Matematika 1
Rešitve 8. sklopa nalog

Odvod

(9) Izračunaj enačbo tangente na krivuljo $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16$ v točki $(2, 2)$.

Rešitev: Včasih imamo zvezo med odvisno in neodvisno spremenljivko podano z implicitno enačbo. Ker je eksplicitno izražavo načeloma težko poiskati, lahko odvod izračunamo posredno z odvajanjem enačbe.

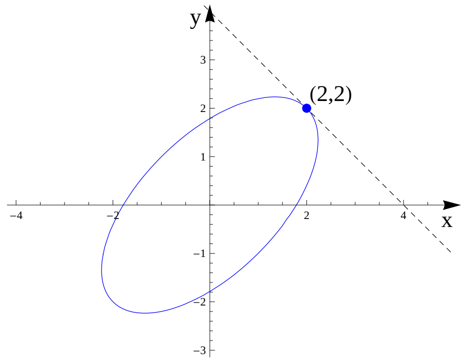
V našem primeru z odvajanjem enačbe $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16$ po x dobimo:

$$\begin{aligned} 10x - 6(y + xy') + 10yy' &= 0, \\ y'(10y - 6x) &= 6y - 10x, \\ y' &= \frac{3y - 5x}{5y - 3x}. \end{aligned}$$

V točki $(2, 2)$ je torej $y' = -1$, enačba tangente pa je

$$y = -x + 4.$$

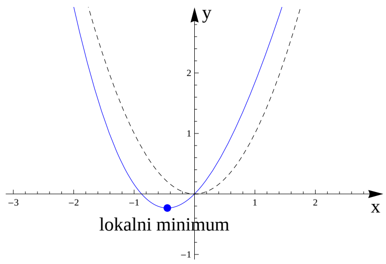
Pri Matematiki 2 bomo spoznali, da enačba $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16$ določa elipso s polosema $\sqrt{2}$ in $2\sqrt{2}$ v smeri simetral kvadrantov. Točka $(2, 2)$ je eno izmed temen elipse.



□

(10) Z uporabo Newtonove metode poišči stacionarno točko funkcije $f(x) = x^2 + \sin x$ na tri decimalke natančno.

Rešitev: Funkcija f je definirana na celi realni osi. Njen graf oscilira okoli grafa kvadratne parabole $y = x^2$.



Lokalni minimum je v točki, ki zadošča enačbi $f'(x) = 2x + \cos x = 0$. Te enačbe ne znamo natančno rešiti, zato bomo približek rešitve poiskali z Newtonovo metodo.

<u>Newtonova metoda:</u>

Če rešujemo enačbo $g(x) = 0$, kjer je g odvedljiva funkcija, lahko približek rešitve poiščemo z naslednjim algoritmom:

· izberemo začetni približek x_0,

· induktivno računamo $x_{n+1} = x_n - \dfrac{g(x_n)}{g'(x_n)}$,

· postopek ponavljamo, dokler ne dosežemo željene natančnosti.

V našem primeru je $g(x) = f'(x) = 2x + \cos x$ in $g'(x) = 2 - \sin x$. Vzemimo začetni približek $x_0 = 0$ in računajmo:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = -0.500, \\ x_2 &= x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} = -0.451, \\ x_3 &= x_2 - \frac{g(x_2)}{g'(x_2)} = -0.450, \\ x_4 &= x_3 - \frac{g(x_3)}{g'(x_3)} = -0.450. \end{aligned}$$

Vidimo, da se začnejo vrednosti ponavljati, zato je $x = -0.450$ približek za stacionarno točko.

<u>Opomba:</u> Newtonova metoda praviloma konvergira hitreje kot bisekcija, a včasih ne deluje. Problem se namreč pojavi, kadar je za neki približek x_k vrednost $f'(x_k)$ blizu 0. V takšnem primeru je naslednji približek x_{k+1} lahko zelo slab.

Če funkcija f ni odvedljiva, ali pa je odvod težko računati, lahko uporabimo sorodno sekantno metodo. Postopek je isti, le da uporabljamo rekurzivni korak

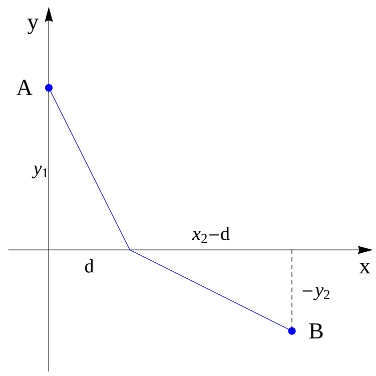
$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})},$$

ki je odvisen od predhodnih dveh členov. $\square$

(11) Točkasto telo se giblje po ravnini z enakomerno hitrostjo v_1, če je v zgornji polravnini, in s hitrostjo v_2, če je v spodnji polravnini. Po kateri poti bo najhitreje prišlo iz točke $A(0, y_1)$ do $B(x_2, y_2)$, če je $y_1, x_2 > 0$ in $y_2 < 0$?

Rešitev: Pri tej nalogi iščemo najhitrejšo pot od točke A do točke B. Vseh možnih poti je neskončno (rabili bi celo neskončno parametrov, da bi jih lahko opisali). Zato bomo najprej zožili nabor morebitnih kandidatov.

Pri iskanju najhitrejše poti se lahko omejimo na poti, ki so sestavljene iz dveh ravnih poti. Takšne poti lahko parametriziramo s parametrom d, ki pove, kje dana pot seka abscisno os.



Čas, ki ga točka potrebuje, da pride po dani poti od A do B je

$$t(d) = \frac{\sqrt{d^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - d)^2 + y_2^2}}{v_2}.$$

Matematična formulacija našega problema je sedaj sledeča: Poišči minimum funkcije

$$t : [0, x_2] \to \mathbb{R}.$$

Poiščimo najprej stacionarne točke.

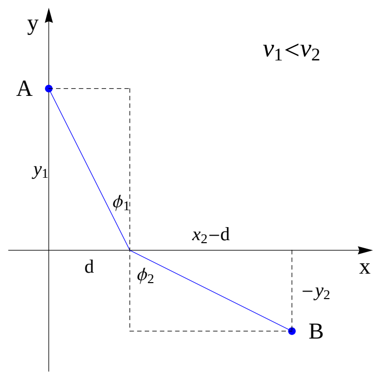
$$t'(d) = \frac{1}{2} \frac{2d}{v_1\sqrt{d^2 + y_1^2}} + \frac{1}{2} \frac{-2(x_2 - d)}{v_2\sqrt{(x_2 - d)^2 + y_2^2}}.$$

Sledi

$$t'(d) = 0 \iff \frac{d}{v_1\sqrt{d^2 + y_1^2}} = \frac{x_2 - d}{v_2\sqrt{(x_2 - d)^2 + y_2^2}}.$$

Če uporabimo oznake s spodnje slike, lahko zapišemo tudi

$$t'(d) = 0 \iff \frac{\sin\phi_1}{v_1} = \frac{\sin\phi_2}{v_2}.$$



Stacionarna točka d_0 je torej implicitno določena s kotoma ϕ_1 in ϕ_2. Z analizo predznaka odvoda vidimo, da funkcija t pada levo od d_0 in narašča desno od d_0. Od tod sledi, da je v d_0 globalni minimum funkcije t.

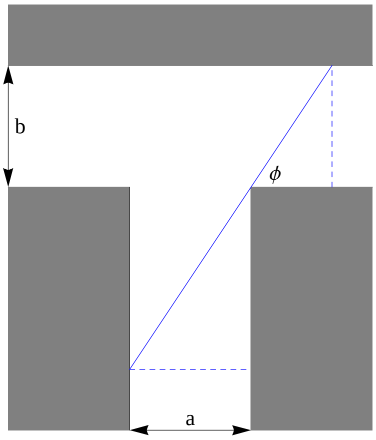
Najhitrejša pot med A in B je torej pot, za katero velja

$$\frac{\sin\phi_1}{\sin\phi_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

□

(12) Hodnik širine a se nadaljuje pravokotno v hodnik širine b. Kako dolga sme biti lestev, da jo bomo še lahko prenesli vodoravno okrog kolena?

Rešitev: Poglejmo si tloris hodnika.



Lestev želimo zavrteti iz navpične v vodoravno lego. Da bi jo lahko zavrteli do kota ϕ, bo morala biti lestev krajša kot najdaljša daljica, ki jo še lahko pod kotom ϕ včrtamo v hodnik. Dolžina te najdaljše daljice je enaka

$$d(\phi) = \frac{a}{\cos\phi} + \frac{b}{\sin\phi}.$$

Lestev bomo lahko prenesli okrog kolena, če bo njena dolžina krajša od vseh možnih vrednosti $d(\phi)$ za $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Iščemo torej minimum funkcije

$$d : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}.$$

Poiščimo stacionarne točke.

$$d'(\phi) = \frac{a\sin\phi}{\cos^2\phi} - \frac{b\cos\phi}{\sin^2\phi}.$$

Sledi

$$d'(\phi) = 0 \iff \frac{\sin^3\phi}{\cos^3\phi} = \frac{b}{a} \iff \operatorname{tg}\phi = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

Funkcija d ima torej eno stacionarno točko $\phi_0 = \operatorname{arc\,tg}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. Z analizo predznaka odvoda ugotovimo, da funkcija d pada na $(0, \phi_0)$ in narašča na $(\phi_0, \frac{\pi}{2})$. Od tod sledi, da doseže d v točki ϕ_0 globalni minimum. Poleg tega velja še $\lim_{\phi\to 0+} d(\phi) = \infty$ in $\lim_{\phi\to\frac{\pi}{2}-} d(\phi) = \infty$.

Izračunajmo sedaj še vrednosti $d(\phi_0)$. Najprej velja

$$\frac{1}{\cos\phi_0} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\phi_0} = \sqrt{1 + b^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{2}{3}}}.$$

Od tod dobimo:

$$\begin{aligned}
d(\phi_0) &= \frac{a}{\cos\phi_0} + \frac{b}{\sin\phi_0}, \\
&= \frac{1}{\cos\phi_0}\Big(a + \frac{b}{\operatorname{tg}\phi_0}\Big), \\
&= \sqrt{1 + b^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{2}{3}}}\Big(a + b^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}}\Big), \\
&= \sqrt{1 + b^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{2}{3}}}\, a\Big(1 + b^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{2}{3}}\Big), \\
&= a\big(1 + b^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{2}{3}}\big)^{\frac{3}{2}}, \\
&= \big(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\big)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Okrog kolena lahko torej prenesemo lestve, ki so krajše od $\big(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\big)^{\frac{3}{2}}$. $\square$

Nedoločeni integral

(1) Izračunaj integrale s pomočjo substitucije:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+9}\,dx \quad \left(\text{splošno} \int \frac{1}{a^2x^2+b^2}\,dx;\ a, b > 0\right),$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx, \quad (a > 0)\,,$

(c) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+25}\,dx,$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx.$

Rešitev:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+9}\,dx \quad \left(\text{splošno} \int \frac{1}{a^2x^2+b^2}\,dx\right):$

Vzemimo novo spremenljivko $t = \frac{x}{3}$. Potem je $dt = \frac{dx}{3}$ in

$$\int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \underline{\underline{\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3} + C}}.$$

V splošnem primeru vzemimo $t = \frac{ax}{b}$, kar nam da $dt = \frac{a\,dx}{b}$. Sledi

$$\int \frac{1}{a^2x^2+b^2}\,dx = \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{\left(\frac{ax}{b}\right)^2+1}\,dx = \frac{b}{b^2a}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \underline{\underline{\frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\frac{ax}{b} + C}}.$$

(b) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx, \quad (a>0)$:

Vzemimo novo spremenljivko $t = \frac{x}{a}$. Potem je $dt = \frac{dx}{a}$ in

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\,dx = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \underline{\underline{\arcsin \frac{x}{a} + C}}.$$

(c) $\int \frac{2x}{x^2+25}\,dx$:

Uvedimo novo spremenljivko $t = x^2+25$. Sledi $dt = 2x\,dx$ in

$$\int \frac{2x}{x^2+25}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \underline{\underline{\ln\left(x^2+25\right) + C}}.$$

<u>Opomba</u>: Včasih integriramo funkcije oblike $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$, kjer je g neka funkcija. V takih primerih uvedemo novo spremenljivko $u = g(x)$ (sledi $du = g'(x)dx$), da dobimo

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|g(x)| + C.$$

(d) $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx$:

Definirajmo $t = \sqrt{1+e^{2x}}$. Potem je $dt = \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ oziroma $\frac{dt}{t^2-1} = \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. Sledi:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx &= \int \frac{1}{t^2-1}\,dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\,dt,\\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+e^{2x}}-1\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+e^{2x}}+1\right) + C.}}\end{aligned}$$

<u>Opomba:</u> Alternativno bi lahko uporabili, da velja

$$\int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \begin{cases} \operatorname{arcth} t + C & ;\ |t|>1, \\ \operatorname{arth} t + C & ;\ |t|<1, \end{cases}$$

kar nam da

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx = -\operatorname{arcth}\left(\sqrt{1+e^{2x}}\right) + C.$$

Funkciji arcth in arth sta area kotangens in area tangens. □

(2) Izračunaj integrale s pomočjo integracije po delih:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sin} x\,dx$,

(c) $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx, \quad (a, b \in \mathbb{R})$.

Rešitev: Pri integraciji po delih si pomagamo s formulo

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Ponavadi se pri izbiri u in dv ravnamo po načelu:

· $u\ldots$ funkcija, ki se pri odvajanju poenostavi,
· $dv\ldots$ izraz, ki ga znamo integrirati.

(a) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$:

Vzemimo $u = \operatorname{arc\,tg} x$ in $dv = dx$. Sledi $du = \frac{dx}{x^2+1}$ in $v = x$ ter

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = x\operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \underline{\underline{x\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C}}.$$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sin} x\,dx$:

Najprej integriramo po delih $u = \arcsin x$, $dv = dx$, nato pa uvedimo $t = 1 - x^2$.

$$\begin{aligned}\int \arcsin x\,dx &= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int t^{-1/2}\,dt,\\ &= x\arcsin x + \sqrt{t} + C = \underline{\underline{x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C}}.\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx, \quad (a, b \in \mathbb{R})$:

Pri tem integralu bomo eksponentno funkcijo dvakrat integrirali, trigonometrični funkciji pa dvakrat odvajali.

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\sin bx\,dx &= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx,\\ &= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}(-\sin bx)\,dx\right),\\ &= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\,dx.\end{aligned}$$

Iz te implicitne oblike lahko izrazimo

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \underline{\underline{\frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}+C.}}$$

Na podoben način lahko izračunamo tudi

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \underline{\underline{\frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2+b^2}+C.}}$$

<u>Opomba</u>: Poleg integriranja realnih funkcij poznamo tudi integriranje kompleksnih funkcij. Poglejmo si, kako bi lahko na ta način izračunali zgornja dva integrala. Naj bo $\lambda = a+ib$ kompleksno število. Potem velja

$$e^{\lambda x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx).$$

Če označimo

$$I_c = \int e^{ax}\cos bx\,dx \text{ in } I_s = \int e^{ax}\sin bx\,dx,$$

je torej

$$\int e^{\lambda x}\,dx = I_c + iI_s.$$

Po drugi strani pa je:

$$\begin{aligned}
\int e^{\lambda x}\,dx &= \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}+C,\\
&= \frac{1}{a+ib}e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)+C,\\
&= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a-ib)(\cos bx + i\sin bx)+C,\\
&= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\big((b\sin bx + a\cos bx)+i(a\sin bx - b\cos bx)\big)+C,\\
&= \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2+b^2}+i\frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}+C.
\end{aligned}$$

Vidimo, da smo izračunali oba integrala hkrati, ne da bi uporabili metodo integriranja po delih. Cena, ki smo jo plačali, pa je, da operiramo s kompleksnimi namesto z realnimi funkcijami. □

(3) Izračunaj integrale racionalnih funkcij:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2+x}\,dx,$

(b) $\displaystyle\int \frac{-25+25x+4x^2+x^3}{25x^2+x^4}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^3-1}\,dx,$

(d) $\displaystyle\int \frac{2}{x(x^2+1)^2}\,dx.$

Rešitev: Za integracijo racionalnih funkcij imamo na razpolago algoritem, ki nas vedno (z več ali manj truda) pripelje do rezultata. Praviloma integriramo racionalne funkcije s pomočjo razcepa na parcialne ulomke:

- S pomočjo deljenja zapišemo racionalno funkcijo v obliki $R(x) = p(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$, kjer je polinom r nižje stopnje kot polinom q.
- Polinom q razcepimo na produkt linearnih faktorjev in pa nerazcepnih kvadratnih faktorjev.
- Funkcijo $\frac{r(x)}{q(x)}$ zapišemo kot vsoto parcialnih ulomkov s pomočjo nastavkov:
  - $\frac{1}{(x-a)^k} \rightsquigarrow \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$,
  - $\frac{1}{(x^2+bx+c)^l} \rightsquigarrow \frac{B_1+C_1x}{x^2+bx+c} + \frac{B_2+C_2x}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_l+C_lx}{(x^2+bx+c)^l}$.
- Integriramo vsak parcialni ulomek posebej.

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2+x}\,dx$:

Razcep na parcialne ulomke se glasi:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2+x} &= \frac{x^2+x+1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2},\\ &= \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2},\\ &= \frac{x^2(A+B) + x(2A+B+C) + A}{x(x^2+9)}.\end{aligned}$$

Od tod dobimo sistem treh enačb za tri neznanke:

$$\begin{aligned}A + B &= 1,\\ 2A + B + C &= 1,\\ A &= 1,\end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 1$, $B = 0$ in $C = -1$. Sledi

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2+x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx = \underline{\underline{\ln|x| + \frac{1}{x+1} + C}}.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{-25+25x+4x^2+x^3}{25x^2+x^4}\,dx$:

Razcepimo najprej integrand na parcialne ulomke:

$$\begin{aligned}\frac{-25+25x+4x^2+x^3}{25x^2+x^4} &= \frac{-25+25x+4x^2+x^3}{x^2(x^2+25)},\\ &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+25},\\ &= \frac{A(x^3+25x) + B(x^2+25) + Cx^3 + Dx^2}{x^2(x^2+25)},\\ &= \frac{25B + 25Ax + x^2(B+D) + x^3(A+C)}{x^2(x^2+25)}.\end{aligned}$$

Pridemo do sistema enačb:

$$\begin{aligned} A + C &= 1, \\ B + D &= 4, \\ 25A &= 25, \\ 25B &= -25, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 5$. Tako dobimo

$$\int \frac{-25 + 25x + 4x^2 + x^3}{25x^2 + x^4}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^2 + 25}\right) dx = \underline{\underline{\ln|x| + \frac{1}{x} + \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{5} + C}}.$$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^3 - 1}\, dx$:

Pri tej nalogi si bomo z nekaj spretnosti računanje olajšali.

$$\int \frac{x^5}{x^3 - 1}\, dx = \int \frac{x^5 - x^2 + x^2}{x^3 - 1}\, dx = \int \left(x^2 + \frac{x^2}{x^3 - 1}\right) dx = \underline{\underline{\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}\ln|x^3 - 1| + C}}.$$

(d) $\displaystyle\int \frac{2}{x(x^2 + 1)^2}\, dx$:

Integracija s pomočjo razcepa racionalne funkcije na parcialne ulomke dobro deluje, če so vsi kvadratni faktorji v njenem števcu kvečjemu na prvo potenco. V primeru višjih potenc pa si pomagamo z nastavkom.

- Zapišemo $R(x) = p(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ in faktoriziramo q.
- Uporabimo nastavek:
  - $\frac{1}{(x-a)^k} \rightsquigarrow A\ln|x - a|$,
  - $\frac{1}{(x^2+bx+c)^l} \rightsquigarrow B\ln(x^2 + bx + c) + C\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}$,
  - $\frac{\tilde{r}(x)}{\tilde{q}(x)}$, kjer polinom $\tilde{q}$ dobimo iz polinoma q z znižanjem potence vsakega faktorja za ena, polinom $\tilde{r}$ pa ima stopnjo za eno nižjo kot $\tilde{q}$.
- Odvajamo obe strani in izračunamo koeficiente.

Vzemimo nastavek

$$\int \frac{2}{x(x^2 + 1)^2}\, dx = A\ln|x| + B\ln(x^2 + 1) + C\operatorname{arc\,tg} x + \frac{D + Ex}{x^2 + 1}.$$

Z odvajanjem dobimo

$$\begin{aligned} \frac{2}{x(x^2+1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{2Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{E(x^2 + 1) - (D + Ex)2x}{(x^2 + 1)^2}, \\ &= \frac{A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(2x^4 + 2x^2) + C(x^3 + x) + D(-2x^2) + E(-x^3 + x)}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Dobimo sistem petih enačb za pet neznank:

$$\begin{aligned} A + 2B &= 0, \\ C - E &= 0, \\ 2A + 2B - 2D &= 0, \\ C + E &= 0, \\ A &= 2, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 2$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 1$, $E = 0$. Sledi

$$\int \frac{2}{x(x^2+1)^2}\, dx = \underline{\underline{2 \ln |x| - \ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{x^2+1} + C}}.$$

$\square$