Matematika 1
Rešitve 9. sklopa nalog

Nedoločeni integral

(4) Izračunaj integrale trigonometričnih funkcij:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{5+4\cos x}\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$.

Rešitev: Pri integralih tipa $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$, kjer je R racionalna funkcija, si pomagamo z univerzalno trigonometrično substitucijo

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t.$$

Z uporabo trigonometričnih enakosti lahko izrazimo:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{2\,dt}{1+t^2}, \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2}, \end{aligned}$$

kar nam problem prevede na integriranje racionalnih funkcij.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{5+4\cos x}\,dx$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{5+4\cos x}\,dx &= \int \frac{1}{5+4\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{2\,dt}{5(1+t^2)+4(1-t^2)}, \\ &= \int \frac{2}{t^2+9}\,dt = \underline{\underline{\frac{2}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C}}. \end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x}\,dx$:

Univerzalna trigonometrična substitucija nas sicer vedno pripelje do rezultata, vendar pa v primeru, ko nastopata sin in cos v integrandu v višjih potencah, hitro pridemo do kompliciranih racionalnih funkcij. Zato se nam splača na začetku s pomočjo adicijskih izrekov čimbolj znižati potence v integrandu.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{1+\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{1+\frac{\cos 2x+1}{2}}\, dx = \int \frac{2}{\cos 2x + 3}\, dx.$$

Sedaj uvedimo novo spremenljivko $2x = u$ in nato še $\operatorname{tg} \frac{u}{2} = t$. Sledi

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\, dx = \int \frac{2}{\cos 2x + 3}\, dx = \int \frac{du}{\cos u + 3} = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+3} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} x\right) + C.}}$$

(c) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\, dx$:

Ta integral lahko izračunamo brez uporabe univerzalne trigonometrične substitucije, če poskusimo z novo spremenljivko $t = 2+\sin x$. Potem je $dt = \cos x\, dx$ in

$$\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\, dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \underline{\underline{\ln|2+\sin x| + C}}.$$

$\square$

(5) Izračunaj integrale iracionalnih funkcij:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}\, dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\, dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x}}\, dx$

Rešitev: Integrale tipa $\int \frac{p(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ integriramo na naslednji način:

(1) Če je polinom p konstanten, integral prevedemo na enega izmed integralov:

- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0,$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C, \quad a > 0,$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C, \quad a > 0.$

(2) Če je p poljuben polinom, uporabimo nastavek

$$\int \frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx = \tilde{p}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{C}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx,$$

kjer je C konstanta, polinom $\tilde{p}$ pa ima stopnjo eno manjšo kot p.

(a) $\int \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}\,dx$:

Med računanjem bomo uvedli novo spremenljivko $t = x + \frac{1}{2}$, kar nam da $dx = dt$ in

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}\right| + C,$$
$$= \underline{\underline{\ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x+x^2}\right| + C}}.$$

(b) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$:

Pri tem primeru bomo uvedli novo spremenljivko $t = x - 1$, kar nam spet da $dx = dt$. Sledi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x-1)^2+1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \underline{\underline{\arcsin(x-1) + C}}.$$

(c) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx$:

V tem primeru bomo uporabili nastavek

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx = A\sqrt{x^2+4x} + \int \frac{B}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx.$$

Z odvajanjem te enakosti dobimo

$$\frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x}} = \frac{A(x+2)}{\sqrt{x^2+4x}} + \frac{B}{\sqrt{x^2+4x}} = \frac{A(x+2)+B}{\sqrt{x^2+4x}}.$$

S primerjavo koeficientov polinomov v števcu pridemo do sistema dveh enačb za dve neznanki:

$$\begin{aligned} A &= 1, \\ 2A + B &= 3, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = B = 1$. Tako dobimo:

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx = \sqrt{x^2+4x} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}} = \sqrt{x^2+4x} + \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-4}},$$
$$= \underline{\underline{\sqrt{x^2+4x} + \ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2+4x}\right| + C}}.$$

Zadnji integral lahko izračunamo z uvedbo nove spremenljivke $t = x + 2$. □

Določeni integral

(1) Izračunaj določeni integral $\int\limits_0^1 x^2\,dx$ s pomočjo prevedbe na Riemannovo vsoto.

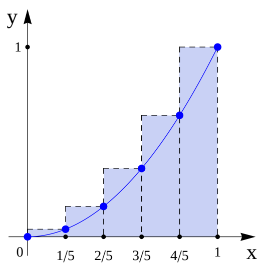
Rešitev: Določeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ zvezne, pozitivne funkcije f na intervalu $[a,b]$ lahko geometrično interpretiramo kot ploščino lika med grafom funkcije in abscisno osjo.

S pomočjo Riemannovih vsot lahko določeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ izračunamo takole:

- Najprej razdelimo $[a,b]$ s točkami $x_i = a + i \cdot \dfrac{b-a}{n}$ za $0 \le i \le n$ na n enakih delov.
- $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ldots$ približna vrednost.
- $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ldots$ točna vrednost.

Lik aproksimiramo z unijami pravokotnikov, nato pa pogledamo limito aproksimacij, pri katerih so širine pravokotnikov čedalje manjše.

Sedaj bomo izračunali ploščino lika pod kvadratno parabolo na intervalu $[0,1]$.



Izračunajmo najprej približek za ploščino, ki ga dobimo, če interval $[0,1]$ razdelimo na n enakih delov. Ker je funkcija $f(x) = x^2$ na tem intervalu naraščajoča, bo ta približek večji od dejanske ploščine.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Pri izračunu smo uporabili formulo za vsoto kvadratov prvih n naravnih števil

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

ki jo lahko dokažemo z indukcijo. Natančna vrednost ploščine lika pa je enaka

$$\int\limits_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}.$$

□

(2) Izračunaj določena integrala s pomočjo Newton-Leibnizeve formule:

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx$,

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\, dx$.

Rešitev: Določeni integral je s pomočjo Riemannovih vsot praviloma zelo težko izračunati, zato ga običajno računamo s pomočjo Leibnizove formule. Naj bosta f in F zvezni funkciji na $[a,b]$, za kateri velja $F'(x) = f(x)$ za $x \in (a,b)$. Potem velja

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{\pi}}.$

Opomba: Na ta integral pogosto naletimo, zato se splača zapomniti naslednjo lastnost. Velja

$$\int_a^b \sin^2 kx\, dx = \int_a^b \cos^2 kx\, dx = \frac{b-a}{2},$$

če je dolžina intervala $[a,b]$ večkratnik periode funkcij $\sin kx$ oziroma $\cos kx$. To pomeni, da je $b - a = n \cdot \frac{2\pi}{k}$ za neko naravno število n.

(b) Za izračun tega integrala najprej opomnimo, da velja

$$\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = \sqrt{\cos^2 x} = \begin{cases} \cos x & ;\ x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ -\cos x & ;\ x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Tako dobimo

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\, dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 - (-1) = \underline{\underline{2}}.$$

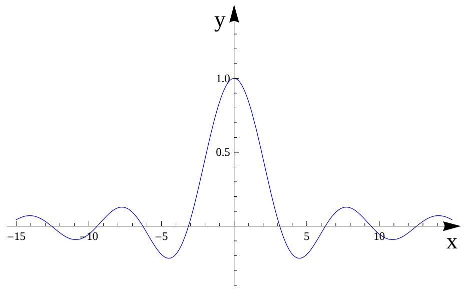
□

(3) S trapezno metodo za $n = 4$ in Simpsonovo metodo za $n = 2$ približno izračunaj integral

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Rešitev: Pri tej nalogi bomo spoznali dve numerični metodi za približni izračun določenega integrala, ne da bi dejansko poznali nedoločeni integral. To je še posebej uporabno, ko imamo opravka s funkcijami, katerih nedoločeni integrali niso elementarne funkcije.

Kot primer si bomo pogledali funkcijo $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Rečemo ji tudi sinc funkcija, uporablja pa se pri filtriranju signalov.



Pri trapezni metodi lik, ki ga določa funkcija f na $[a,b]$, aproksimiramo z unijo trapezov. Pri tem uporabljamo naslednji algoritem:

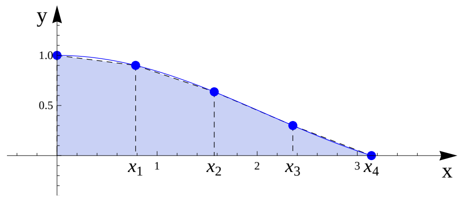
· Razdeli $[a,b]$ s točkami $x_i = a + i \cdot \dfrac{(b-a)}{n}$, za $0 \le i \le n$, na n delov in piši $y_i = f(x_i)$.

· $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\,(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) + R_n.$

Izraz R_n je napaka aproksimacije, ki jo lahko ocenimo navzgor s formulo

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Vsak izmed dobljenih n trapezov ima višino enako $\frac{b-a}{n}$, izraz v oklepaju pa predstavlja dvakratnik vsote njihovih srednjic. V našem primeru bomo lik, ki je pod grafom funkcije $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ na intervalu $[0,\pi]$, aproksimirali s štirimi trapezi.



Vidimo, da se naš približek le malo razlikuje od dejanskega lika.

Najprej napišimo tabelo vrednosti:

x_i	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y_i	1.000	0.900	0.636	0.300	0.000

Od tod dobimo aproksimacijo

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \frac{\pi}{8}\,(1 + 2(0.900 + 0.636 + 0.300) + 0) = \underline{\underline{1.835}}.$$

Pri Simpsonovi metodi lik, ki ga določa funkcija f na $[a,b]$, aproksimiramo z unijo n likov, ki so od zgoraj omejeni s kvadratno parabolo, ki interpolira po tri zaporedne točke. V tem primeru vzamemo $2n$ delilnih točk. Določeni integral je potem enak

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}\,(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 4y_{2n-1} + y_{2n}) + R_n,$$

kjer lahko napako aproksimacije ocenimo s formulo

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

V tem primeru bomo lik, ki je pod grafom funkcije $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ na intervalu $[0, \pi]$, aproksimirali z dvema likoma, ki sta omejena z grafoma parabol, ki interpolirata točke $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))\}$ oziroma $\{(x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3)), (x_4, f(x_4))\}$. Sledi

$$\int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx \approx \frac{\pi}{12}\left(1 + 4(0.900 + 0.300) + 2 \cdot 0.636 + 0\right) = \underline{\underline{1.851}}.$$

Natančna vrednost tega integrala, zaokroženega na tri decimalke, je enaka

$$\int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx = \underline{\underline{1.852}}.$$

Vidimo, da je aproksimacija s Simpsonovo metodo precej dobra.

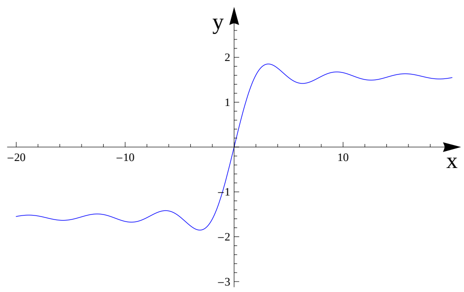
Opomba: Funkcija

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

je nedoločen integral funkcije $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Imenujemo jo integralski sinus. Je omejena, s pomočjo metod kompleksne integracije pa lahko pokažemo, da velja

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{Si}(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Poglejmo še njen graf.



□

(4) Izračunaj izlimitirana integrala:

(a) $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx, \quad a > 0,$

(b) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x \ln x}.$

Rešitev: Določeni integral je v osnovni verziji definiran za zvezne funkcije na končnem zaprtem intervalu. Njegovim posplošitvam na funkcije, ki imajo pole, ali pa na neomejena območja rečemo izlimitirani integrali.

Če želimo izračunati takšen integral, integracijsko območje najprej razkosamo na intervale, tako da bomo na vsakem intervalu imeli singularnost v največ enem krajišču ali pa da bo interval neomejen le v eno smer.

Naj bo f zvezna funkcija na intervalu $[a, b)$, ki je neomejena v okolici točke b. V takšnih primerih lahko definiramo izlimitirani integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx,$$

če limita na desni obstaja. Geometrično to pomeni, da lahko ploščino lika, ki je sicer neomejen, poljubno dobro aproksimiramo s ploščinami omejenih likov.

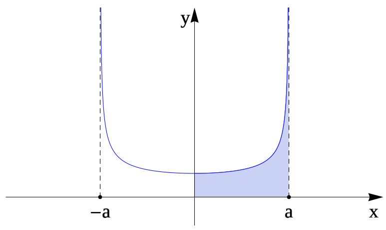
Če je f zvezna funkcija na intervalu $[a, \infty)$, definiramo izlimitirani integral s predpisom

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\,dx,$$

če limita na desni obstaja. Analogno definiramo tudi izlimitirane integrale v primeru, ko je integracijski interval odprt na levi strani.

(a) $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$:

Funkcija, ki jo integriramo, je neomejena v okolici desnega krajišča.



Najprej se spomnimo, da velja

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Od tod dobimo:

$$\begin{aligned}
\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx &= \lim_{\epsilon \to 0+} \int_0^{a-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_0^{a-\epsilon}, \\
&= \lim_{\epsilon \to 0+} \left(\arcsin(1 - \tfrac{\epsilon}{a}) - \arcsin 0\right), \\
&= \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}.
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$:

V tem primeru integriramo zvezno funkcijo po intervalu, ki je neomejen. Pri računanju bomo uvedli novo spremenljivko $t = \ln x$.

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{c \to \infty} \int_e^{c} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{c \to \infty} \int_1^{\ln c} \frac{dt}{t} = \lim_{c \to \infty} \ln |t| \Big|_1^{\ln c} = \lim_{c \to \infty} \ln(\ln c) = \infty.$$

Vidimo, da ta integral ne konvergira. □

(5) Povprečna hitrost molekul kisika pri temperaturi T je enaka

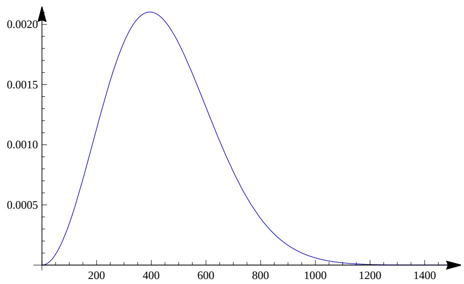
$$\overline{v} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{m}{2kT}v^2}\, dv,$$

kjer je $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$ in $m = 5.31 \cdot 10^{-26}\, kg$. Izračunaj povprečno hitrost molekul kisika pri temperaturi $T = 300K$.

Rešitev: Maxwell-Boltzmannova porazdelitev hitrosti molekul kisika je podana z gostoto

$$p(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 e^{-\frac{m}{2kT}v^2}$$

za $v > 0$. S k označimo Boltzmannovo konstanto, z m maso molekule kisika, s T pa temperaturo kisika. Pri tej nalogi si bomo pogledali, kako se izračuna povprečna hitrost molekul plina z uporabo izlimitiranega integrala.



Z grafa gostote lahko preberemo, da ima večina molekul kisika hitrost nekje med 100 in 1000 metri na sekundo. Nekatere molekule imajo tudi višjo hitrost, a jih je relativno malo.

Hitrost molekul lahko zavzame le nenegativne vrednosti, zato bomo integrirali po intervalu $[0, \infty)$, povprečno hitrost pa bomo označili z $\overline{v}$. Le ta je enaka

$$\overline{v} = \int_0^{\infty} v p(v)\, dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{m}{2kT}v^2}\, dv.$$

Pišimo $a = \frac{m}{2kT}$. Potem v bistvu računamo nedoločeni integral $\int v^3 e^{-av^2}\, dv$. Če uvedemo novo spremenljivko $t = -av^2$, je $dt = -2av\, dv$ in

$$\int v^3 e^{-av^2}\, dv = \frac{1}{2a^2} \int t e^t\, dt = \frac{1}{2a^2} \left(t e^t - \int e^t\, dt\right) = \frac{1}{2a^2} \left(t e^t - e^t\right) + C.$$

Zadnji integral smo izračunali z integracijo po delih z izbiro $u = t$ in $e^t\,dt = dv$. Če upoštevamo zvezo med v in t, od tod dobimo

$$\int v^3 e^{-av^2}\,dv = \frac{1}{2a^2}\left(-av^2e^{-av^2} - e^{-av^2}\right) + C = -\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{av^2+1}{e^{av^2}} + C.$$

Sedaj dobimo

$$\int_0^\infty v^3 e^{-\frac{m}{2kT}v^2}\,dv = -\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{av^2+1}{e^{av^2}}\Bigg|_0^\infty = -\frac{1}{2a^2}(0-1) = \frac{1}{2a^2}.$$

Pri $x\to\infty$ smo upoštevali dejstvo, da je $\lim\limits_{v\to\infty}\frac{av^2+1}{e^{av^2}} = 0$, ki sledi z uporabo L'Hospitalovega pravila. Povprečna hitrost molekul kisika je tako enaka

$$\overline{v} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi\cdot\frac{1}{2a^2} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 2\pi\cdot\left(\frac{2kT}{m}\right)^2 = \sqrt{\frac{8kT}{m\pi}}.$$

Če upoštevamo podatke $k = 1.38\cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K}$, $m = 5.31\cdot 10^{-26}\,kg$ in $T = 300K$, dobimo povprečno hitrost

$$\overline{v} = 445\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

□

(6) Ugotovi, ali izlimitirana integrala konvergirata ali divergirata:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3+1}\,dx$,

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$.

Rešitev: Izlimitiranih integralov praviloma ne znamo vedno izračunati. Včasih pa je koristna že zgolj informacija, ali dani integral sploh konvergira. Le-to lahko dobimo s pomočjo naslednjih kriterijev:

(a) Naj bo g zvezna funkcija na $[a, b]$.

- $\displaystyle\int_a^b \frac{g(x)}{(x-a)^s}\,dx$ konvergira, če je $s < 1$.
- $\displaystyle\int_a^b \frac{g(x)}{(x-a)^s}\,dx$ divergira, če je $s \geq 1$ in $g(a) \neq 0$.

(b) Naj bo g zvezna in omejena funkcija na $[b, \infty)$.

- $\displaystyle\int_b^\infty \frac{g(x)}{x^s}\,dx$ konvergira, če je $s > 1$.
- $\displaystyle\int_b^\infty \frac{g(x)}{x^s}\,dx$ divergira, če je $s \leq 1$ in $|g(x)| > m > 0$ za vse x od nekje dalje.

Pri določanju konvergence izlimitiranih integralov tako ponavadi najprej uganemo, katera izmed zgornjih možnosti nastopi, nato pa poskušamo integrand zapisati v ustrezni obliki.

(a) $\int_1^\infty \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3+1}\,dx$:

Integrand je zvezna funkcija na neomejenem integracijskem intervalu $[1,\infty)$. Zato moramo ugotoviti ali dani posplošeni integral konvergira v neskončnosti. Zapišimo

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3+1} = \frac{\frac{x^2\sqrt{1+x^2}}{x^3+1}}{x^2}$$

in definirajmo $g(x) = \frac{x^2\sqrt{1+x^2}}{x^3+1}$. Tako definirana funkcija g je zvezna na intervalu $[1,\infty)$, njena limita pri $x\to\infty$ pa je

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\sqrt{1+x^2}}{x^3+1} = 1.$$

Iz obstoja limite v neskončnosti in pa zveznosti sklepamo, da je funkcija g omejena na intervalu $[1,\infty)$. Poleg tega je $s=2$, zato dani posplošeni integral konvergira.

(b) $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$:

Pri tem integralu moramo obravnavati dve limiti. Integrand ima singularnost pri $x=0$, poleg tega pa še integriramo po neskončnem intervalu.

$\underline{x=0}$: Zapišimo

$$\frac{\ln x}{1+x^2} = \frac{\frac{x^{1/2}\ln x}{1+x^2}}{x^{1/2}}.$$

Definirajmo $g(x) = \frac{x^{1/2}\ln x}{1+x^2}$. Potem lahko g zvezno razširimo v $x=0$, če predpišemo $g(0)=0$. Velja še $s=1/2<1$. Torej izlimitirani integral konvergira v okolici $x=0$.

$\underline{x\to\infty}$: Sedaj zapišimo

$$\frac{\ln x}{1+x^2} = \frac{\frac{x^{3/2}\ln x}{1+x^2}}{x^{3/2}}.$$

Če definiramo $g(x) = \frac{x^{3/2}\ln x}{1+x^2}$, bo funkcija g zvezna in omejena na poljubnem intervalu $[b,\infty]$ za $b>0$. Omejenost sledi iz dejstva, da je $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, ki ga lahko preverimo s pomočjo L'Hospitalovega pravila. Ker je $s=3/2>1$, integral konvergira tudi pri $x\to\infty$.

<u>Opomba</u>: Sedaj, ko vemo, da obstajata integrala $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ in $\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$, lahko uporabimo naslednji trik. Vzemimo v drugem integralu novo spremenljivko $\frac{1}{x}=t$. Sledi $dx = -\frac{dt}{t^2}$ in

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = -\int\limits_1^0 \frac{\ln(t^{-1})}{1+t^{-2}}\cdot\frac{dt}{t^2} = -\int\limits_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt.$$

Torej je

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx - \int\limits_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = 0.$$

$\square$