Matematika 1
Rešitve 2. sklopa nalog

Števila

(1) Dokaži s pomočjo matematične indukcije, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

(a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(b) $133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$,

(c) $n! \leq \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

Rešitev: Pri dokazovanju lastnosti naravnih števil si pogosto pomagamo s principom popolne indukcije. Če hočemo dokazati, da neka lastnost L velja za vsa naravna števila, je dovolj, da pokažemo:

· veljavnost lastnosti L za $n = 1$,
· da iz veljavnosti lastnosti L za poljuben $n \in \mathbb{N}$ sledi veljavnost lastnosti L za $n + 1$.

(a) $\underline{n = 1}$:

$$1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3.$$

$\underline{n \to n+1}$:
Privzemimo sedaj, da za nek $n \in \mathbb{N}$ velja

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Pokazati želimo, da potem velja tudi

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

Računajmo:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &\overset{\text{I.P.}}{=} \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2, \\
&= (n+1)\left(\frac{1}{6}n(2n+1) + n + 1\right), \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6), \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3).
\end{aligned}$$

(b) $\underline{n = 1}$:

$$11^{n+1} + 12^{2n-1} = 11^2 + 12^1 = 133.$$

$\underline{n \to n+1}$:
Privzemimo sedaj, da $133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ za nek $n \in \mathbb{N}$. To pomeni, da obstaja tak $k \in \mathbb{N}$, da je $11^{n+1} + 12^{2n-1} = 133k$, od koder sledi

$$11^{(n+1)+1} + 12^{2(n+1)-1} = 11 \cdot 11^{n+1} + 144 \cdot 12^{2n-1} = 11(11^{n+1} + 12^{2n-1}) + 133 \cdot 12^{2n-1}.$$

Z uporabo indukcijske predpostavke od tod sledi

$$11^{(n+1)+1} + 12^{2(n+1)-1} = 133(k + 12^{2n-1}),$$

oziroma $133 \mid 11^{(n+1)+1} + 12^{2(n+1)-1}$, kar smo želeli dokazati.
(c) $\underline{n = 1}$:

$$1! \leq \left(\frac{1+1}{2}\right)^1 = 1.$$

$\underline{n \to n+1}$:
Recimo, da za nek n velja $n! \leq (\frac{n+1}{2})^n$ in pokažimo, da od tod sledi $(n+1)! \leq (\frac{n+2}{2})^{n+1}$. Po indukcijski predpostavki je

$$(n+1)! = (n+1)n! \leq (n+1)\left(\frac{n+1}{2}\right)^n = \frac{(n+1)^{n+1}}{2^n}.$$

Želimo pokazati, da velja neenakost

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{2^n} \leq \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1},$$

ki pa je ekvivalentna neenakosti

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Zadnjo neenakost lahko dokažemo s pomočjo binomskega razvoja

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}\frac{1}{n+1} + \binom{n+1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

Vsota prvih dveh členov je enaka 2, vsi ostali členi pa so pozitivni. $\square$

(2) Izračunaj s pomočjo de Moivrove formule naslednji kompleksni števili:

(a) $z = (1 + i\sqrt{3})^{42}$,
(b) $z = \dfrac{1}{(1+i)^8}$.

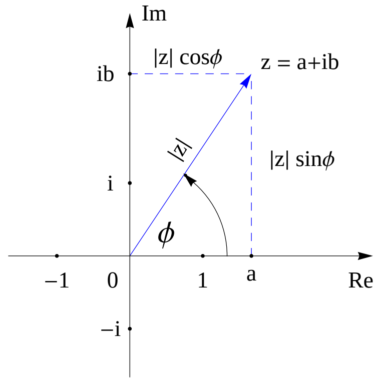
Rešitev: Poleg kartezičnega zapisa kompleksnega števila $z = a + ib$ nam pri računanju pogosto prideta prav polarni zapis

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$$

in pa Eulerjev zapis

$$z = |z|e^{i\phi},$$

kjer je $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ absolutna vrednost, ϕ pa argument (polarni kot) števila z.



Za nas bo Eulerjev zapis zaenkrat le primeren pripomoček za računanje, ko se bomo naučili potencirati na kompleksne eksponente, pa bomo dokazali, da velja Eulerjeva formula

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi.$$

S pomočjo de Moivrove formule lahko računamo potence kompleksnih števil. Če je namreč $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi) = |z|e^{i\phi}$, potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$z^n = |z|^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = |z|^n e^{in\phi}.$$

(a) Pišimo $w = 1 + i\sqrt{3}$. Potem je $|w| = 2$ in $\phi = \frac{\pi}{3}$. Po de Moivrovi formuli sledi

$$z = w^{42} = 2^{42}\left(\cos\frac{42\pi}{3} + i\sin\frac{42\pi}{3}\right) = 2^{42}.$$

(b) Naj bo sedaj $w = 1 + i$. Potem je $|w| = \sqrt{2}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$ in

$$z = \frac{1}{w^8} = \frac{1}{16\left(\cos\frac{8\pi}{4} + i\sin\frac{8\pi}{4}\right)} = \frac{1}{16}.$$

$\square$

(3) Predstavi v polarnem zapisu naslednji kompleksni števili:

(a) $z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha$, kjer je $\alpha \in (0, 2\pi)$,

(b) $z = \dfrac{1 + i\,\mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2}}{1 - i\,\mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2}}$.

Rešitev: (a) Izračunajmo najprej absolutno vrednost števila z:

$$|z|^2 = (1 - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 2 - 2\cos\alpha = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Ker je $\alpha \in (0, 2\pi)$, od tod sledi $|z| = 2\sin\frac{\alpha}{2}$.
Izračunajmo sedaj še $\phi = \arg(z)$. Velja

$$\mathrm{tg}\,\phi = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Ker je $\mathrm{Re}(z) > 0$ in $\alpha \in (0, 2\pi)$, imamo $\phi, \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Od tod pa iz injektivnosti funkcije tangens na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sledi $\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Torej je

$$z = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

(b) Najprej opazimo, da velja

$$|z|^2 = z\overline{z} = \frac{1 + i\,\mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2}}{1 - i\,\mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2}} \cdot \frac{1 - i\,\mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2}}{1 + i\,\mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2}} = 1,$$

oziroma $|z| = 1$.

Za polarni razcep zapišimo najprej z kot vsoto realnega in imaginarnega dela:

$$z = \frac{1 + i\,\mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2}}{1 - i\,\mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2}} = \frac{1 + i\,\mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2}}{1 - i\,\mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2}} \cdot \frac{1 + i\,\mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2}}{1 + i\,\mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2}} = \frac{(1 + i\,\mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2})^2}{1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{\phi}{2}} = \frac{1 + 2i\,\mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2} - \mathrm{tg}^2\,\frac{\phi}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{\phi}{2}}}.$$

Z uporabo formul za sinus oziroma kosinus dvojnega kota dobimo

$$z = \cos\phi + i\sin\phi.$$

□

(4) Skiciraj množice točk v $\mathbb{C}$, ki zadoščajo danim pogojem in jih geometrijsko interpretiraj:

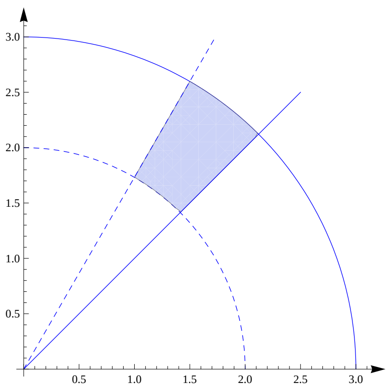
(a) $2 < |z| \leq 3$ in $\arg(z) \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$,

(b) $|z - i| < 1$ in $|z + 1| \leq 1$,

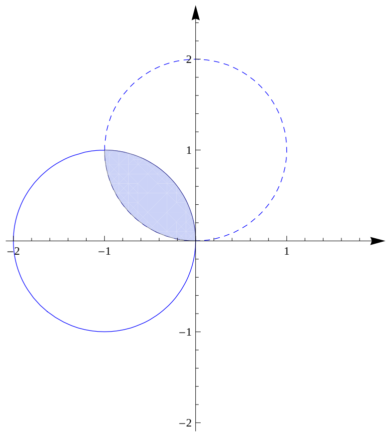
(c) $|z| + \mathrm{Re}(z) \leq 2$,

(d) $|z - 1| + |z + 1| = 5$.

Rešitev: (a) Dana množica je presek kolobarja in krožnega izseka:



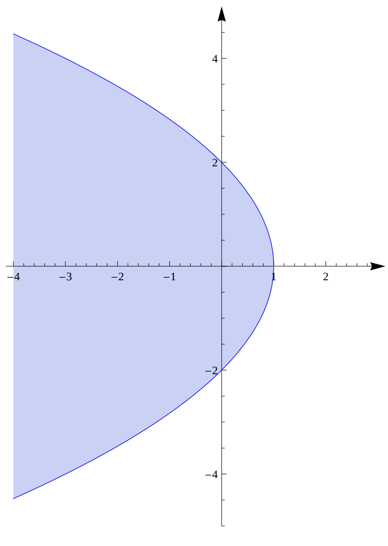
(b) Dana množica je presek dveh krogov:



(c) Pišimo $z = x + iy$. Iz neenačbe $|z| + \mathrm{Re}(z) \leq 2$ potem sledi, da je $x \leq 2$. Če dano neenačbo kvadriramo, pridemo do neenačbe

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} + x &\leq 2, \\ x^2 + y^2 &\leq (2 - x)^2, \\ y^2 &\leq 4(1 - x). \end{aligned}$$

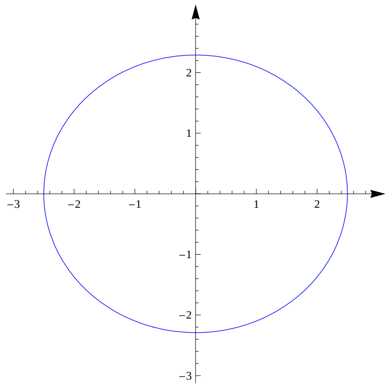
Dana množica je torej območje znotraj parabole $y^2 = 4(1 - x)$:



(d) Rešitev enačbe $|z - 1| + |z + 1| = 5$ so vsa kompleksna števila, ki imajo konstantno vsoto oddaljenosti od števil 1 in -1. Če se spomnimo na geometrijsko definicijo elipse, lahko od tod sklepamo, da bomo dobili elipso z goriščema v točkah 1 oziroma -1. Velika polos je enaka $a = \frac{5}{2}$, mala pa $b = \frac{\sqrt{21}}{2}$. Središče elipse je v koordinatnem izhodišču, njena enačba pa je

$$\frac{x^2}{\frac{25}{4}} + \frac{y^2}{\frac{21}{4}} = 1.$$

Do te enačbe lahko pridemo tudi po računski poti.



$\square$

(5) Reši v obsegu kompleksnih števil enačbi:

(a) $\left|\dfrac{z}{z+1}\right| = 1$ in $\dfrac{z}{\overline{z}} = i$,

(b) $|z| + z = 2 + i$.

Rešitev: (a) Naj bo $z = x + iy$. Sledi:

$$\begin{aligned} \frac{z}{\overline{z}} &= i, \\ z &= i\overline{z}, \\ x + iy &= i(x - iy), \\ x + iy &= y + ix. \end{aligned}$$

Torej je $x = y$. Če vstavimo to v enačbo $|\frac{z}{z+1}| = 1$, dobimo

$$\begin{aligned} |z| &= |z+1|, \\ \sqrt{x^2 + x^2} &= \sqrt{(x+1)^2 + x^2}, \\ x &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Rešitev enačbe je torej število $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

(b) Pišimo $z = x + iy$. Potem rešujemo enačbo

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x + iy = 2 + i.$$

Od tod takoj sledi $y = 1$ in po krajšem računu iz enačbe $\sqrt{x^2+1} + x = 2$ še $x = \frac{3}{4}$. Rešitev enačbe je torej $z = \frac{3}{4} + i$. $\square$

(6) Reši v obsegu kompleksnih števil dani enačbi in nato skiciraj množici njunih rešitev:

(a) $z^3 = 1$,

(b) $z^4 = i$.

Rešitev: V realnem ima enačba $x^n = a$ za poljuben $a > 0$ ali eno rešitev, če je n lih, ali pa dve rešitvi, če je n sod. V kompleksnem pa ima enačba $z^n = a$ za poljubno neničelno kompleksno število a natanko n različnih rešitev. Posebej pomembne so rešitve enačbe

$$z^n = 1,$$

ki jim rečemo tudi n-ti koreni enote.

(a) Iščemo rešitve enačbe $z^3 = 1$. Pišimo $z = |z|e^{i\phi}$. Sledi

$$|z|^3 e^{i3\phi} = 1 \cdot e^{i2k\pi}.$$

Vidimo, da je

$$\begin{aligned} |z| &= 1, \\ \phi &= \frac{2k\pi}{3}. \end{aligned}$$

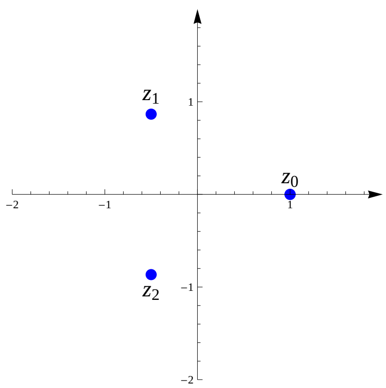
Ker nas zanimajo polarni koti $\phi \in [0, 2\pi)$, pridejo v poštev samo $k \in \{0, 1, 2\}$. Rešitve enačbe so

$$z_k = e^{\frac{2k\pi i}{3}}, \quad k \in \{0, 1, 2\}.$$

Eksplicitno so to števila

$$\begin{aligned} z_0 &= 1, \\ z_1 &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_2 &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Geometrijsko so rešitve enačbe $z^3 = 1$ oglišča enakostraničnega trikotnika, ležijo pa na enotski krožnici.



Opomba: Za splošen n tvorijo n-ti koreni enote oglišča enakostraničnega n-kotnika. Eno izmed oglišč je zmeraj $z_0 = 1$. Če je n lih, je to hkrati tudi edini realni koren enačbe $z^n = 1$. Če je n sod, pa je realen še $z_{\frac{n}{2}} = -1$.

(b) Rešimo še enačbo $z^4 = i$. Če pišemo $z = |z|e^{i\phi}$, dobimo

$$|z|^4 e^{i4\phi} = 1 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}.$$

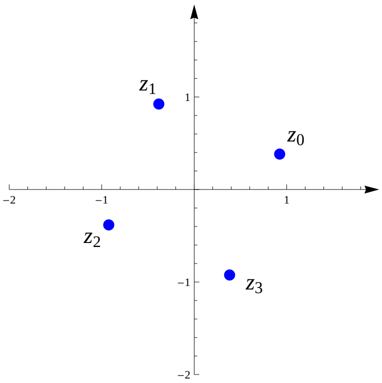
Od tod dobimo

$$|z| = 1,$$
$$\phi = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$$

za $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Rešitve enačbe so torej

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Rešitve enačbe tokrat tvorijo oglišča kvadrata in ležijo na enotski krožnici. Kvadrat je zavrten za kot $\frac{\pi}{8}$ glede na koordinatne osi.



Opomba: n-te korene kompleksnega števila a lahko dobimo tudi na naslednji način. Če pišemo $a = |a|e^{i\phi}$, je $z_0 = \sqrt[n]{|a|}e^{\frac{i\phi}{n}}$ eden izmed n-tih korenov števila a. Preostale n-te korene dobimo, če z_0 pomnožimo z n-timi koreni enote. Vidimo, da n-ti koreni števila a določajo oglišča enakostraničnega n-kotnika, ki leži na krožnici s središčem v 0 in s polmerom $\sqrt[n]{|a|}$. Glede na standardni n-kotnik korenov enote je ta n-kotnik zavrten za kot $\frac{\phi}{n}$. $\square$

(7) Reši v obsegu kompleksnih števil enačbi:

(a) $(z + i)^4 + (z - i)^4 = 0$,

(b) $z^n = \overline{z}$.

Rešitev: (a) S pomočjo binomske formule lahko enačbo $(z+i)^4+(z-i)^4 = 0$ preoblikujemo v obliko

$$z^4 - 6z^2 + 1 = 0.$$

Pišimo sedaj $w = z^2$. Potem je $w^2 - 6w + 1 = 0$, od koder dobimo

$$w_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Sedaj lahko z nekaj spretnosti opazimo, da je

$$3 \pm 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} \pm 1)^2.$$

Od tod dobimo vsega skupaj štiri rešitve

$$z \in \left\{\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1, -\sqrt{2} + 1, -\sqrt{2} - 1\right\}.$$

(b) Če je $n = 1$, je rešitev enačbe $z = \overline{z}$ vsak $z \in \mathbb{R}$.

Naj bo sedaj $n \geq 2$. Ena rešitev je $z = 0$, zato v nadaljevanju privzemimo, da je $z \neq 0$. Če enačbo $z^n = \overline{z}$ pomnožimo z z, dobimo

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= |z|^2, \\ |z|^{n+1} e^{i(n+1)\phi} &= |z|^2 e^{i2k\pi}. \end{aligned}$$

Od tod dobimo, da je $|z| = 1$ in $\phi = \frac{2k\pi}{n+1}$ za $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Rešitve enačbe so torej

$$z \in \left\{0, 1, e^{\frac{2\pi i}{n+1}}, e^{\frac{4\pi i}{n+1}}, \ldots, e^{\frac{2n\pi i}{n+1}}\right\}.$$

Opomba: Enačba (a) je enačba četrte stopnje, zato ima po osnovnem izreku algebre štiri kompleksne ničle (ki so v našem primeru vse realne). Iz primera (b) za $n = 1$ pa vidimo, da ima lahko že zelo preprosta enačba, ki vsebuje poleg z še $\overline{z}$, neskončno rešitev. $\square$