# Matematika 1
# Rešitve 1. sklopa nalog

---

### Množice

V matematiki množice pogosto ločujemo glede na njihovo moč oziroma velikost. Za množici $A$ in $B$ rečemo, da sta ekvipolentni oziroma enako močni, če obstaja bijekcija med njima. V fiziki so pomembne predvsem:

· končne množice,
· števno neskončne množice (te so ekvipolentne množici naravnih števil $\mathbb{N}$),
· množice z močjo kontinuuma (te so ekvipolentne množici realnih števil $\mathbb{R}$).

(1) Poišči bijekcije:

(a) $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$,
(b) $\mathbb{N} \to 5\mathbb{N}$,
(c) $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

*Rešitev:* Pri tej nalogi bomo pokazali, da so množice $\mathbb{N} \cup \{0\}$, $5\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$ števno neskončne. Če je $A$ števno neskončna množica, nam bijekcija $f : \mathbb{N} \to A$ omogoča, da elemente množice $A$ razvrstimo po vrsti. Če na primer definiramo $a_n := f(n) \in A$, dobimo razpored

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Če želimo pokazati, da je dana množica števno neskončna, je na intuitivni ravni zato dovolj, da elemente množice razvrstimo po vrsti, formalno pa lahko nato iz tega razporeda razberemo predpis za iskano bijekcijo.

(a) Najprej se spomnimo definiciji obeh množic:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, 4, \ldots\}, \\ \mathbb{N} \cup \{0\} &= \{0, 1, 2, 3, \ldots\}. \end{aligned}$$

Od tod dobimo idejo, kako bi elemente obeh množic povezali v pare

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \end{array}$$

Sedaj definirajmo funkciji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ in $g : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N}$ s predpisoma

$$\begin{aligned} f(n) &= n - 1, && n \in \mathbb{N}, \\ g(k) &= k + 1, && k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Potem velja $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ in $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N} \cup \{0\}}$, kar pomeni, da je $f$ bijekcija.

(b) Množica $5\mathbb{N}$ je množica petkratnikov naravnih števil

$$5\mathbb{N} = \{5, 10, 15, 20, \ldots\}.$$

Naravno se nam ponudi naslednje naštetje večkratnikov števila 5

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 & \dots \end{array}$$

od koder preberemo, da sta iskani bijekciji $f : \mathbb{N} \to 5\mathbb{N}$ in $g : 5\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dani s predpisoma

$$f(n) = 5n, \qquad n \in \mathbb{N},$$
$$g(k) = \frac{k}{5}, \qquad k \in 5\mathbb{N}.$$

(c) Bijekcij med množicama celih in pa naravnih števil je veliko, ni pa kakšne posebej odlikovane. Uporabimo lahko na primer naslednjo postavitev celih števil po vrsti

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ 0 & 1 & \text{-1} & 2 & \text{-2} & 3 & \dots \end{array}$$

Ustrezni bijekciji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ in $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ sta dani s predpisoma

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & ; n \text{ sod}, \\ -\frac{n-1}{2} & ; n \text{ lih}, \end{cases}$$

$$g(k) = \begin{cases} 2k & ; k > 0, \\ 2|k| + 1 & ; k \leq 0. \end{cases}$$

$\square$

(2) Dokaži:

(a) Neskončna podmnožica števno neskončne množice je števno neskončna.

(b) Kartezični produkt števno neskončnih množic je števno neskončen.

*Rešitev:* (a) Naj bo $A$ števno neskončna množica in $f : \mathbb{N} \to A$ bijekcija. S pomočjo funkcije $f$ lahko elemente $A$ uredimo po vrsti

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}.$$

Če je $S$ neskončna podmnožica $A$, je oblike

$$S = \{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots\},$$

kjer je $i_1 < i_2 < i_3 < \cdots$. Preslikava $g : \mathbb{N} \to S$, definirana s predpisom

$$g(n) = a_{i_n},$$

je potem iskana bijekcija.

(b) Naj bosta sedaj $A$ in $B$ števno neskončni množici. Elemente $A \times B$ lahko potem razporedimo v tabelo

$$\begin{array}{cccc} (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & (a_1, b_3) & \dots \\ (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & (a_2, b_3) & \dots \\ (a_3, b_1) & (a_3, b_2) & (a_3, b_3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Definirajmo sedaj funkcijo $f : \mathbb{N} \to A \times B$, tako da elemente množice $A \times B$ štejemo po 'diagonalah' v vrstnem redu $(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_1, b_2), (a_3, b_1), (a_2, b_2), \ldots$. Tako definirana funkcija $f$ je bijekcija.

*Opomba:* Od tod sledi, da je množica racionalnih števil $\mathbb{Q}$ števno neskončna. Množico racionalnih števil si namreč lahko predstavljamo kot neskončno podmnožico množice ulomkov

$$\left\{\frac{m}{n} \,|\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{N},$$

ki pa je števno neskončna. □

(3) Poišči bijekcije:

(a) $(0, 1) \to \mathbb{R}$,

(b) $(-5, \infty) \to \mathbb{R}$,

(c) $[-5, \infty) \to [-1, 1)$.

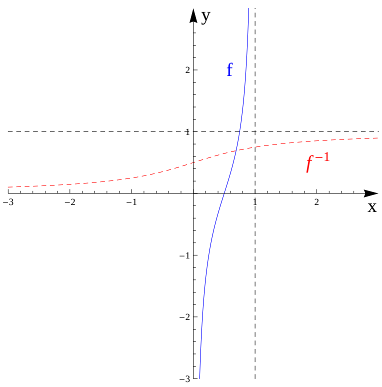
*Rešitev:* Pri tej nalogi bomo pokazali, da imajo končni in polneskončni intervali v bistvu vsi enako število elementov, kot jih ima množica realnih števil. Možnih bijekcij je seveda veliko, poskušali pa bomo najti kakšne razmeroma preproste.

(a) V tem primeru iščemo bijekcijo med končnim odprtim intervalom $(0, 1)$ in pa množico realnih števil $\mathbb{R}$. Lahko bi našli racionalno funkcijo, ki bi imela pola v robnih točkah intervala $(0, 1)$, lahko pa vzamemo tudi funkcijo $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Preslikava $f$ je potem bijekcija z inverzom

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tg} x + \frac{\pi}{2}\right).$$

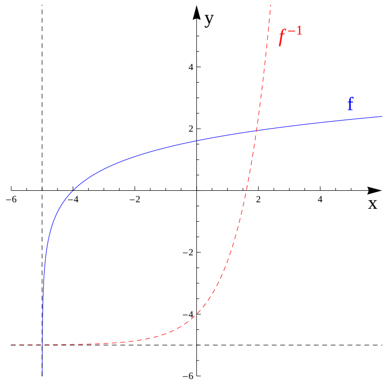



(b) Sedaj iščemo bijekcijo med polneskončnim intervalom $(-5, \infty)$ in pa realnimi števili. En primer bijekcije je logaritemska funkcija $f : (-5, \infty) \to \mathbb{R}$, dana s predpisom

$$f(x) = \ln(x + 5)$$

in z inverzom

$$f^{-1}(x) = e^x - 5.$$

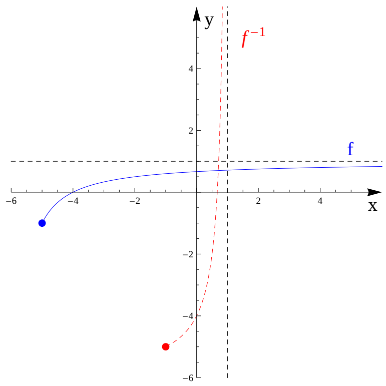



(c) Tokrat iščemo bijekcijo med polneskončnim intervalom $[-5,\infty)$ in končnim intervalom $[-1,1)$. Vzamemo lahko na primer racionalno funkcijo $f:[-5,\infty)\to[-1,1)$ s predpisom

$$f(x) = -\frac{2}{x+6} + 1.$$

Njen inverz ima predpis

$$f^{-1}(x) = \frac{2}{1-x} - 6.$$




*Opomba:* Preslikave, ki smo jih konstruirali pri tej nalogi so vse zvezne. Lahko pa bi konstruirali tudi kakšne nezvezne bijekcije. $\square$

(4) Poišči bijekcijo: $[0,1]\to(0,1)$.

*Rešitev:* V tem primeru ne bomo mogli najti zvezne bijekcije $f:[0,1]\to(0,1)$, ker takšne preslikave sploh ni. Zato se bomo morali malo bolj potruditi. Označimo z $A\subset[0,1]$ in $A'\subset(0,1)$ podmnožici

$$A = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\},$$
$$A' = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}.$$

Po eni strani sta množici $A$ in $A'$ ekvipolentni (eksplicitna bijekcija je $f:A\to A'$ s predpisom $f(0)=\frac{1}{2}$ ter $f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n+2}$ za $n\geq 1$), po drugi strani pa je $[0,1]\setminus A = (0,1)\setminus A'$.

Bijekcijo $F : [0,1] \to (0,1)$ bomo konstruirali tako, da bomo točke izven $A$ pustili pri miru, točke v $A$ pa preslikali s funkcijo $f$:

$$F(x) = \begin{cases} x & ; x \notin A, \\ f(x) & ; x \in A. \end{cases}$$

Tako definirana funkcija je bijekcija.

*Opomba:* Na podoben način lahko pokažemo, da so množice $[0,1]$, $(0,1)$, $[0,1)$ in $(0,1]$ vse paroma ekvipolentne. □

(5) Poišči bijekcijo: $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$.

*Rešitev:* Vsako realno število $x \in [0,1)$ lahko enolično zapišemo v obliki

$$0, x_1 x_2 x_3 \ldots,$$

kjer se cifra 9 ne ponavlja od nekod dalje. To pomeni, da npr. število $0,123$ zapišemo v decimalni obliki $0,123000\ldots$ in ne v obliki $0,122999\ldots$. Našo bijekcijo bomo definirali v dveh korakih.

1. korak: bijekcija $[0,1) \times [0,1) \to [0,1)$.

Decimalke števila $a \in [0,1)$ razdelimo v bloke oblike $99\ldots9k$, kjer je $k \neq 9$, ter z $a_i$ označimo $i$-ti blok. Za $a = 0,929941$ je npr. $a_1 = 92$, $a_2 = 994$, $a_3 = 1$ ter $a_i = 0$ za $i \geq 4$. Sedaj definiramo $f : [0,1) \times [0,1) \to [0,1)$ s predpisom

$$f\big(0, a_1 a_2 a_3 \ldots,\ 0, b_1 b_2 b_3 \ldots\big) = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 \ldots.$$

Potem je $f$ bijekcija z inverzom $f^{-1}(0, c_1 c_2 c_3 \ldots) = (0, c_1 c_3 c_5 \ldots, 0, c_2 c_4 c_6 \ldots)$.

2. korak:

Izberimo poljubno bijekcijo $F : [0,1] \to [0,1)$. Potem je

$$F^{-1} \circ f \circ (F \times F) : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$$

iskana bijekcija.

*Opomba 1:* Če bi števila razdelili na bloke velikosti ena in uporabili isto preslikavo, bi dobili injekcijo, ne pa surjekcije, saj npr. število $0,292929292929\ldots$ ne bi ležalo v sliki. Bi pa od tod lahko s pomočjo Cantor-Bernstein-Schroederjevega izreka sklepali, da sta $[0,1]$ in $[0,1] \times [0,1]$ ekvipolentni, ne da bi konstruirali bijekcijo.

*Opomba 2:* Intuitivno si množico $[0,1]$ predstavljamo kot 'enodimenzionalen prostor', množico $[0,1] \times [0,1]$ pa kot 'dvodimenzionalen prostor'. Iz te naloge torej sledi, da se naše pojmovanje 'dimenzije' ne ujema povsem z rezultati iz teorije množic. Če hočemo dimenzijo množice definirati na način, ki je bliže našim pričakovanjem, se moramo omejiti na zvezne preslikave. Izkaže se, da ne obstaja zvezna bijekcija $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$. □

(6) Dokaži ekvipolentnost: $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$.

*Rešitev:* Pri tej nalogi bomo uporabili naslednji dve lastnosti ekvipolence množic:

· Če je $A \sim B$ in $B \sim C$, je $A \sim C$.

· Če je $A \sim A'$ in $B \sim B'$, je $A \times A' \sim B \times B'$.

Nalogo bomo sedaj dokazali z indukcijo na $n$. Za $n = 1$ ni kaj dokazovati.

Privzemimo sedaj, da velja $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$. Potem je

$$\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \overset{\text{I.P.}}{\sim} \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Iz prejšnjih nalog pa sledi, da je

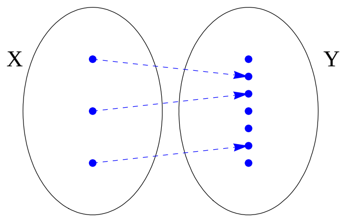
$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim (0,1) \times (0,1) \sim [0,1] \times [0,1] \sim [0,1] \sim \mathbb{R},$$

kar smo želeli dokazati.

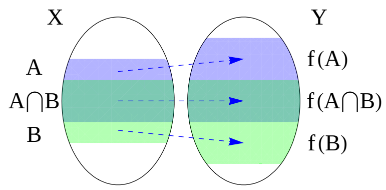
*Opomba:* V okviru teorije množic torej ne moremo ločiti med sabo mnozic $\mathbb{R}^n$ pri različnih $n$-jih. Razlog tiči v tem, da smo preprosto spregledali del strukture teh množic. Če si elemente $\mathbb{R}^n$ (recimo za $n = 1, 2, 3$) predstavljamo kot točke v prostoru, lahko smiselno definiramo pojem razdalje med dvema elementoma. Tako postane $\mathbb{R}^n$ topološki prostor. V okviru teorije topoloških prostorov so vsi prostori $\mathbb{R}^n$ med sabo paroma različni. Korektno lahko tudi definiramo pojem dimenzije topološkega prostora, tako da je npr. dimenzija $\mathbb{R}^n$ enaka $n$. $\square$

(7) Naj bo $f : X \to Y$. Dokaži, da je $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ za vsaki $A, B \subset X$ natanko tedaj, ko je funkcija $f$ injektivna.

*Rešitev:* Najprej se spomnimo, da je funkcija $f : X \to Y$ injektivna, če poljubna različna elementa množice $X$ preslika v različna elementa množice $Y$.




Pri tej nalogi bomo pokazali, da lahko injektivnost definiramo še malo splošneje. Če sta $A, B \subset X$ poljubni podmnožici, potem injektivna preslikava $f$ preslika $A$ bijektivno na $f(A)$, $B$ pa bijektivno na $f(B)$. Pokazali bomo, da $f$ potem preslika množico $A \cap B$ bijektivno na $f(A) \cap f(B)$.




Ekvivalenco dveh izjav dokažemo tako, da dokažemo obe implikaciji.

($\Longrightarrow$) Denimo, da je $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ za vsaki $A, B \subset X$. Želimo pokazati, da je potem $f$ injektivna preslikava.

Izberimo različna $x, y \in X$ in definirajmo množici $A = \{x\}$ in $B = \{y\}$. Potem je $A \cap B = \emptyset$ in zato $\emptyset = f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Od tod sledi $f(x) \neq f(y)$, kar pa pomeni, da je $f$ injektivna.

($\Longleftarrow$) Denimo sedaj, da je $f$ injektivna preslikava in naj bosta $A, B \subset X$ poljubni. Enakost $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ dokažemo tako, da pokažemo, da velja $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ in $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

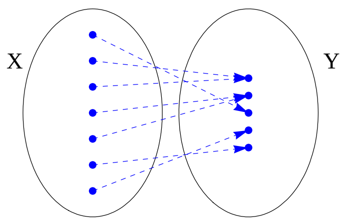
$\underline{f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)}$: Izberimo $y \in f(A \cap B)$. Potem je $y = f(x)$ za nek $x \in A \cap B$, od koder sledi, da je $y \in f(A)$ in $y \in f(B)$.

*Opomba:* Zgornja inkluzija velja za poljubno funkcijo.

$\underline{f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)}$: Naj bo $y \in f(A) \cap f(B)$. Potem lahko najdemo $a \in A$ in $b \in B$, da velja $y = f(a) = f(b)$. Ker pa je $f$ injektivna, od tod sledi $a = b = x \in A \cap B$. Torej je $y \in f(A \cap B)$. $\square$

(8) Naj bo $f : X \to Y$. Dokaži, da je $f(f^{-1}(B)) = B$ za vsak $B \subset Y$ natanko tedaj, ko je funkcija $f$ surjektivna.

*Rešitev:* Funkcija $f : X \to Y$ je surjektivna, če je vsak element množice $Y$ slika vsaj enega elementa množice $X$.




Praslika množice $B \subset Y$ glede na funkcijo $f$ je množica

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Pri tej nalogi bomo pokazali, da je za surjektivno funkcijo $f$ vsaka podmnožica $B \subset Y$ slika svoje praslike $f^{-1}(B)$. Praslika $f^{-1}(B)$ je hkrati tudi največja podmnožica množice $X$, ki se preslika v $B$.

($\Longrightarrow$) Denimo, da je $f(f^{-1}(B)) = B$ za vsak $B \subset Y$. Izberimo $B = Y$. Potem je $f(f^{-1}(Y)) = Y$, od koder sledi, da je $f$ surjektivna.

($\Longleftarrow$) Denimo sedaj, da je $f$ surjektivna funkcija.

$\underline{f(f^{-1}(B)) \subset B}$: Če je $x \in f^{-1}(B)$, je po definiciji $f(x) \in B$.

*Opomba:* Zgornja inkluzija velja za poljubno funkcijo.

$\underline{B \subset f(f^{-1}(B))}$: Naj bo $y \in B$. Ker je $f$ surjektivna, obstaja $x \in X$, da je $y = f(x)$. Ker je $f(x) = y \in B$, je $x \in f^{-1}(B)$, od koder sledi $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. $\square$

(9) Naj bo $f : X \to Y$, $A, B \subset Y$. Dokaži enakosti množic:

(a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,

(b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

*Rešitev:* (a) Poglejmo si ekvivalence:

$$x \in f^{-1}(A \cup B) \iff f(x) \in A \cup B \iff x \in f^{-1}(A) \text{ ali } x \in f^{-1}(B) \iff x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

(b) Sledi iz ekvivalenc:

$$x \in f^{-1}(A \cap B) \iff f(x) \in A \cap B \iff x \in f^{-1}(A) \text{ in } x \in f^{-1}(B) \iff x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

$\square$

(10) Naj bo $f : X \to Y$ in $g : Y \to Z$. Dokaži:

(a) Če sta $f$ in $g$ injektivni, je $g \circ f$ injektivna.

(b) Če sta $f$ in $g$ surjektivni, je $g \circ f$ surjektivna.

(c) Če je $g \circ f$ injektivna, je $f$ injektivna.

(d) Če je $g \circ f$ surjektivna, je $g$ surjektivna.

*Rešitev:* (a) Vzemimo $x, y \in X$, $x \neq y$. Potem je $f(x) \neq f(y)$ (ker je $f$ injektivna), od koder sledi $g(f(x)) \neq g(f(y))$ (ker je $g$ injektivna).

(b) Vzemimo poljuben $z \in Z$. Ker je $g$ surjektivna, obstaja $y \in Y$, da je $g(y) = z$. Ker pa je $f$ surjektivna, obstaja tudi $x \in X$, da je $f(x) = y$. Sledi $z = g(f(x))$.

(c) Vzemimo $x, y \in X$, $x \neq y$. Ker je $g \circ f$ injektivna, je $g(f(x)) \neq g(f(y))$. Sledi $f(x) \neq f(y)$.

(d) Vzemimo poljuben $z \in Z$. Ker je $g \circ f$ surjektivna, je $z = g(f(x))$ za nek $x \in X$. Sedaj velja $z = g(y)$, kjer je $y = f(x) \in Y$. $\square$