Matematika 1
Rešitve 7. sklopa nalog

Odvod

(1) Izračunaj njihove odvode, nato pa nariši v isti diagram grafe funkcij:

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x, \quad g(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2}, \quad h(x) = -\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{x-1}.$$

Rešitev: Izračunajmo najprej odvode:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$
$$g'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+(\frac{2x}{1-x^2})^2}\cdot\frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2+4x^2} = \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2},$$
$$h'(x) = -\frac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2}\cdot\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2+(x+1)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Vidimo, da imajo vse tri funkcije iste odvode. Od tod lahko sklepamo, da se te tri funkcije na vsakem intervalu, na katerem so vse tri definirane, paroma razlikujejo za konstantne vrednosti. Te konstante so lahko načeloma odvisne od izbire intervala.

Poglejmo si najprej funkciji f in g. Velja $D_f = \mathbb{R}$ in $D_g = (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$. Sklepamo, da se funkciji f in g na vsakemu izmed intervalov $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ in $(1,\infty)$ razlikujeta za konstanto. To konstanto lahko določimo s primerjavo vrednosti v neki konkretni točki, ali pa z izračunom asimptote v neskončnosti, če je le-ta vodoravna.

$$\begin{aligned}
&(-\infty,-1): && \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{in} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0,\\
&(-1,1): && f(0) = 0 \quad \text{in} \quad g(0) = 0,\\
&(1,\infty): && \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{in} \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = 0.
\end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} x + \frac{\pi}{2} & ;\ x < -1,\\ \operatorname{arc\,tg} x & ;\ -1 < x < 1,\\ \operatorname{arc\,tg} x - \frac{\pi}{2} & ;\ x > 1. \end{cases}$$

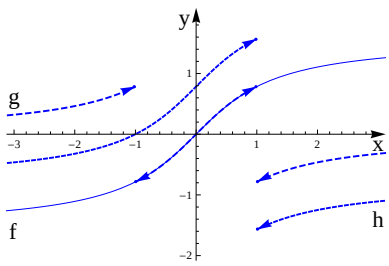
Primerjajmo še funkciji f in h. Velja $D_h = (-\infty,1)\cup(1,\infty)$ in

$$\begin{aligned}
&(-\infty,1): && f(0) = 0 \quad \text{in} \quad h(0) = \frac{\pi}{4},\\
&(1,\infty): && \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{in} \quad \lim_{x\to\infty} h(x) = -\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Sledi

$$h(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} x + \frac{\pi}{4} & ;\ x < 1,\\ \operatorname{arc\,tg} x - \frac{3\pi}{4} & ;\ x > 1. \end{cases}$$

Poglejmo si še grafe vseh treh funkcij:



$\square$

(2) Naj bo $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ za $x \geq -1$ in $x \neq 0$. Razširi f tako, da bo zvezna v točki $x = 0$ in dokaži, da je razširjena funkcija odvedljiva v točki $x = 0$.

Rešitev: Funkcija f je definirana in zvezna na $[-1, \infty) \setminus \{0\}$. Izračunajmo sedaj $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

Če torej definiramo $f(0) = \frac{1}{2}$, bo dobljena funkcija zvezna na $[-1, \infty)$.

Dokažimo sedaj, da je tako definirana funkcija f odvedljiva v točki $x = 0$. Po definiciji je funkcija f odvedljiva v točki x, če obstaja limita

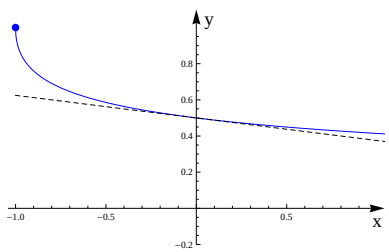
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Računajmo:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sqrt{h+1}-1}{h} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+1} - 1 - \frac{1}{2}h}{h^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{h+1} - 1 - \frac{1}{2}h)(\sqrt{h+1} + 1 + \frac{1}{2}h)}{h^2(\sqrt{h+1} + 1 + \frac{1}{2}h)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{1}{4}h^2}{h^2(\sqrt{h+1} + 1 + \frac{1}{2}h)} = -\frac{1}{4} \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h+1} + 1 + \frac{1}{2}h} \\ &= -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Ker ta limita obstaja, je razširjena funkcija f odvedljiva v točki $x = 0$.

Opomba: Zveznost v točki $x = 0$ pomeni, da je graf funkcije f v točki $x = 0$ nepretrgan, odvedljivost v $x = 0$ pa pomeni, da obstaja tangenta na graf funkcije f v točki $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.



$\square$

(3) Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0, \\ 0 & ; x = 0. \end{cases}$$

Dokaži, da je funkcija f zvezna, povsod odvedljiva in ni zvezno odvedljiva v točki $x = 0$.

Rešitev: Iz definicije sledi, da je funkcija f zvezna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Posebej moramo preveriti še, da velja

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

V okolici točke $x = 0$ lahko zapišemo $f(x) = g(x)h(x)$, kjer je $g(x) = x^2$ in $h(x) = \sin \frac{1}{x}$. Funkcija g ima v točki $x = 0$ ničlo, medtem ko je funkcija h omejena z 1 v okolici točke $x = 0$. Od tod sledi $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, kar pomeni, da je funkcija f zvezna tudi v točki $x = 0$.

Izračunajmo sedaj odvod funkcije f v točki $x = 0$ po definiciji

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

Pri zadnjem enačaju lahko uporabimo isti postopek kot pri dokazu zveznosti funkcije f.

Za točke $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pa lahko odvod izračunamo kar s pomočjo pravil za odvajanje.

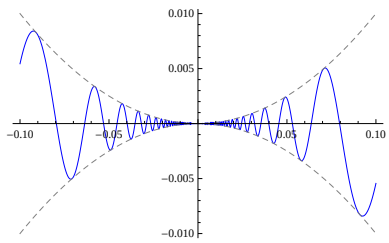
$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{-1}{x^2} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Torej je funkcija f odvedljiva povsod in velja

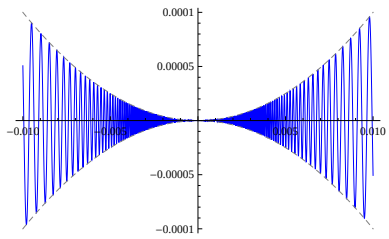
$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & ; x \neq 0, \\ 0 & ; x = 0. \end{cases}$$

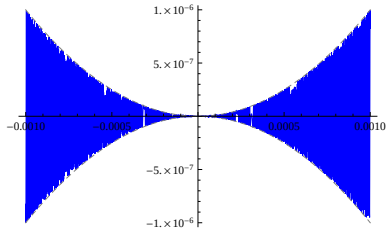
Funkcija f pa NI zvezno odvedljiva v točki $x = 0$, saj ne obstaja limita $\lim_{x \to 0} f'(x)$. Izraz $2x \sin \frac{1}{x}$ gre sicer proti 0 pri $x \to 0$, vendar pa izraz $\cos \frac{1}{x}$ zavzame vse vrednosti med -1 in 1 poljubno blizu točke $x = 0$.

Poglejmo si sedaj graf funkcije f:



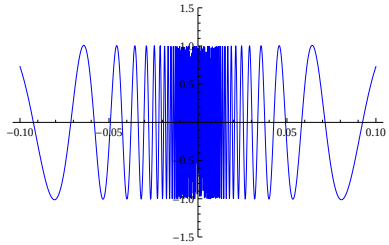
Graf funkcije f si lahko predstavljamo kot sinusoido, katere amplituda se približuje 0, ko gre $x \to 0$, perioda pa prav tako postaja poljubno majhna. Če pogledamo graf v zelo majhnih okolicah točke 0, je v principu graf funkcije še vedno krivulja, ki pa je s pisalom fiksne širine ne moremo narisati, ker so periode 'valov' premajhne. Zato bi graf, če bi ga poskušali narisati, v okolice točke $x = 0$ izgledal kot na spodnji sliki.





Na grafu lahko opazimo, da ima funkcija vodoravno tangento v točki $x = 0$. Dejstvo, da funkcija f ni zvezno odvedljiva, pa sledi iz opazke, da imajo tangente na graf funkcije f poljubno blizu točke 0 naklone med -1 in 1.

Poglejmo še graf funkcije f':



Vidimo, da limita $\lim_{x\to 0} f'(x)$ ni enaka vrednosti 0, ampak je v nekem smislu ta limita kar cel interval $[-1, 1]$. $\square$

(4) S pomočjo Lagrangeevega izreka dokaži, da za $0 \leq a < b < \frac{\pi}{2}$ velja

$$\frac{1}{\cos^2 a} < \frac{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a}{b - a} < \frac{1}{\cos^2 b}.$$

Rešitev: Spomnimo se najprej:

<u>Lagrangeev izrek:</u> Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki je na intervalu (a, b) odvedljiva. Potem obstaja $c \in (a, b)$, za katerega velja

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Definirajmo sedaj $f(x) = \operatorname{tg} x$. Sledi $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, zato lahko z uporabo Lagrangeevega izreka najdemo $c \in (a, b)$, za katerega velja

$$\frac{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a}{b - a} = \frac{1}{\cos^2 c}$$

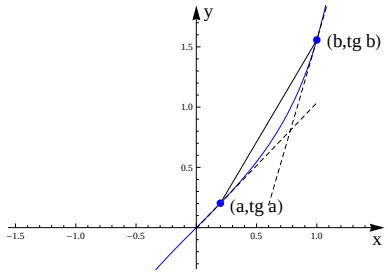
Funkcija $g(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ je na intervalu (a, b) naraščajoča, zato je

$$\frac{1}{\cos^2 a} < \frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 b},$$

oziroma

$$\frac{1}{\cos^2 a} < \frac{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a}{b-a} < \frac{1}{\cos^2 b}.$$

Opomba: Zgornjo neenakost lahko geometrično interpretiramo na naslednji način: Naklon sekante grafa funkcije tg med točkama $(a, \operatorname{tg} a)$ in $(b, \operatorname{tg} b)$ je večji od naklona tangente v točki a in manjši od naklona tangente v točki b.



□

(5) S pomočjo L'Hospitalovega pravila izračunaj limite funkcij:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln(x+1)}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0+} x^n \ln x$, $n \in \mathbb{N}$,

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x}$, $n \in \mathbb{N}$,

(d) $\lim\limits_{x\to\pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$,

(f) $\lim\limits_{x\to 0} (e^{2x} + x)^{1/x}$.

Rešitev: S pomočjo odvoda lahko na preprost način izračunamo kakšne limite, ki se sicer izkažejo za trd oreh. To nam pride prav pri študiju asimptotskega obnašanja funkcij.

L'Hospitalovo pravilo: Naj bosta funkciji f in g odvedljivi na neki okolici točke x_0 (razen morda v x_0) in naj gresta obe hkrati proti 0 ali pa obe hkrati proti $\pm\infty$ pri $x \to x_0$. Če obstaja limita $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, obstaja tudi limita $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ in obe limiti sta enaki.

Pravilo velja tudi za enostranske limite in limite v neskončnosti.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{\frac{1}{x+1}} = 1.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0+} x^n \ln x = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{x^{-n}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} = -\dfrac{1}{n} \lim\limits_{x\to 0+} x^n = 0.$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \cdots = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n!}{e^x} = 0.$

(d) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi - x)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\pi - x}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{-1}{\frac{-1}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}} = 2\lim\limits_{x\to\pi}\sin^2\dfrac{x}{2} = 2.$

(e) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = \lim\limits_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x} = 1$ (Zadnja enakost sledi iz limite (b)).

(f) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}+x)^{1/x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(e^{2x}+x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(e^{2x}+x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2e^{2x}+1}{e^{2x}+x}}{1}} = e^3.$

□

(6) Izračunaj polinomske asimptote danih funkcij:

(a) $f(x) = \sqrt{x^2+x}$,

(b) $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Rešitev: Polinom p je polinomska asimptota funkcije f pri $x \to \infty$, če je

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - p(x)) = 0.$$

Analogno definiramo tudi polinomske asimptote pri $x \to -\infty$.

Tipični primeri funkcij s polinomskimi asimptotami so racionalne funkcije, primera funkcij, ki nimata polinomskih asimptot, pa sta logaritemska in eksponentna funkcija.

Če je polinom $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ polinomska asimptota funkcije f, lahko njegove koeficiente izračunamo v naslednjem zaporedju:

$$\begin{aligned} a_n &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^n}, \\ a_{n-1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x) - a_n x^n}{x^{n-1}}, \\ &\vdots \\ a_0 &= \lim_{x\to\infty}(f(x) - (a_n x^n + \cdots + a_1 x)). \end{aligned}$$

Število n poskušamo uganiti. Če izberemo prevelik n, dobimo prvo limito enako nič, v primeru premajhnega n pa je ta limita neskončna.

(a) $\underline{f(x) = \sqrt{x^2+x}}$:

Po občutku sklepamo, da ima funkcija f linearno asimptoto. Poskusimo najprej izračunati asimptoto, ko gre $x \to \infty$:

$$\begin{aligned} k_+ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1, \\ n_+ &= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x} - x) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Od tod sledi, da ima funkcija f linearno asimptoto

$$y_+(x) = x + \frac{1}{2}.$$

Ko gre $x \to -\infty$, pa dobimo:

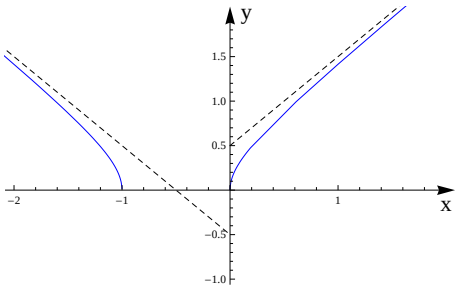
$$k_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x}} = -1,$$

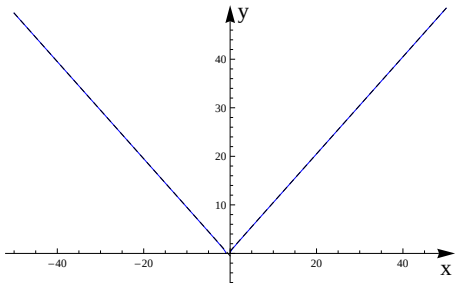
$$n_- = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x}+x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+x}-x)}{(\sqrt{x^2+x}-x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x} = -\frac{1}{2},$$

kar pomeni, da je asimptota pri $x \to -\infty$ premica

$$y_-(x) = -x - \frac{1}{2}.$$

Vidimo, da ima funkcija f dve različni linearni asimptoti.





b) $\underline{f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}}$:

V tem primeru bo imela funkcija f kvadratno asimptoto. Računajmo:

$$a_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

$$a_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

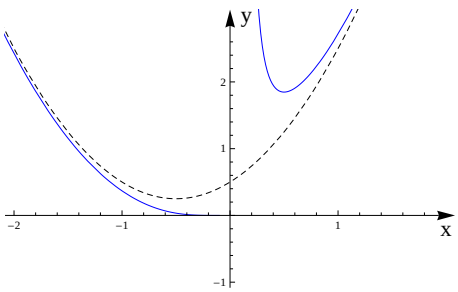
$$a_0 = \lim_{x\to\infty} (x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2 - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{\frac{1}{x}} + 1}{-\frac{2}{x}},$$

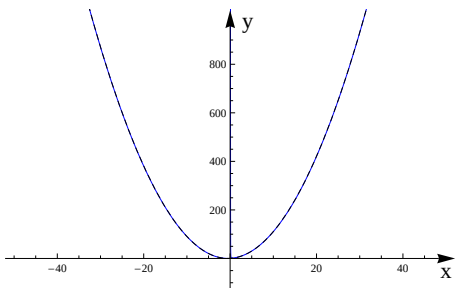
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{\frac{2}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Isti račun pokaže, da je kvadratna funkcija

$$p(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$$

asimptota funkcije f tudi, ko gre $x \to -\infty$.





$\square$

(7) Skiciraj grafe funkcij:

(a) $f(x) = x \ln^2 x$,

(b) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$,

(c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$.

Rešitev: Pri skiciranju grafov funkcij so nam v pomoč naslednji podatki, ki jih lahko predhodno izračunamo:

· definicijsko območje, ničle, poli, limite na robu definicijskega območja, asimptote,

· stacionarne točke, intervali naraščanja in padanja, tangente na robu definicijskega območja,

· prevoji, intervali konveksnosti in konkavnosti.

(a) $\underline{f(x) = x \ln^2 x}$.

- Funkcija f je definirana na $D_f = (0, \infty)$ in ima ničlo v točki $x = 1$. Limiti na robovih definicijskega območja pa sta:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} 2x = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x \ln^2 x = \infty.$$

  Funkcija f pri $x \to \infty$ nima polinomske asimptote.

- Odvod funkcije f je enak

$$f'(x) = \ln^2 x + x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \ln x(\ln x + 2).$$

  Torej je funkcija f naraščajoča na $(0, e^{-2}) \cup (1, \infty)$ in padajoča na $(e^{-2}, 1)$. V točki $x = e^{-2}$ ima funkcija f lokalni maksimum, v točki $x = 1$ pa lokalni minimum. Velja

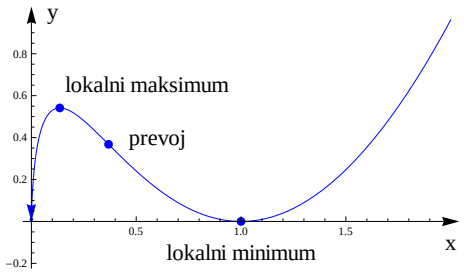
$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \ln x(\ln x + 2) = \infty,$$

  od koder sklepamo, da ima graf funkcije f v točki $x = 0$ navpično tangento.

- Drugi odvod funkcije f je enak

$$f''(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(\ln x + 1).$$

  Od tod sledi, da je funkcija f konveksna na (e^{-1}, ∞) in konkavna na $(0, e^{-1})$, v točki $x = e^{-1}$ pa ima prevoj.



(b) $\underline{f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$.

- Funkcija f je definirana na $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. V točki $x = -1$ ima ničlo, premica $y = \frac{\pi}{4}$ pa je njena vodoravna asimptota. Leva in desna limita funkcije f v točki $x = 0$ sta:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

  Graf funkcije f se v okolici $x =$ z desne približuje točki $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, z leve pa $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$.

- Odvod funkcije f je enak

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (1 + \frac{1}{x})^2} \cdot \frac{(-1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2 + (x+1)^2} = -\frac{1}{2x^2 + 2x + 1}.$$

  Za vsak $x \in D_f$ velja $f'(x) < 0$, torej je funkcija f padajoča na vsakem izmed intervalov $(-\infty, 0)$ in $(0, \infty)$. Stacionarnih točk nima. V točki $x = 0$ ima odvod limito

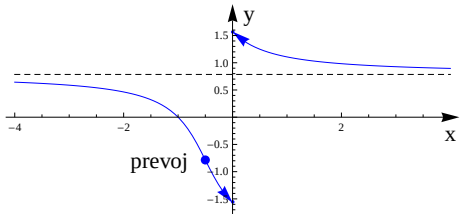
$$\lim_{x\to 0} f'(x) = -1,$$

  kar pomeni, da se graf funkcije f približuje točkama $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ in $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ pod kotom $\phi = -45°$.

- Drugi odvod funkcije f je enak

$$f''(x) = \frac{2(2x+1)}{(2x^2 + 2x + 1)^2}.$$

  Od tod sledi, da je funkcija f konveksna na $(-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \infty)$ in konkavna na $(-\infty, -\frac{1}{2})$, v točki $x = -\frac{1}{2}$ pa ima prevoj.



(c) $\underline{f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}$.

- Funkcija f je definirana na $D_f = (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$. Ničlo ima v točki $x = 0$, pol pa v točki $x = 2$. Funkcija f sicer ni racionalna funkcija, vseeno pa ima dve različni linearni asimptoti. Računajmo:

$$k_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = 1.$$

$$n_+ = \lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x\right) = \lim_{x\to\infty} x \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}\right),$$
$$= \lim_{x\to\infty} x \left(\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x - 2 + \sqrt{x^2 - 2x}} = 1.$$

$$k_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x}{x-2}} = -1.$$

$$n_- = \lim_{x\to-\infty} (f(x)+x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{\frac{x}{x-2}} + 1\right),$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{(-\sqrt{\frac{x}{x-2}}+1)(\sqrt{\frac{x}{x-2}}+1)}{\sqrt{\frac{x}{x-2}}+1}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-2x}{x+2}}{\sqrt{\frac{x}{x-2}}+1} = -1.$$

Pri računanju limit smo upoštevali dejstvi, da za pozitivna števila velja $x = \sqrt{x^2}$, za negativna števila pa $x = -\sqrt{x^2}$.
Linearni asimptoti funkcije f sta torej $y_+(x) = x+1$ in $y_-(x) = -x-1$.

- Odvod funkcije f je enak

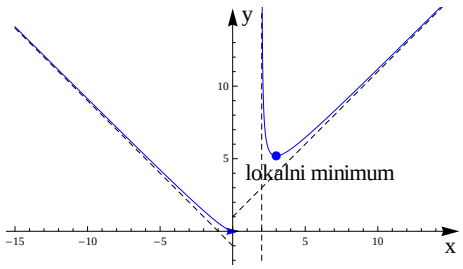
$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x^3}} \cdot \frac{3x^2(x-2)-x^3}{(x-2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x^3}} \cdot \frac{x^2(2x-6)}{(x-2)^2} = (x-3)\sqrt{\frac{x}{(x-2)^3}}.$$

Torej je funkcija f naraščajoča na $(3,\infty)$ in padajoča na $(-\infty,0)\cup(2,3)$. Točki $x_1 = 0$ in $x_2 = 3$ sta stacionarni točki funkcije f, obe sta lokalna minimuma. Točka $x = 0$ je sicer na robu definicijskega območja, ima pa graf funkcije f v tej točki vodoravno levo tangento.

- Drugi odvod funkcije f je enak:

$$f''(x) = \sqrt{\frac{x}{(x-2)^3}} + (x-3)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}} \cdot \frac{(x-2)^3 - 3x(x-2)^2}{(x-2)^6},$$
$$= \sqrt{\frac{x}{(x-2)^3}} + (3-x)\sqrt{\frac{1}{x(x-2)^5}}(x+1),$$
$$= \frac{\sqrt{x^2(x-2)^2} + (3+2x-x^2)}{\sqrt{x(x-2)^5}} = \frac{3}{\sqrt{x(x-2)^5}}.$$

Vidimo, da je funkcija f konveksna povsod, kjer je definirana.



□

(8) Skiciraj graf Gaussove funkcije

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

kjer je $\mu \in \mathbb{R}$ in $\sigma > 0$. Kakšen je pomen parametrov μ in σ?

Rešitev: Gaussova funkcija $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ je definirana na celi realni osi in je povsod pozitivna. Ko gre $x \to \pm\infty$, se graf funkcije f približuje abscisni osi. Njen odvod je

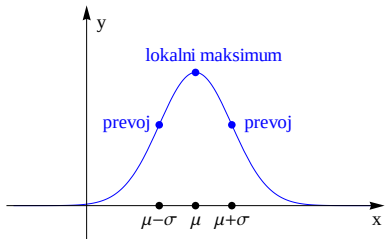
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right).$$

Od tod sklepamo, da funkcija f narašča na intervalu $(-\infty, \mu)$, pada pa na intervalu (μ, ∞). V točki $x = \mu$ ima (globalni) maksimum.

Drugi odvod funkcije f je enak

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2}\right).$$

Funkcija f je konveksna na $(-\infty, \mu - \sigma) \cup (\mu + \sigma, \infty)$, konkavna pa na $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$. V točkah $x = \mu \pm \sigma$ ima prevoja.



Gaussova funkcija opisuje normalno porazdelitev s povprečno vrednostjo μ in s standardnim odklonom σ. Sprememba parametra μ povzroči, da se graf prestavi levo ali desno. Tako dobljen graf je simetričen glede na os $x = \mu$. Parameter σ določa, kako razpršena je normalna porazdelitev. Če σ povečamo, se graf ratzegne, njegov vrh pa se zniža. V kolikor pa σ zmanjšamo, se vrh dvigne, graf pa se zoži. Konstanta $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ je izbrana tako, da je ploščina lika pod krivuljo enaka 1.

Najpogosteje uporabljamo standardno normalno porazdelitev

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

ki ustreza parametroma $\mu = 0$ in $\sigma = 1$. $\square$