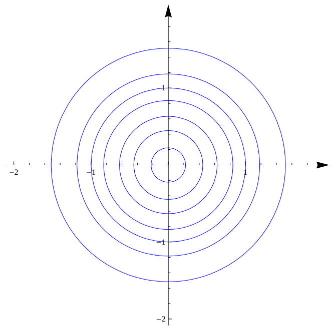
Matematika 1
Rešitve 13. sklopa nalog

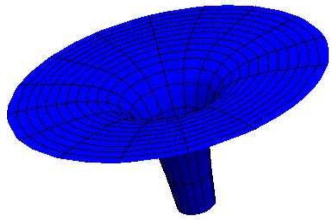
Funkcije večih spremenljivk

(2) Izračunaj nivojnice in gradientno vektorsko polje potenciala

$$V(x,y) = -\frac{mMG}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Rešitev: Nivojnice potenciala V so krožnice s središči v koordinatnem izhodišču, njegov graf pa ima naslednjo obliko.





Gradientno vektorsko polje funkcije dveh spremenljivk f je vektorsko polje

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

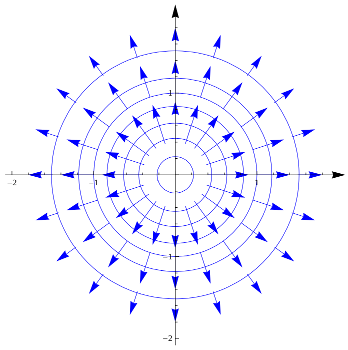
V primeru funkcije $V(x,y) = -\frac{mMG}{\sqrt{x^2+y^2}}$ je:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = \frac{mMGx}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$
$$\frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = \frac{mMGy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$

od koder dobimo

$$\nabla V = \left(\frac{mMGx}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \frac{mMGy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\right).$$

Gradientno vektorsko polje je pravokotno na nivojnice in kaže v smeri najhitrejšega naraščanja potenciala.



Potencial V predstavlja potencialno energijo telesa z maso m v gravitacijskem polju telesa z maso M. Gravitacijska sila kaže v nasprotni smeri gradienta potenciala

$$\vec{F} = -\nabla V.$$

Ponavadi gravitacijsko silo predstavimo v polarnih koordinatah, kjer je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ in $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = (\cos\phi, \sin\phi)$ enotsko vektorsko polje v radialni smeri. Tedaj je

$$\vec{F} = -\frac{mMG}{r^2}\vec{e}_r.$$

□

(3) Aproksimiraj funkcijo

$$f(x, y) = (x^2 + x + 1)\sin y + e^x$$

s Taylorjevim polinomom reda 3 v okolici točke $a = (0, 0)$.

Rešitev: Gladko funkcijo $f = f(x, y)$ lahko v okolici točke $a = (x_0, y_0)$ aproksimiramo s Taylorjevim polinomom stopnje n:

$$\begin{aligned}
T_n(x, y) = f(a) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(a)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\cdot(y - y_0) \\
&+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\cdot(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\cdot(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\cdot(y - y_0)^2\right) + \cdots \\
&+ \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(a)\cdot(x - x_0)^{n-k}(y - y_0)^k.
\end{aligned}$$

Izračunajmo najprej vse parcialne odvode do reda tri:

$$\begin{aligned}
&\cdot\ \frac{\partial f}{\partial x} = (2x + 1)\sin y + e^x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (x^2 + x + 1)\sin y, \\
&\cdot\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\sin y + e^x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (2x + 1)\cos y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -(x^2 + x + 1)\sin y, \\
&\cdot\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = e^x, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 2\cos y, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = -(2x + 1)\sin y, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -(x^2 + x + 1)\cos y.
\end{aligned}$$

Če izračunamo vrednosti teh parcialnih odvodov v točki $a = (0, 0)$ in uporabimo formulo za Taylorjev razvoj, dobimo

$$T_3(x, y) = 1 + x + y + \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{6}x^3 + x^2 y - \frac{1}{6}y^3.$$

Opomba: Graf Taylorjevega polinoma stopnje ena

$$T_1(x, y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\cdot(y - y_0)$$

je ravno tangentna ravnina na graf funkcije v točki $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. □

(4) Van der Waalsova enačba stanja

$$nRT = (V - B)\left(p + \frac{A}{V^2}\right)$$

povezuje temperaturo, tlak in volumen plina. S totalnim diferencialom oceni, za koliko se spremeni tlak plina, če se temperatura in volumen plina spremenita za dT oziroma dV.

Rešitev: Van der Waalsova enačba stanja

$$nRT = (V - B)\left(p + \frac{A}{V^2}\right)$$

implicitno določa tlak plina kot funkcijo temperature in volumna plina $p = p(T, V)$. V termodinamiki je pomemben podatek, kako se spremeni tlak plina pri majhnih spremembah temperature in volumna. To spremembo lahko aproksimiramo s totalnim diferencialom

$$dp = \frac{\partial p}{\partial T}\, dT + \frac{\partial p}{\partial V}\, dV.$$

Matematično je ta formula aproksimacija funkcije p s Taylorjevim polinomom reda 1. Za izračun parcialnih odvodov bi lahko najprej iz Van der Waalsove enačbe eksplicitno izrazili p in ga nato parcialno odvajali. Za vajo pa bomo raje parcialna odvoda izračunali kar z implicitnim odvajanjem Van der Waalsove enačbe po spremenljivkah T in V. Tako dobimo:

$$\begin{aligned} nR &= (V - B)\frac{\partial p}{\partial T}, \\ 0 &= \left(p + \frac{A}{V^2}\right) + (V - B)\left(\frac{\partial p}{\partial V} - \frac{2A}{V^3}\right). \end{aligned}$$

Od tod lahko eksplicitno izrazimo parcialna odvoda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial T} &= \frac{nR}{V - B}, \\ \frac{\partial p}{\partial V} &= \frac{2A}{V^3} - \frac{p + \frac{A}{V^2}}{V - B} = \frac{2A}{V^3} - \frac{nRT}{(V - B)^2}, \end{aligned}$$

kar nam da formulo

$$dp = \frac{nR}{V - B}\, dT + \left(\frac{2A}{V^3} - \frac{nRT}{(V - B)^2}\right) dV.$$

□

(5) Poišči vse lokalne ekstreme danih funkcij in jih klasificiraj:

(a) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$,

(b) $f(x, y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y$,

(c) $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.

Rešitev: Ekstreme funkcij dveh spremenljivk iščemo v dveh korakih. Najprej poiščemo stacionarne točke funkcije f. V stacionarnih točkah je tangentna ravnina na graf funkcije vodoravna, dobimo pa jih kot rešitve sistema enačb:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Tip stacionarne točke lahko določimo s pomočjo matrike drugih odvodov funkcije f:

$$H_{(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}.$$

Naj bo (x_0, y_0) stacionarna točka funkcije f. Če je $\det H_{(x_0,y_0)} > 0$, ima f v (x_0, y_0) lokalni ekstrem, in sicer:

- če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, zavzame f v (x_0, y_0) lokalni minimum,
- če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, zavzame f v (x_0, y_0) lokalni maksimum.

Če je $\det H_{(x_0,y_0)} < 0$, f v (x_0, y_0) nima ekstrema (ima sedlo). Če pa je $\det H_{(x_0,y_0)} = 0$, pa moramo pogledati višje odvode.

(a) $\underline{f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y}$:

Velja $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12$. Od tod dobimo sistem enačb:

$$x^2 + y^2 = 5,$$
$$xy = 2.$$

Če iz druge enačbe izrazimo $y = \frac{2}{x}$ in vstavimo v prvo enačbo, dobimo:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0,$$
$$(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0.$$

Funkcija f ima štiri stacionarne točke $T_1(1,2)$, $T_2(2,1)$, $T_3(-1,-2)$ in $T_4(-2,-1)$. Izračunajmo sedaj druge odvode:

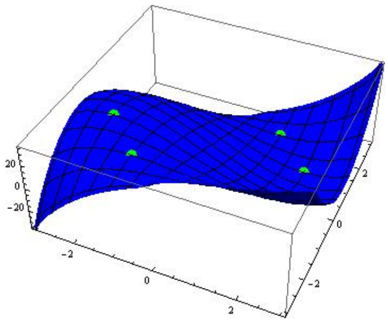
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x,$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y,$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x.$

Sledi

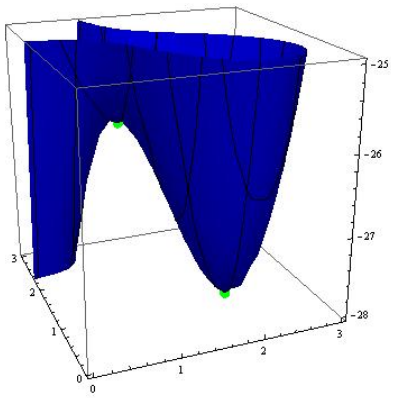
$$H_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}, \; H_{(2,1)} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}, \; H_{(-1,-2)} = \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{bmatrix}, \; H_{(-2,-1)} = \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}.$$

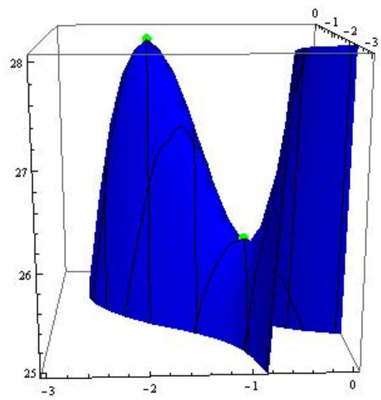
Od tod sklepamo, da ima f v točki $T_2(2,1)$ lokalni minimum, v točki $T_4(-2,-1)$ lokalni maksimum, v točkah $T_1(1,2)$ in $T_3(-1,-2)$ pa sedlo.

Poglejmo si graf funkcije v okolici stacionarnih točk.



Če narišemo vse koordinatne osi v istem merilu, dobimo naslednji sliki.





V točki T_2 je torej dno doline, v katero vodi prehod skozi sedlo v točki T_1. Podobno je v točki T_4 vrh hriba, s katerega se lahko spustimo do sedla v točki T_3.

(b) $\underline{f(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y}$:

Tukaj je $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{8}{x^2} + \frac{1}{y}$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + 1$. Dobimo sistem enačb:

$$
\begin{aligned}
x^2 &= 8y, \\
y^2 &= x.
\end{aligned}
$$

Sledi:

$$
\begin{aligned}
y^4 &= 8y, \\
y(y^3 - 8) &= 0.
\end{aligned}
$$

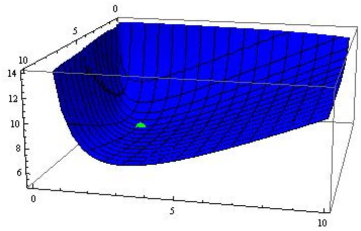
Funkcija f ni definirana v točkah, kjer je $y = 0$, zato ima eno samo stacionarno točko $T(4,2)$. Drugi odvodi f so:

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{16}{x^3}$,
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\dfrac{1}{y^2}$,
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{2x}{y^3}$.

Imamo

$$
H_{(4,2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix},
$$

od koder sledi, da ima f v točki T lokalni minimum. Poglejmo še graf funkcije f.



(c) $\underline{f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)}$:

Velja $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-y}(x^2 + 2x - 2y^2)$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 4y)$. Tako dobimo sistem enačb:

$$x^2 + 2x - 2y^2 = 0,$$
$$-x^2 + 2y^2 - 4y = 0.$$

Če enačbi seštejemo, dobimo $x = 2y$. Ko to vstavimo v prvo enačbo, dobimo:

$$2y^2 + 4y = 0,$$
$$y(y+2) = 0.$$

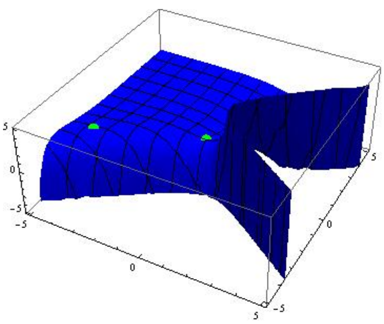
Funkcija f ima dve stacionarni točki $T_1(0,0)$ in $T_2(-4,-2)$. Izračunajmo še druge odvode:

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x-y}(x^2 + 4x - 2y^2 + 2)$,
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 2x - 4y)$,
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 8y - 4)$.

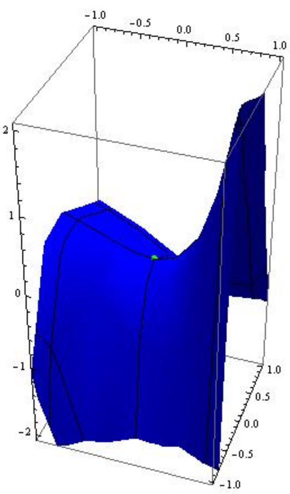
Tako dobimo

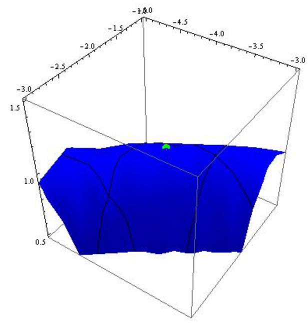
$$H_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \; H_{(-4,-2)} = e^{-2} \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da ima f v točki $T_1(0,0)$ sedlo, v točki $T_2(-4,-2)$ pa lokalni maksimum. Poglejmo še graf funkcije f.



V okolici stacionarnih točk pa graf izgleda takole.

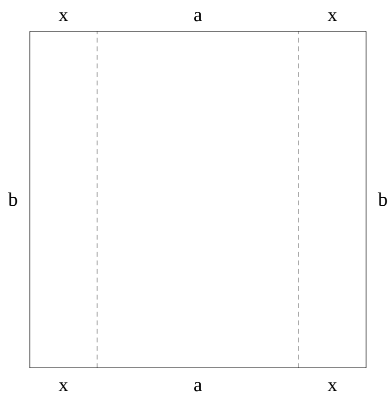


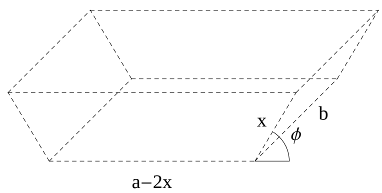


$\square$

(6) Pravokoten karton s stranicama dolžine a in b prepognemo na razdalji x vzdolž obeh daljših stranic za kot ϕ. Določi x in ϕ tako, da bo volumen dobljenega telesa maksimalen.

Rešitev: Ko prepognemo karton, dobimo telo v obliki žleba, ki v prerezu izgleda kot unija pravokotnika in dveh trikotnikov.





Volumen telesa v odvisnosti od spremenljivk x in ϕ je enak

$$V(x,\phi) = (a-2x)x\sin\phi\, b + x^2\sin\phi\cos\phi\, b.$$

Parcialna odvoda funkcije V sta:

$$\begin{aligned} V_x &= (a-4x)\sin\phi\, b + 2x\sin\phi\cos\phi\, b, \\ V_\phi &= (a-2x)x\cos\phi\, b + x^2 b(\cos^2\phi - \sin^2\phi), \end{aligned}$$

kar pomeni, da stacionarne točke funkcije V zadoščajo sistemu enačb:

$$\begin{aligned} \sin\phi\, b(a-4x+2x\cos\phi) &= 0, \\ xb((a-2x)\cos\phi + x(\cos^2\phi - \sin^2\phi)) &= 0. \end{aligned}$$

Ker je $b \neq 0$, bo prvi enačbi zadoščeno, če velja $\sin\phi = 0$ ali $a - 4x + 2x\cos\phi = 0$. V primeru, ko je $\sin\phi = 0$, je $V = 0$, zato gre za minimum. Zato nas zanima primer, ko je

$a - 4x + 2x\cos\phi = 0$. Podobno dobimo minimum tudi, ko velja $x = 0$ v drugi enačbi. Za izračun maksimuma funkcije V moramo torej rešiti sistem enačb:

$$\begin{aligned} a - 4x + 2x\cos\phi &= 0, \\ (a - 2x)\cos\phi + x(\cos^2\phi - \sin^2\phi) &= 0. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe lahko izpeljemo, da je

$$\cos\phi = 2 - \frac{a}{2x}.$$

Ko to vstavimo v drugo enačbo, dobimo:

$$\begin{aligned} (a - 2x)\left(2 - \frac{a}{2x}\right) + x\left(2\left(2 - \frac{a}{2x}\right)^2 - 1\right) &= 0, \\ 2a - 4x - \frac{a^2}{2x} + a + x\left(7 - \frac{4a}{x} + \frac{a^2}{2x^2}\right) &= 0, \\ 3x - a &= 0, \\ x &= \frac{a}{3}. \end{aligned}$$

Pri $x = \frac{a}{3}$ je $\phi = \frac{\pi}{3}$. Volumen dobljenega telesa bo torej maksimalen, ko bo:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{3}, \\ \phi &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

□