot{r}(t) = (-R \sin t, R \cos t, Rk),$$

od koder sledi

$$|\dot{r}(t)|^2 = (-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2 + (Rk)^2 = R^2(1 + k^2).$$

Sedaj lahko z integriranjem izračunamo naravni parameter

$$s(t) = \int_0^t |\dot{r}(u)| \, du = \int_0^t R\sqrt{1 + k^2} \, du = R\sqrt{1 + k^2} t.$$

Podobno kot pri krožnici je tudi tu zveza med naravnim parametrom in pa polarnim kotom linearna:

$$\begin{aligned} s &= R\sqrt{1+k^2}\,t, \\ t &= \frac{s}{R\sqrt{1+k^2}}. \end{aligned}$$

Naravna parametrizacija vijačnice je torej

$$\begin{aligned} x(s) &= R\cos\left(\frac{s}{R\sqrt{1+k^2}}\right), \\ y(s) &= R\sin\left(\frac{s}{R\sqrt{1+k^2}}\right), \\ z(s) &= \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}s. \end{aligned}$$

Enotski tangentni vektor je

$$\begin{aligned} T &= \left(-\sin\left(\frac{s}{R\sqrt{1+k^2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \cos\left(\frac{s}{R\sqrt{1+k^2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\left(-\sin\left(\frac{s}{R\sqrt{1+k^2}}\right), \cos\left(\frac{s}{R\sqrt{1+k^2}}\right), k\right), \end{aligned}$$

njegov odvod pa

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\left(-\cos\left(\frac{s}{R\sqrt{1+k^2}}\right)\cdot\frac{1}{R\sqrt{1+k^2}}, -\sin\left(\frac{s}{R\sqrt{1+k^2}}\right)\cdot\frac{1}{R\sqrt{1+k^2}}, 0\right), \\ &= \frac{1}{R(1+k^2)}\left(-\cos\left(\frac{s}{R\sqrt{1+k^2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{R\sqrt{1+k^2}}\right), 0\right). \end{aligned}$$

Od tod dobimo, da je ukrivljenost vijačnice enaka

$$\kappa = |T'| = \frac{1}{R(1+k^2)},$$

enotski normalni vektor pa

$$N = \left(-\cos\left(\frac{s}{R\sqrt{1+k^2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{R\sqrt{1+k^2}}\right), 0\right).$$

Opazimo, da je normalni vektor vodoraven in da kaže proti navpični osi.

Za izračun torzije moramo najprej izračunati binormalo

$$B = T\times N = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\left(k\sin\left(\frac{s}{R\sqrt{1+k^2}}\right), -k\cos\left(\frac{s}{R\sqrt{1+k^2}}\right), 1\right).$$

Od tod dobimo

$$B' = \frac{k}{R(1+k^2)}\left(\cos\left(\frac{s}{R\sqrt{1+k^2}}\right), \sin\left(\frac{s}{R\sqrt{1+k^2}}\right), 0\right)$$

in

$$\tau = -B' \cdot N = \frac{k}{R(1+k^2)}.$$

Vidimo, da sta tako ukrivljenost kot torzija vijačnice konstantna. Velja pa tudi obrat tega rezultata. Vsaka prostorska krivulja, ki ima konstantno ukrivljenost in torzijo, ima obliko vijačnice.