Matematika 1
Rešitve 6. sklopa nalog

Funkcije ene realne spremenljivke

(2) Izračunaj limite funkcij:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-5x+6}-x)$,

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

Rešitev: Limite funkcij računamo podobno kot limite zaporedij, upoštevamo pa naslednji splošni navodili:

· če je funkcija f zvezna v točki a, je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$,

· če predpis za funkcijo f ni definiran v točki a, poskušamo najti tak predpis g, ki je definiran v a, in da za x blizu a ($x \neq a$) velja $f(x) = g(x)$.

(a) $$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-5x+6}-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-5x+6}-x)(\sqrt{x^2-5x+6}+x)}{\sqrt{x^2-5x+6}+x},$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-5x+6}{\sqrt{x^2-5x+6}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-5+\frac{6}{x}}{\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+1} = -\frac{5}{2}.$$

(b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}} = 1.$$

(c) $$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to-1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x\to-1}\frac{x-1}{x+2} = -2.$$

(d) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)},$$
$$= -\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{1+x+x^2} = -1.$$

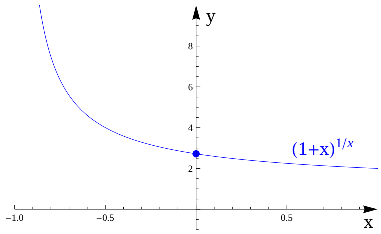
□

(3) Naj bo g poljubna zvezna funkcija, za katero je $g(0) = 0$.

(a) Dokaži, da velja $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

(b) Dokaži, da velja $\lim_{x \to 0} (1+g(x))^{\frac{1}{g(x)}} = e$.

Rešitev: (a) Predpis $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ je definiran za vsak $x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$, kjer definira zvezno funkcijo. Pri tej nalogi bomo pokazali, da lahko funkcijo f zvezno razširimo skozi $x = 0$, če definiramo $f(0) = \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.



Limita $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ je pomembna predvsem zato, ker jo potrebujemo za izračun odvoda naravnega logaritma.

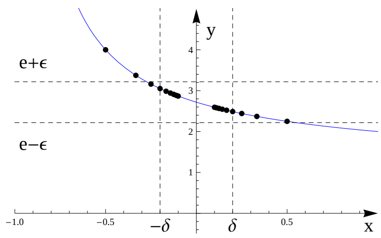
Vzemimo poljuben $\epsilon > 0$. Najti želimo tak $\delta > 0$, da bo za vsak $x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ veljalo

$$|f(x) - e| < \epsilon.$$

Pri tem si bomo pomagali z naslednjima znanima limitama zaporedij

$$\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e,$$
$$\lim_{n \to \infty} f\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e.$$

Ti limiti povesta, da se približujemo k e, ko gremo proti nič po številih oblike $x = \frac{1}{n}$ za $n \in \mathbb{Z}$. Naš cilj bo, da pokažemo, da podobno velja tudi za ostale x blizu števila nič.



Izberimo sedaj poljuben $x \in (0, 1)$. Potem obstaja enolično določen $n_x \in \mathbb{N}$, da velja $\frac{1}{n_x+1} \leq x < \frac{1}{n_x}$ oziroma $n_x < \frac{1}{x} \leq n_x + 1$. Iz prve neenakosti dobimo neenakost

$$1 + \frac{1}{n_x + 1} \leq 1 + x < 1 + \frac{1}{n_x}.$$

Vsa tri števila v tej neenakosti so večja od ena, zato pridemo s potenciranjem do ocene

$$\left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right)^{n_x} < \left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right)^{\frac{1}{x}} \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} < \left(1 + \frac{1}{n_x}\right)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1 + \frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1}.$$

Zaporedji na levi in na desni strani verige neenakosti konvergirata proti e, zato lahko najdemo tak $N \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq N$ velja

$$e - \epsilon < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \epsilon$$

Vzemimo $\delta = \frac{1}{N}$. Za $0 < x < \delta$ je potem $n_x \geq N$, od koder sledi

$$e - \epsilon < \left(1 + \frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} < \left(1 + \frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1} < e + \epsilon$$

Torej je

$$\lim_{x \to 0+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Za $-1 < x < 0$ je dokaz podoben. Za vsak tak x obstaja enolično določen $n_x \in \mathbb{N}$, da velja $-\frac{1}{n_x} < x \leq -\frac{1}{n_x+1}$. Levo limito lahko nato dokažemo s pomočjo neenakosti

$$\left(1 - \frac{1}{n_x+1}\right)^{-n_x} \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} < \left(1 - \frac{1}{n_x}\right)^{-n_x-1}.$$

(b) Pri nalogi (a) smo pokazali, da bo f zvezna funkcija na intervalu $(-1, \infty)$, če definiramo $f(0) = e$. Od tod sledi, da je tudi funkcija $f \circ g$ zvezna, kar pa v posebnem pomeni, da je

$$\lim_{x \to 0} f(g(x)) = f(g(0)).$$

Po predpostavki je $f(g(0)) = f(0) = e$, zato je

$$\lim_{x \to 0} (1 + g(x))^{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \to 0} f(g(x)) = f(g(0)) = e.$$

□

(4) Izračunaj limite funkcij:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \sin x)^{1/x}$,

(b) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/\sin^2 x}$,

(c) $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x + \cos x)^{1/\operatorname{tg} x}$.

Rešitev: Pri računanju teh limit si bomo pomagali z limito

$$\lim_{x \to 0} (1 + g(x))^{\frac{1}{g(x)}} = e,$$

ki velja za poljubno zvezno funkcijo g, za katero je $g(0) = 0$. S pomočjo te limite lahko izračunamo limite oblike

$$\lim_{x \to 0} (1 + g(x))^{h(x)},$$

kjer je $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ in $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \pm\infty$. Velja namreč

$$\lim_{x \to 0} (1 + g(x))^{h(x)} = \lim_{x \to 0} e^{\ln((1+g(x))^{h(x)})} = \lim_{x \to 0} e^{g(x)h(x) \ln((1+g(x))^{\frac{1}{g(x)}})} = e^{\lim\limits_{x \to 0} g(x)h(x)}.$$

Ekvivalentno pa velja tudi

$$\lim_{x\to 0} f(x)^{h(x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-1)h(x)},$$

kjer je $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ in $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \pm\infty$.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/\sin^2 x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{(1-\cos x)(1+\cos x)}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$

(c)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{1/\operatorname{tg} x} &= \lim_{x\to 0}\left((1+\operatorname{tg} x)\cos x\right)^{1/\operatorname{tg} x} = e\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/\operatorname{tg} x},\\ &= e\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}\cdot(\cos x\sin x)} = e\cdot(e^{-\frac{1}{2}})^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x\sin x)},\\ &= e\cdot(e^{-\frac{1}{2}})^0 = e.\end{aligned}$$

□

(5) Naj bo funkcija f definirana s predpisom $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}$. Določi definicijsko območje funkcije f in izračunaj njene limite na robu definicijskega območja.

Rešitev: Funkcija $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}$ je definirana na $\mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty,0)\cup(0,\infty)$, zato nas zanimajo limite pri $x\to\pm\infty$ in pa pri $x\to 0$.
Ker je $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = 1$, je

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{2}.$$

Limite funkcije $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}$ pri $x\to 0$ pa ne moremo izračunati s prevedbo na kakšno znano limito. V takem primeru ponavadi poskušamo limito uganiti in nato našo domnevo dokazati. V primeru funkcije f bi tako lahko ugotovili, da sta leva in desna limita pri $x=0$ različni in da velja

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{1+e^{1/x}} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{1+e^{1/x}} = 1.$$

Pokažimo npr. po definiciji, da velja $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{1+e^{1/x}} = 0$.

Izberimo $\epsilon > 0$. Brez škode se lahko omejimo na primer, ko je $\epsilon < 1$. Sedaj želimo najti tak $\delta > 0$, da bo za vsak $0 < x < \delta$ veljalo $|f(x)-0| < \epsilon$ oziroma $\frac{1}{1+e^{1/x}} < \epsilon$. Računajmo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+e^{1/x}} &< \epsilon,\\ \frac{1}{\epsilon}-1 &< e^{1/x},\\ \ln\left(\frac{1}{\epsilon}-1\right) &< \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Ker je $\epsilon < 1$, od tod sledi

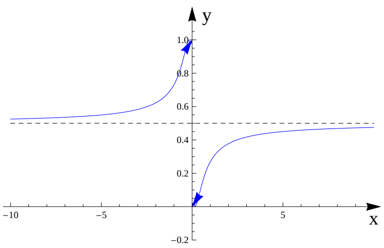
$$\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right)} > x.$$

Če torej izberemo $\delta = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}-1\right)}$, bo za vsak $0 < x < \delta$ veljalo $|f(x)| < \epsilon$.

Da je $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 1$, lahko dokažemo na podoben način.

Ker leva in desna limita nista enaki, limita $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{1+e^{1/x}}$ ne obstaja.

Grafično to pomeni, da grafa funkcije f ne moremo zvezno razširiti preko $x = 0$.



Opomba: Limita funkcije f v dani točki obstaja natanko takrat, ko obstajata leva in desna limita funkcije f v dani točki in sta enaki. $\square$

(6) Naj bo $f(x) = (x+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1-x^2}$. Določi območje zveznosti funkcije f. Ali je možno funkcijo f zvezno razširiti na $\mathbb{R}$?

Rešitev: Dani predpis definira zvezno funkcijo na množici $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Kot bomo videli v nadaljevanju, lahko funkcijo f zvezno razširimo še na točko $x = -1$, v točki $x = 1$ pa ima funkcija f skok.

$\underline{x = -1}$: Pišimo $g(x) = x + 1$ in $h(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1-x^2}$. Potem je $g(-1) = 0$ in $|h(x)| < \frac{\pi}{2}$, kar pomeni, da je funkcija f v okolici točke $x = -1$ produkt omejene funkcije in pa funkcije, ki ima v točki $x = -1$ ničlo. Pokazali bomo, da od tod sledi

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} g(x)h(x) = 0.$$

Izberimo torej poljuben $\epsilon > 0$. Ker je $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = 0$, obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in (-1-\delta, -1+\delta) \setminus \{-1\}$ velja $|x+1| < \frac{\epsilon}{\frac{\pi}{2}}$. Za $x \in (-1-\delta, -1+\delta) \setminus \{-1\}$ potem velja

$$\left|(x+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1-x^2}\right| < \frac{\epsilon}{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \epsilon.$$

Pri poljubnem ϵ je torej $|g(x)h(x)| < \epsilon$, če je le x dovolj blizu -1. Sledi $\lim\limits_{x \to -1} g(x)h(x) = 0$.

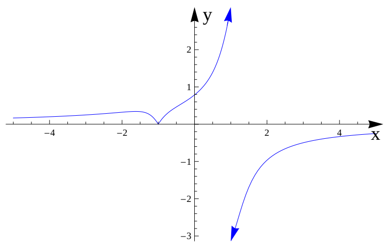
$\underline{x = 1}$: Velja $\lim\limits_{x \to 1+} \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1-x^2} = -\frac{\pi}{2}$ in $\lim\limits_{x \to 1-} \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$, od koder sledi

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = -\pi,$$

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \pi.$$

Funkcije f torej ne moremo zvezno razširiti na $\mathbb{R}$.

Poglejmo še graf funkcije f.



Opomba: Na podoben način lahko pokažemo tudi naslednjo trditev. Če je $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ in je g omejena funkcija v okolici točke a, je

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0.$$

$\square$

(7) Naj bo $f(x) = \frac{a^2e^{1/x}+a+2}{1+e^{1/x}}$. Določi a tako, da bo funkcijo f možno zvezno razširiti v $x = 0$.

Rešitev: Najprej se spomnimo, da velja $\lim_{x\to 0+} e^{1/x} = \infty$ in $\lim_{x\to 0-} e^{1/x} = 0$. Sledi

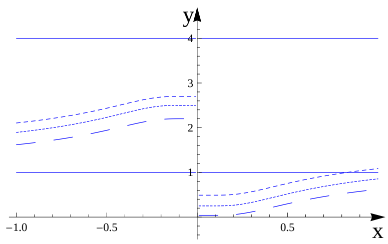
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{a^2e^{1/x}+a+2}{1+e^{1/x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{a^2 + \frac{a}{e^{1/x}} + \frac{2}{e^{1/x}}}{\frac{1}{e^{1/x}}+1} = a^2,$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{a^2e^{1/x}+a+2}{1+e^{1/x}} = a+2.$$

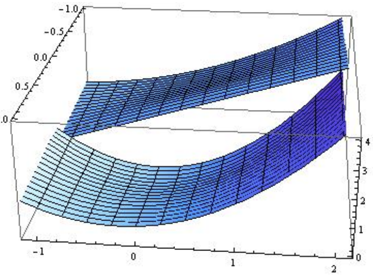
Funkcijo f bo možno zvezno razširiti v točko $x = 0$, ko bo $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x)$. To bo veljalo, če bo izpolnjena enačba $a^2 = a + 2$, kar nam da $a \in \{-1, 2\}$.
V tem primeru dobimo:

$$a = -1 \Rightarrow f(x) = 1,$$
$$a = 2 \Rightarrow f(x) = 4.$$

Opomba: Funkcijo $f(x) = \frac{a^2e^{1/x}+a+2}{1+e^{1/x}}$ si lahko predstavljamo kot družino funkcij, ki so odvisne od parametra a. Vse funkcije so zvezne izven točke 0, v točki 0 pa imajo skok, razen v primerih, ko je $a \in \{-1, 2\}$. Na sliki so predstavljeni grafi teh funkcij pri nekaterih parametrih.



Te grafe lahko skupaj zložimo v graf funkcije dveh spremenljivk. Tako dobimo ploskev, ki je nepretrgana pri parametrih $a \in \{-1, 2\}$, pri ostalih parametrih pa je v točki $x = 0$ pretrgana.



$\square$

(8) S pomočjo metode bisekcije poišči na eno decimalko natančno rešitev enačbe $\cos x = x$.

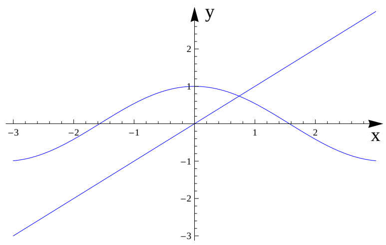
Rešitev: Poznamo metode, s pomočjo katerih lahko rešujemo polinomske, trigonometrične, eksponentne in druge enačbe. V kolikor te metode delujejo, lahko najdemo natančne rešitve enačb. Če točne rešitve ne znamo najti, pa lahko približno rešitev poiščemo s kakšno numerično metodo. Metoda bisekcije je ena izmed njih.

Pri metodi bisekcije uporabljamo naslednji algoritem:

· izberemo željeno natančnost,
· enačbo zapišemo v obliki $f(x) = 0$,
· izberemo začetni interval, ki vsebuje ničlo,
· na vsakem koraku razdelimo interval na dva dela in izberemo tistega, ki vsebuje ničlo,
· postopek ponavljamo, dokler ne dosežemo željene natančnosti.

Delovanje metode temelji na dejstvu, da je graf zvezne funkcije neprekinjen. Če ima torej funkcija v enem krajišču intervala negativno vrednost, v drugem pa pozitivno vrednost, mora imeti nekje na intervalu ničlo.

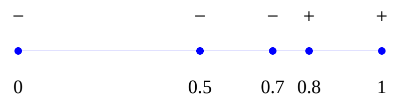
Poskusimo sedaj rešiti enačbo $\cos x = x$. Z grafa je razvidno, da bo rešitev nekje na intervalu $[0, 1]$.



Da bi lahko uporabili metodo bisekcije, enačbo najprej prepišimo v obliko $x - \cos x = 0$ in definirajmo funkcijo $f(x) = x - \cos x$. Velja $f(0) = -1$ in $f(1) = 0.46$, zato bomo začeli z intervalom $[0, 1]$.

· $f(0.5) = -0.38,$ zato bo ničla na intervalu $[0.5, 1]$,
· $f(0.8) = 0.10,$ zato bo ničla na intervalu $[0.5, 0.8]$,
· $f(0.7) = -0.06,$ zato bo ničla na intervalu $[0.7, 0.8]$.

Ker je $f(0.75) = 0.02$, bomo za približek vzeli število $x = 0.7$.



Bolj natančen približek za rešitev enačbe je $x = 0.739085$. $\square$