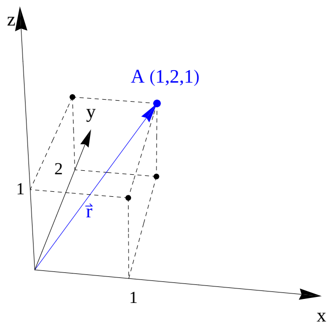
Vektorski prostor $\mathbb{R}^3$

V tem razdelku bomo spoznali osnovne lastnosti in operacije med vektorji v trorazsežnem prostoru ter se naučili opisati osnovne geometrijske pojme kot so na primer točke, premice, ravnine, trikotniki in piramide. Precej bolj obširno in abstraktno se vektorske prostore obravnava pri Matematiki 2.

Poglejmo si množico

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Če si izberemo desno-sučni koordinatni sistem, si lahko elemente prostora $\mathbb{R}^3$ predstavljamo kot točke trorazsežnega evklidskega prostora.



Trojica (x, y, z) predstavlja točko A, ki ima za koordinate glede na dani koordinatni sistem dano trojico. Pogosto pišemo kar $A(x, y, z)$, števila x, y in z pa imenujemo *kartezične koordinate* točke A.

V prostoru $\mathbb{R}^3$ imamo izhodišče $O(0, 0, 0)$. *Vektorji* so usmerjene daljice $\overrightarrow{OA}$, z začetkom v O, in so popolnoma določeni s končno točko $A(x, y, z)$. Zato točko $A(x, y, z)$ pogosto enačimo z njenim krajevnim vektorjem

$$\vec{r} = \vec{r}_A = \overrightarrow{OA} = (x, y, z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Dolžina vektorja $\vec{r} = (x, y, z)$ je

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

razdalja med točkama $A(x, y, z)$ in $B(x', y', z')$ pa je realno število

$$\overline{AB} = d(A, B) = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

Kadar si vektorje predstavljamo kot abstraktne elemente množice $\mathbb{R}^3$ in ne točke v prostoru, raje uporabljamo oznake tipa

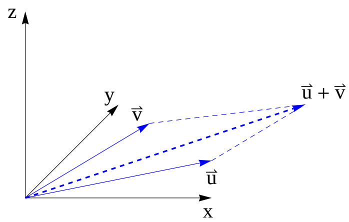
$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3).$$

Operacije med vektorji v $\mathbb{R}^3$

Na množici $\mathbb{R}^3$ lahko definiramo seštevanje elementov po komponentah in pa množenje s skalarji. Naj bo $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ in $\alpha \in \mathbb{R}$.

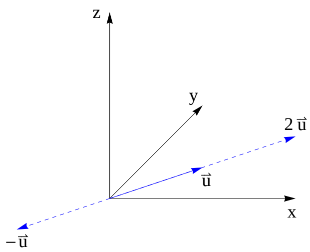
1. Seštevanje vektorjev:

$$\begin{aligned} &\vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \\ &\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3). \end{aligned}$$



2. Množenje vektorja s skalarjem (realnim številom):

$$\begin{aligned} &\alpha\vec{u} \in \mathbb{R}^3, \\ &\alpha\vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3). \end{aligned}$$



Označimo $\vec{0} = (0, 0, 0)$ in $-\vec{u} = (-1)\vec{u}$. Potem veljajo za seštevanje vektorjev naslednje lastnosti

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= \vec{v} + \vec{u}, & (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \\ \vec{u} + \vec{0} &= \vec{u}, & \vec{u} + (-\vec{u}) &= \vec{0}, \end{aligned}$$

kar z drugimi besedami pomeni, da tvori množica $\mathbb{R}^3$ Abelovo grupo za seštevanje vektorjev. Seštevanje vektorjev je usklajeno z množenjem s skalarji na naslednji način

$$\begin{aligned} \alpha(\beta\vec{u}) &= (\alpha\beta)\vec{u}, & \alpha(\vec{u} + \vec{v}) &= \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \\ 1\vec{u} &= \vec{u}, & (\alpha + \beta)\vec{u} &= \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}. \end{aligned}$$

Tako postane $\mathbb{R}^3$ *vektorski prostor* nad obsegom realnih števil.

Vektorje v smereh koordinatnih osi označimo z

$$\vec{i} = (1, 0, 0),$$
$$\vec{j} = (0, 1, 0),$$
$$\vec{k} = (0, 0, 1).$$

Ti trije vektorji tvorijo bazo prostora $\mathbb{R}^3$, kar pomeni, da lahko poljuben vektor $\vec{r} = (x, y, z)$ zapišemo v obliki

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Za vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ rečemo, da je *enotski* ali *normiran*, če je $|\vec{v}| = 1$. Poljuben neničeln vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ lahko *normiramo*

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|},$$

da dobimo enotski vektor $\vec{u}$, ki kaže v isto smer kot vektor $\vec{v}$. Če je $\vec{u}$ enotski vektor, je

$$\vec{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

kjer so $\cos\alpha$, $\cos\beta$ in $\cos\gamma$ *smerni kosinusi* vektorja $\vec{u}$.

Skalarni, vektorski in mešani produkt

Skalarni produkt v $\mathbb{R}^3$

Za poljubna vektorja $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ in $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ definiramo njun *skalarni produkt*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R},$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Osnovne lastnosti skalarnega produkta so strnjene v naslednji trditvi.

Trditev 1. *Za poljubne vektorje $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ veljajo:*

(1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$,

(2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ *in* $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$,

(3) $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$, *kjer je* $\alpha \in \mathbb{R}$,

(4) $\vec{v} \cdot \vec{v} > 0$ *za* $\vec{v} \neq \vec{0}$,

(5) $\vec{0} \cdot \vec{0} = 0$.

Dokaz. Naj bo $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ in $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Potem je

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3,$$
$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3.$$

Točka (1) torej sledi iz komutativnosti množenja realnih števil. Na podoben način lahko z uporabo lastnosti realnih števil pokažemo tudi preostale točke. $\square$

Omenjene lastnosti nam pogosto pomagajo pri računanju z vektorji. Iz prve lastnosti sledi, da je skalarni produkt vektorjev komutativen. Druga lastnost nam podaja distributivnostni zakon med skalarnim produktom in pa seštevanjem vektorjev, medtem ko tretja podaja zvezo skalarnega produkta z množenjem s skalarji. Tretji lastnosti pravimo *homogenost*, druga in tretja lastnost skupaj pa povesta, da je skalarni produkt *bilinearna* operacija.

Poleg omenjenih lastnosti velja še

$$|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v},$$

kar nam pride prav pri računanju dolžin vektorjev.

Trditev 2. *Naj bosta $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Potem veljata:*

(1) $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$ (Cauchy-Schwartzova neenakost),

(2) $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$ (trikotniška neenakost).

Dokaz. (1) V primeru, ko je vsaj eden izmed vektorjev $\vec{u}$, $\vec{v}$ enak nič, imamo enakost, zato lahko predpostavimo, da sta oba neničelna. Označimo najprej $\alpha = |\vec{v}|^2$, $\beta = \vec{u} \cdot \vec{v}$ in $\vec{w} = \alpha\vec{u} - \beta\vec{v}$. Potem velja $\vec{w} \cdot \vec{w} \geq 0$ in zato

$$\begin{aligned}
\vec{w} \cdot \vec{w} &= (\alpha\vec{u} - \beta\vec{v}) \cdot (\alpha\vec{u} - \beta\vec{v}), \\
&= \alpha^2 \vec{u} \cdot \vec{u} - \alpha\beta\vec{u} \cdot \vec{v} - \beta\alpha\vec{v} \cdot \vec{u} + \beta^2 \vec{v} \cdot \vec{v}, \\
&= \alpha^2 \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\alpha\beta\vec{u} \cdot \vec{v} + \beta^2 \vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0.
\end{aligned}$$

Z upoštevanjem $\alpha = |\vec{v}|^2$ in $\beta = \vec{u} \cdot \vec{v}$ dobimo

$$\begin{aligned}
|\vec{v}|^4|\vec{u}|^2 - 2|\vec{v}|^2(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2|\vec{v}|^2 &\geq 0 \\
|\vec{v}|^4|\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 &\geq 0 \\
|\vec{v}|^2|\vec{u}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

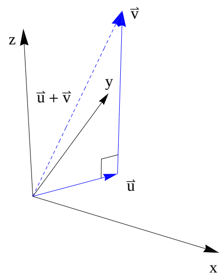
Od tod sledi $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$. Enakost velja natanko takrat, ko je $\vec{w} = \vec{0}$, oziroma, ko je $\alpha\vec{u} = \beta\vec{v}$.

(2) Poglejmo si enakosti

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v},$$
$$(|\vec{u}| + |\vec{v}|)^2 = |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}| + |\vec{v}|^2.$$

Ker je $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u} \cdot \vec{v}|$ in po točki (1) tudi $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$, je torej $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$. $\square$

V trikotniku, ki ga napenjajo (ustrezno premaknjeni) vektorji $\vec{u}$, $\vec{v}$ in $\vec{u}+\vec{v}$ velja Pitagorov izrek natanko takrat, ko sta vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ *pravokotna* oziroma *ortogonalna*.



Torej je

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2,$$

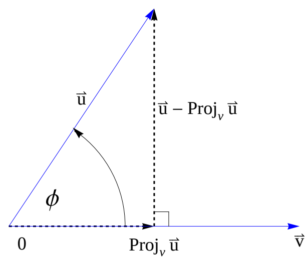
od koder sledi

$$\vec{u}\cdot\vec{u} + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v} = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v}.$$

Tako smo dokazali:

Trditev 3. *Vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ sta pravokotna čee $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.*

Za pravokotnost uporabljamo oznako $\vec{u} \perp \vec{v}$. Vedno velja $\vec{u} \perp \vec{0}$. Pri danem vektorju $\vec{v} \neq \vec{0}$ lahko poljuben vektor $\vec{u}$ zapišemo kot vsoto vektorja v smeri $\vec{v}$ in vektorja, ki je pravokoten na $\vec{v}$. Vektor, ki v tej vsoti kaže v smeri $\vec{v}$ označimo s $\mathrm{Proj}_{\vec{v}}(\vec{u})$ in ga imenujemo *pravokotna projekcija* $\vec{u}$ na $\vec{v}$.



Če pišemo $\mathrm{Proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \alpha\vec{v}$, dobimo iz pogoja pravokotnosti

$$(\vec{u} - \alpha\vec{v})\cdot\vec{v} = 0,$$

od koder sledi

$$\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}.$$

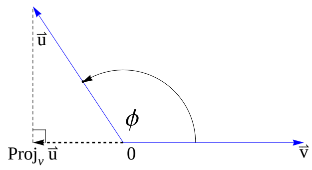
Torej lahko pravokotno projekcijo vektorja $\vec{u}$ na vektor $\vec{v}$ izračunamo po formuli:

$$\mathrm{Proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}.$$

Če sta $\vec{u}$ in $\vec{v}$ neničelna vektorja in je $\vec{u} \cdot \vec{v} \geq 0$, je iz slike razvidno tudi, da velja

$$\cos \phi = \frac{|\alpha \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

Velja pa sicer zgornja formula tudi v primeru, ko je $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$.



Za neničelna vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ lahko torej definiramo kot med njima po formuli

$$\cos \phi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

Pri tem velja

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} > 0 &\implies \text{ ostri kot,} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 &\implies \text{ pravi kot,} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} < 0 &\implies \text{ topi kot.} \end{aligned}$$

Zgornjo enakost lahko zapišemo tudi v obliki

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \phi.$$

Če je $\vec{u} = \vec{0}$ ali $\vec{v} = \vec{0}$, kot med vektorjema sicer ni definiran, a tedaj imamo kljub temu na obeh straneh 0.

Zgled. Dana sta vektorja $\vec{u} = (1, 2, 3)$ in $\vec{v} = (1, 0, -1)$. Izračunajmo dolžino vektorjev $\vec{u}$, $\vec{v}$ in $\vec{u} + \vec{v}$, kot med vektorjema $\vec{u}$ in $\vec{v}$ ter pravokotno projekcijo vektorja $\vec{u}$ na vektor $\vec{v}$.

Ker je $\vec{u} + \vec{v} = (2, 2, 2)$, so dolžine vektorjev enake

$$\begin{aligned} |\vec{u}| &= \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}, \\ |\vec{v}| &= \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}, \\ |\vec{u} + \vec{v}| &= \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{12}. \end{aligned}$$

Iz $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 + 0 - 3 = -2$ dobimo, da za kot med vektorjema $\vec{u}$ in $\vec{v}$ velja

$$\cos \phi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-2}{\sqrt{28}} = -\frac{1}{\sqrt{7}},$$

kar pomeni, da je ta kot top.

Projekcija vektorja $\vec{u}$ na vektor $\vec{v}$ pa je enaka

$$\text{Proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{-2}{2} \vec{v} = (-1, 0, 1).$$

Vektorski produkt v $\mathbb{R}^3$

Za poljubna vektorja $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ in $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ lahko definiramo tudi njun *vektorski produkt*

$$\vec{u} \times \vec{v} \in \mathbb{R}^3,$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Posebni primeri, ki si jih velja zapomniti na pamet, so

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}, & \vec{i} \times \vec{i} &= \vec{0}, \\ \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i}, & \vec{j} \times \vec{j} &= \vec{0}, \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j}, & \vec{k} \times \vec{k} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem definicije in nekaj preprostega računanja lahko pokažemo naslednje lastnosti vektorskega produkta.

Trditev 4. *Za poljubne vektorje $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ veljajo:*

(1) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$ *in* $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$,

(2) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ *in* $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$,

(3) $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$,

(4) $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$.

Prve tri lastnosti so nam velikokrat v pomoč pri računanju. Prva pravi, da je vektorski produkt *antikomutativen*, za razliko od ostalih produktov, ki smo jih spoznali dosedaj. Od tod avtomatično sledi, da je vektorski produkt vektorja s samim sabo enak ničelnemu vektorju. Druga in tretja lastnost nam ponazarjata povezavo med vektorskim produktom in pa seštevanjem vektorjev (distributivnost) ter množenjem s skalarji (homogenost). Obe lastnosti skupaj nam povesta, da je vektorski produkt bilinearna operacija. Z uporabo omenjenih lastnosti je za računanje vektorskega produkta dovolj poznati, kako se med sabo množijo vektorji $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$. Tako je npr.

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}) \times (v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}), \\ &= u_1 v_2(\vec{i} \times \vec{j}) + u_1 v_3(\vec{i} \times \vec{k}) + u_2 v_1(\vec{j} \times \vec{i}) + \\ &+ u_2 v_3(\vec{j} \times \vec{k}) + u_3 v_1(\vec{k} \times \vec{i}) + u_3 v_2(\vec{k} \times \vec{j}), \\ &= u_1 v_2\vec{k} - u_1 v_3\vec{j} - u_2 v_1\vec{k} + u_2 v_3\vec{i} + u_3 v_1\vec{j} - u_3 v_2\vec{i}, \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\vec{k}. \end{aligned}$$

Seveda lahko včasih hitreje izračunamo vektorski produkt po definiciji kot pa z uporabo bilinearnosti. Iz četrte lastnosti sledi, da je vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ pravokoten na vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u} \quad \text{in} \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}.$$

Trditev 5. *Za poljubne vektorje $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ veljajo:*

(1) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$,

(2) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$,

(3) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0}$,

(4) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\phi$.

Dokaz. Naj bo $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ in $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

Za dokaz točke (1) si poglejmo enakosti

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2(v_3w_1 - v_1w_3) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1),$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (u_2v_3 - u_3v_2)w_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)w_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)w_3.$$

Z odpravo oklepajev in zamenjavo vrstnega reda sledi $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

Na podoben način lahko dokažemo tudi točko (2), medtem ko točka (3) sledi iz točke (2) in pa iz komutativnosti skalarnega produkta.

Za dokaz točke (4) najprej preverimo (s koordinatami), da velja

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2.$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} |\vec{u} \times \vec{v}|^2 &= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2, \\ &= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \cos^2\phi, \\ &= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2(1 - \cos^2\phi), \\ &= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \sin^2\phi. \end{aligned}$$

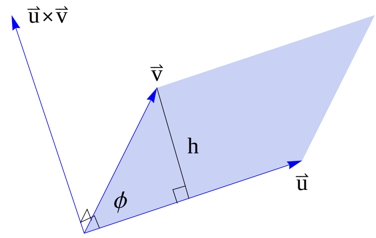
□

Izrazu $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$, ki ga bomo bolje spoznali v nadaljevanju, rečemo *mešani produkt* vektorjev $\vec{u}$, $\vec{v}$ in $\vec{w}$, izrazu $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ pa *dvojni vektorski produkt*. Enakost iz točke (3) imenujemo *Jacobijeva identiteta*. Pogosto se pojavlja v različnih oblikah tako v matematiki kot v mehaniki.

S pomočjo točke (4) si bomo sedaj pogledali geometrično interpretacijo vektorskega produkta. Recimo, da sta $\vec{u}$ in $\vec{v}$ neničelna vektorja in da velja $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$. Potem je ploščina paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$, enaka

$$S = |\vec{u}|h = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\phi = |\vec{u} \times \vec{v}|.$$

Vektorski produkt $\vec{u} \times \vec{v}$ je torej vektor, ki je pravokoten na vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$, njegova dolžina pa je enaka ploščini paralelograma, ki ga napenjata $\vec{u}$ in $\vec{v}$.



Če sta vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ neničelna in če napenjata nedegeneriran paralelogram, je torej njun vektorski produkt neničeln. Velja pa tudi neke vrste obrat.

Vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ sta *vzporedna* oziroma *kolinearna*, če je $\vec{u} = \vec{0}$ ali $\vec{v} = \vec{0}$, ali pa je kot med njima enak 0 oziroma π.

Trditev 6. *Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ so ekvivalentne trditve:*

(1) Obstajata skalarja α in β, ne oba enaka 0*, da je $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ (linearna odvisnost).*

(2) Vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ sta vzporedna.

(3) $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|$.

(4) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Dokaz. V primeru, ko je vsaj eden izmed vektorjev ničeln, veljajo vse štiri trditve, zato lahko predpostavimo, da sta oba vektorja neničelna.

Ekvivalentnost trditev bomo dokazali z zaporedjem implikacij.

(1)$\Longrightarrow$(2) Iz linearne odvisnosti vektorjev $\vec{u}$ in $\vec{v}$ sledi, da je eden izmed njiju večkratnik drugega. Če je npr. $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, je

$$\cos\phi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{(\lambda\vec{v}) \cdot \vec{v}}{|\lambda\vec{v}||\vec{v}|} = \frac{\lambda\vec{v} \cdot \vec{v}}{|\lambda||\vec{v}|^2} = \frac{\lambda}{|\lambda|} = \pm 1.$$

Od tod sledi $\phi \in \{0, \pi\}$, torej sta $\vec{u}$ in $\vec{v}$ vzporedna.

(2)$\Longrightarrow$(3) Če sta $\vec{u}$ in $\vec{v}$ vzporedna, je kot med njima enak ali 0 ali π, zato je $\cos\phi = \pm 1$. Torej je

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\phi = \pm|\vec{u}||\vec{v}|.$$

(3)$\Longrightarrow$(4) Naj velja $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|$. Od tod sledi, da je $|\cos\phi| = 1$, kar pomeni, da je $\sin\phi = 0$. Torej je $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\phi = 0$ in zato $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

(4)$\Longrightarrow$(1) Če je $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, je $\sin\phi = 0$ in zato $\cos\phi = \pm 1$. Torej imamo v tem primeru v Cauchy-Schwartzovi neenakosti enakost, kar pomeni, da sta $\vec{u}$ in $\vec{v}$ linearno odvisna. □

Zgled. Izračunajmo ploščino trikotnika, ki ga določajo točke $P(1, 3, -2)$, $Q(2, 1, 4)$ in $R(-3, 1, 6)$. Ploščina trikotnika PQR je enaka polovici ploščine paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\overrightarrow{QP} = (-1, 2, -6)$ in $\overrightarrow{QR} = (-5, 0, 2)$. Torej je

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}| = \frac{1}{2}|(4, 32, 10)| = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 1024 + 100} = \frac{\sqrt{1140}}{2}.$$

Mešani produkt v $\mathbb{R}^3$

Za poljubne vektorje $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ lahko definiramo tudi *mešani produkt*

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{R},$$
$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

V koordinatah mešani produkt najlaže izračunamo s pomočjo determinante

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

kjer je $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ in $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

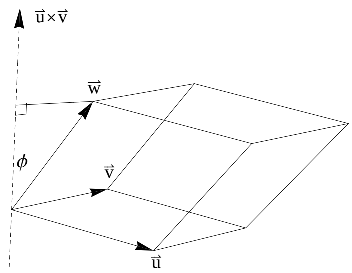
Iz lastnosti skalarnega in vektorskega produkta sledi, da je mešani produkt homogen in distributiven v vsakem svojem faktorju. Poleg tega pa iz enakosti $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ sledi, da smemo faktorje tudi ciklično permutirati

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}).$$

Če zamenjamo samo dva faktorja, pa iz antikomutativnosti vektorskega produkta sledi

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}).$$

Geometrijsko lahko mešani produkt interpretiramo takole. Poglejmo si paralelepiped, ki je napet na vektorje $\vec{u}, \vec{v}$ in $\vec{w}$.



Po definiciji je

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = |\vec{u} \times \vec{v}||\vec{w}| \cos\phi$$

Vemo že, da je število $|\vec{u} \times \vec{v}|$ enako ploščini paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$. Ker je $|\vec{w}| \cos\phi$ višina paralelepipeda, nam število $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ predstavlja prostornino danega paralelepipeda.

Zgled. Prostornina paralelepipeda, ki je napet na vektorje $(2,1,0)$, $(-1,2,1)$ in $(0,1,3)$ je enaka

$$V = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 2 + 3 = 13.$$

Prostornina piramide, ki je napeta na iste tri vektorje, je enaka eni šestini prostornine paralelepipeda.

Premice in ravnine v $\mathbb{R}^3$

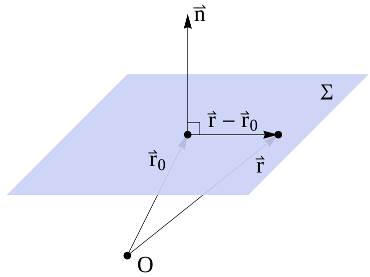
V tem poglavju si bomo pogledali, kako z enačbami opišemo premice in ravnine v trorazsežnem prostoru ter njihovo medsebojno lego.

Enačba ravnine v $\mathbb{R}^3$

Poglejmo si ravnino Σ v prostoru, ki ima za normalo vektor $\vec{n} \neq \vec{0}$, na njej pa leži točka s krajevnim vektorjem $\vec{r}_0$. Potem lahko zapišemo

$$\Sigma = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \,|\, (\vec{r} - \vec{r}_0) \perp \vec{n}\}.$$

To pomeni, da je ravnina Σ ravno množica rešitev enačbe $(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0$.



Označimo $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ in $\vec{n} = (a, b, c)$. Potem lahko enačbo $(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0$ napišemo v obliki $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ oziroma

$$ax + by + cz = d,$$

kjer je $d = ax_0 + by_0 + cz_0$. Tej enačbi rečemo *standardna* oziroma *normalna* oblika enačbe ravnine.

Drugačna izbira $\vec{n}$ in $\vec{r}_0$ lahko vodi do druge enačbe iste ravnine. Če je namreč $\vec{r}_0'$ v ravnini, ki jo določata $\vec{r}_0$ in $\vec{n}$, in je $\vec{n}' = \alpha\vec{n}$ za neko neničelno realno število α, je

$$\begin{aligned}(\vec{r} - \vec{r}_0') \cdot \vec{n}' &= (\vec{r} - \vec{r}_0 + \vec{r}_0 - \vec{r}_0') \cdot \alpha\vec{n}, \\ &= \alpha(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} + \alpha(\vec{r}_0 - \vec{r}_0') \cdot \vec{n}, \\ &= \alpha(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n}.\end{aligned}$$

To pomeni, da je enačba $(\vec{r} - \vec{r}_0') \cdot \vec{n}' = 0$ α-kratnik enačbe $(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0$.

Zgled. Dane so tri točke $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ in $\vec{r}_3$ v $\mathbb{R}^3$. Ravnina, ki gre skozi te tri točke, je podana z enačbo

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

oziroma

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0.$$

Enačba premice v $\mathbb{R}^3$

Premica p v prostoru je podana s točko $\vec{r}_0$ na njej in z neničelnim smernim vektorjem $\vec{s} \in \mathbb{R}^3$. Zapišemo jo lahko tudi v obliki

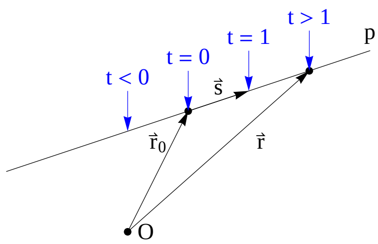
$$p = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s},\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Vektorska parametrizacija premice je:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s},$$

pri čemer je t parameter, ki določa, kje na premici smo. Če uporabimo oznake $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ in $\vec{s} = (\alpha, \beta, \gamma)$, je:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t\alpha, \\ y &= y_0 + t\beta, \\ z &= z_0 + t\gamma. \end{aligned}$$



Če si mislimo, da je parameter t čas, nam ta parametrizacija opisuje gibanje točke po premici s konstantno hitrostjo $\vec{s}$ in z začetnim položajem $\vec{r}_0$.

Premico lahko podamo tudi s *standardno* oziroma *kanonsko* obliko enačbe premice. Pri tem ločimo (do simetrije natančno) tri primere:

(1) Če je $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$, se enačba glasi

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}.$$

(2) Če je $\alpha = 0$ in $\beta, \gamma \neq 0$, je enačba

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}.$$

(3) Če je $\alpha = \beta = 0$ in $\gamma \neq 0$, pa enačbo zapišemo v obliki

$$x = x_0, \quad y = y_0.$$

Recimo sedaj, da je $\vec{r}_0'$ neka druga točka na premici p in $\vec{s}' \neq \vec{0}$ nek drug vektor, ki je vzporeden premici p. Potem obstajata $t_0 \in \mathbb{R}$ in $\theta \neq 0$, da je

$$\begin{aligned} \vec{r}_0' &= \vec{r}_0 + t_0\vec{s}, \\ \vec{s}' &= \theta\vec{s}. \end{aligned}$$

Izbira $\vec{r}_0'$ in $\vec{s}'$ nam porodi drugo parametrizacijo premice p, in sicer

$$\vec{r} = \vec{r}_0' + t\vec{s}' = (\vec{r}_0 + t_0\vec{s}) + t\theta\vec{s} = \vec{r}_0 + (t_0 + t\theta)\vec{s}.$$

Pri reparametrizaciji se nam spremenita začetni položaj in pa hitrost gibanja po premici. V standardni obliki enačbe premice se reparametrizacija pozna na naslednji način

$$\frac{x - (x_0 + t_0\alpha)}{\theta\alpha} = \frac{y - (y_0 + t_0\beta)}{\theta\beta} = \frac{z - (z_0 + t_0\gamma)}{\theta\gamma},$$

$$\frac{1}{\theta}\left(\frac{x - x_0}{\alpha} - t_0\right) = \frac{1}{\theta}\left(\frac{y - y_0}{\beta} - t_0\right) = \frac{1}{\theta}\left(\frac{z - z_0}{\gamma} - t_0\right).$$

Sistem enačb, ki ustreza reparametrizirani premici, dobimo iz prvotnega sistema s translacijo in z množenjem z ustreznima skalarjema.

V splošnem določata dve različni parametrizaciji isto premico, če imata kolinearna smerna vektorja, izhodišče ene pa leži na drugi premici.

Zgled. Poglejmo si premici, podani z enačbama

$$\begin{aligned} \frac{x-5}{2} &= \frac{y-7}{3} = \frac{z}{5}, \\ \frac{x-1}{4} &= \frac{y-1}{6} = \frac{z+10}{10}. \end{aligned}$$

Smerna vektorja obeh premic sta

$$\begin{aligned} \vec{s}_1 &= (2, 3, 5), \\ \vec{s}_2 &= (4, 6, 10). \end{aligned}$$

Ker je $\vec{s}_2 = 2\vec{s}_1$, sta vektorja kolinearna. To pomeni, da sta premici, ki jih določata ti dve enačbi, vzporedni. Tu nastopita sedaj dve možnosti: premici sta lahko enaki, lahko pa se ne sekata. Da ugotovimo, katera izmed možnosti nastopi, je dovolj izbrati poljubno točko na prvi premici in preveriti, ali leži na drugi premici. Na prvi premici zagotovo leži točka $(5, 7, 0)$. Če te koordinate vstavimo v drugo enačbo, dobimo enakosti

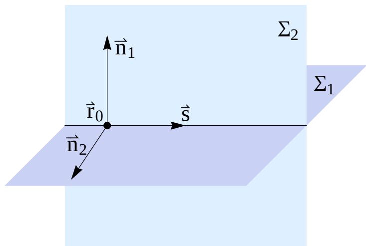
$$\frac{5-1}{4} = \frac{7-1}{6} = \frac{10}{10},$$

ki so izpolnjene, zato obe enačbi določata isto premico.

Zgled. Premico lahko podamo tudi s sistemom dveh enačb za tri neznanke

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2.$$

Vsaka izmed enačb določa ravnino Σ_1 oziroma Σ_2 v prostoru, pogoj pa je, da ti dve ravnini nista vzporedni. To lahko zapišemo s pogojem $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0}$, kjer smo označili $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ in $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$. Za smerni vektor tako dobljene premice lahko vzamemo kar vektor $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, za točko $\vec{r}_0$ pa lahko vzamemo poljubno rešitev sistema enačb.



Poglejmo na primer sistem enačb

$$3x - 2y + 4z = 0,$$
$$4x - y + z = 5.$$

Potem je $\vec{n}_1 = (3, -2, 4)$, $\vec{n}_2 = (4, -1, 1)$ in $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (2, 13, 5)$. Za točko na premici pa lahko vzamemo npr. $\vec{r}_0 = (2, 3, 0)$. Kanonska enačba premice je torej

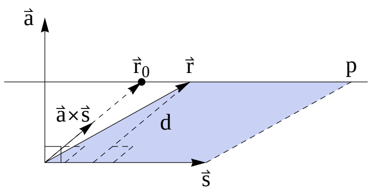
$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{13} = \frac{z}{5}.$$

Zgled. Naj bosta sedaj $\vec{s}, \vec{a} \in \mathbb{R}^3$ poljubna pravokotna, neničelna vektorja. Radi bi pokazali, da enačba

$$\vec{s} \times \vec{r} = \vec{a}$$

določa premico s smernim vektorjem $\vec{s}$.

Iz enačbe $\vec{s} \times \vec{r} = \vec{a}$ sledi, da je $\vec{a}$ pravokoten na vektorja $\vec{s}$ in $\vec{r}$. Torej leži $\vec{r}$ v ravnini, ki gre skozi izhodišče in ima normalo $\vec{a}$. Ker pa je $|\vec{s} \times \vec{r}| = |\vec{a}|$ konstanta, imajo paralelogrami, napeti na vektorja $\vec{s}$ in $\vec{r}$, vsi enako ploščino.



Od tod sklepamo, da našo enačbo rešijo točke na premici, ki leži v ravnini pravokotni na $\vec{a}$, ima smer $\vec{s}$ in je od izhodišča oddaljena za $d = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{s}|}$. Sedaj moramo le še najti neko točko na tej premici. Izbrali bomo kar točko na premici, ki je najbližje koordinatnemu izhodišču. Vemo, da ta točka hkrati leži na premici $\vec{r} = t(\vec{a} \times \vec{s})$. Če to vstavimo v enačbo, dobimo z uporabo formule za dvojni vektorski produkt

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \vec{s} \times \vec{r}, \\
\vec{a} &= \vec{s} \times (t(\vec{a} \times \vec{s})), \\
\vec{a} &= t(\vec{s} \times (\vec{a} \times \vec{s})), \\
\vec{a} &= t((\vec{s} \cdot \vec{s})\vec{a} - (\vec{s} \cdot \vec{a})\vec{s}), \\
\vec{a} &= t|\vec{s}|^2 \vec{a}.
\end{aligned}$$

Na premici torej leži točka $\vec{r}_0 = \frac{\vec{a} \times \vec{s}}{|\vec{s}|^2}$, enačbi pa zadoščajo točke oblike

$$\vec{r} = \frac{\vec{a} \times \vec{s}}{|\vec{s}|^2} + t\vec{s},$$

za poljuben $t \in \mathbb{R}$.

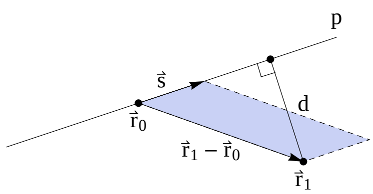
Medsebojna lega točk, premic in ravnin v $\mathbb{R}^3$

Za konec bomo izpeljali še nekaj formul, s pomočjo katerih lahko računamo razdalje med točkami, premicami in ravninami ter kote med premicami in ravninami.

(1) Razdalja med dvema točkama: Naj bosta $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^3$ poljubni točki. Razdalja med njima je potem enaka

$$d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|.$$

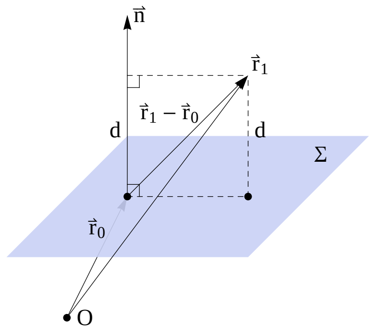
(2) Razdalja točke od premice: Naj bo $\vec{r}_1 \in \mathbb{R}^3$ točka in p premica s parametrizacijo $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}$.



Razdaljo med točko $\vec{r}_1$ in premico p lahko izračunamo na naslednji način. Ploščina paralelograma, ki je napet na vektorja $\vec{s}$ in $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$ je po eni strani enaka $|\vec{s} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|$, po drugi strani pa $|\vec{s}|\, d$. Od tod dobimo

$$d(\vec{r}_1, p) = \frac{|\vec{s} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|}{|\vec{s}|}.$$

(3) Razdalja točke od ravnine: Naj bo $\vec{r}_1 \in \mathbb{R}^3$ točka in Σ ravnina z enačbo $(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0$.

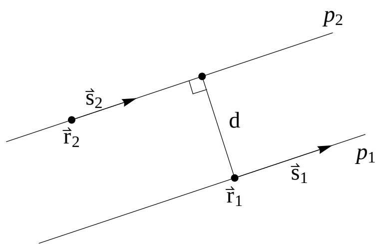


Razdalja točke $\vec{r}_1$ od ravnine Σ je potem enaka dolžini projekcije vektorja $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$ na normalo $\vec{n}$ ravnine Σ. Od tod sledi

$$d(\vec{r}_1, \Sigma) = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}.$$

(4) Razdalja med dvema premicama: Naj bosta p_1 in p_2 premici, podani v parametričnih oblikah $\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{s}_1$ oziroma $\vec{r} = \vec{r}_2 + t\vec{s}_2$. Glede na njuno medsebojno lego ločimo dva primera.

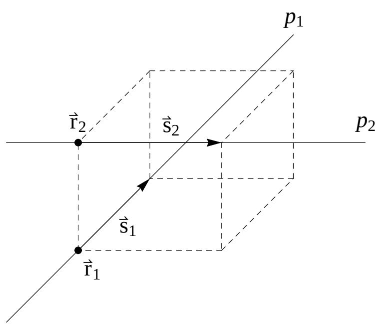
a) Recimo, da sta premici vzporedni oziroma $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \vec{0}$.



Potem je razdalja med premicama enaka razdalji med poljubno točko na prvi premici in pa drugo premico. Vzamemo lahko na primer

$$d(p_1, p_2) = \frac{|\vec{s}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)|}{|\vec{s}_2|}.$$

b) Če premici nista vzporedni, je $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 \neq \vec{0}$.



V tem primeru lahko razdaljo med premicama določimo na naslednji način. Naj bo $\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$. Ravnini Σ_1 in Σ_2 skozi točki $\vec{r}_1$ oziroma $\vec{r}_2$ in z normalo $\vec{n}$ sta potem vzporedni. Konstruirani sta tako, da premica p_1 leži v Σ_1, premica p_2 v Σ_2, razdalja med premicama pa je enaka razdalji med ravninama. Za izračun te razdalje si poglejmo paralelepiped z izhodiščem v $\vec{r}_1$, ki je napet na vektorje $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ in $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Njegova prostornina je po eni strani enaka $|(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{r}_2 - \vec{r}_1)|$, po drugi strani pa $|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|\, d$. Od tod sledi

$$d(p_1, p_2) = \frac{|(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}.$$

(5) Razdalja med premico in ravnino, razdalja med dvema ravninama:
Razdalja med premico in ravnino je neničelna le, če se ne sekata. V tem primeru je enaka razdalji med katerokoli točko na premici in pa ravnino. Podobno velja za razdaljo med dvema ravninama.

Zgled. (1) Izračunajmo razdaljo točke $\vec{r}_1 = (4, 4, -5)$ od ravnine Σ z enačbo

$$3x - 4y + 12z = 1.$$

Ravnina ima normalo $n = (3, -4, 12)$ in vsebuje točko $\vec{r}_0 = (-1, -1, 0)$. Sledi

$$d(\vec{r}_1, \Sigma) = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(5, 5, -5) \cdot (3, -4, 12)|}{|(3, -4, 12)|} = \frac{|-65|}{13} = 5.$$

(2) Izračunajmo razdaljo med premicama p_1 in p_2 z enačbama

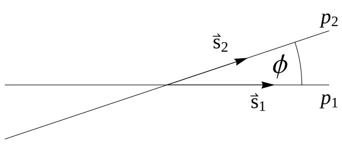
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3},$$

$$x = y + 3,\ z = 0.$$

Smerna vektorja premic sta $\vec{s}_1 = (2, 2, 3)$ in $\vec{s}_2 = (1, 1, 0)$, točki na njih pa $\vec{r}_1 = (1, 0, -1)$ ter $\vec{r}_2 = (0, -3, 0)$. Sledi $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = (-3, 3, 0)$ in

$$d(p_1, p_2) = \frac{|(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|} = \frac{|(-3, 3, 0) \cdot (-1, -3, 1)|}{|(-3, 3, 0)|} = \frac{6}{\sqrt{18}} = \sqrt{2}.$$

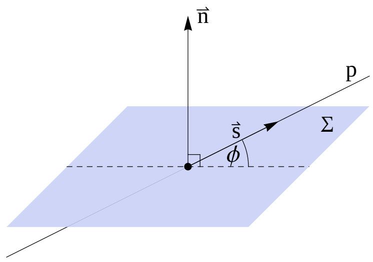
(6) Kot med dvema premicama: Naj bosta p_1 in p_2 premici, podani v parametričnih oblikah $\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{s}_1$ oziroma $\vec{r} = \vec{r}_2 + t\vec{s}_2$.



Kot med premicama p_1 in p_2 je tisti kot med njunima smernima vektorjema, ki je oster

$$\cos\phi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}.$$

(7) Kot med premico in ravnino: Kot med premico p s parametrizacijo $\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{s}$ in ravnino Σ z enačbo $(\vec{r} - \vec{r}_2) \cdot \vec{n} = 0$ je kot med premico p in njeno projekcijo na ravnino Σ.



Nekoliko lažje je izračunati kot $\frac{\pi}{2} - \phi$, ki je kot med normalo na ravnino in smerjo premice. Torej je

$$\sin\phi = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}.$$

(8) Kot med dvema ravninama: Kot med dvema ravninama Σ_1 in Σ_2, podanima z enačbama $(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{n}_1 = 0$ oziroma $(\vec{r} - \vec{r}_2) \cdot \vec{n}_2 = 0$, je kot med njunima normalama

$$\cos\phi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}.$$

Zgled. Izračunajmo kot med premico p z enačbo

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = z$$

in ravnino Σ z enačbo

$$-2x + y + z = 5.$$

Smerni vektor premice je $\vec{s} = (3, 2, 1)$, smer normale ravnine pa $\vec{n} = (-2, 1, 1)$. Sledi

$$\sin\phi = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|} = \frac{|-3|}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{21}}{14}.$$