

# Matematika 1

## 2. sklop nalog

---

### Števila

(1) Dokaži s pomočjo matematične indukcije, da za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja:

- (a)  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ,
- (b)  $133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ,
- (c)  $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ .

(2) Izračunaj s pomočjo de Moivreove formule naslednji kompleksni števili:

- (a)  $z = (1 + i\sqrt{3})^{42}$ ,
- (b)  $z = \frac{1}{(1+i)^8}$ .

(3) Predstavi v polarnem zapisu naslednji kompleksni števili:

- (a)  $z = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$ , kjer je  $\alpha \in (0, 2\pi)$ ,
- (b)  $z = \frac{1 + i \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}}{1 - i \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}}$ .

(4) Skiciraj množice točk v  $\mathbb{C}$ , ki zadoščajo danim pogojem in jih geometrijsko interpretiraj:

- (a)  $2 < |z| \leq 3$  in  $\arg(z) \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ ,
- (b)  $|z - i| < 1$  in  $|z + 1| \leq 1$ ,
- (c)  $|z| + \operatorname{Re}(z) \leq 2$ ,
- (d)  $|z - 1| + |z + 1| = 5$ .

(5) Reši v obsegu kompleksnih števil enačbi:

- (a)  $\left| \frac{z}{z+1} \right| = 1$  in  $\frac{z}{\bar{z}} = i$ ,
- (b)  $|z| + z = 2 + i$ .

(6) Reši v obsegu kompleksnih števil dani enačbi in nato skiciraj množici njunih rešitev:

- (a)  $z^3 = 1$ ,
- (b)  $z^4 = i$ .

(7) Reši v obsegu kompleksnih števil enačbi:

- (a)  $(z + i)^4 + (z - i)^4 = 0$ ,
- (b)  $z^n = \bar{z}$ .