Matematika 1
Rešitve 10. sklopa nalog

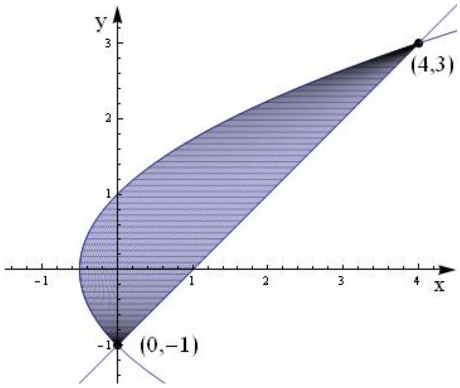
Uporaba integrala

(1) Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta krivulji $y^2 = 2x+1$ in $y = x-1$.

Dokaz. Nalogo bomo rešili na dva načina.

1. način:

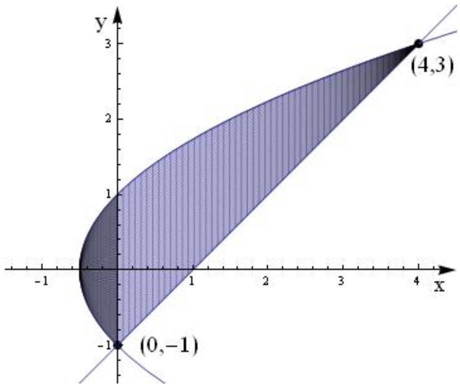
Pri tem načinu bomo integrirali po spremenljivki y na intervalu $y \in [-1,3]$. Leva in desna robna krivulja našega lika imata v tem primeru enačbi $x(y) = \frac{y^2-1}{2}$ oziroma $x(y) = y+1$.



Sledi

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{3} \left((y+1) - \left(\frac{y^2-1}{2} \right) \right) dy, \\ &= \int_{-1}^{3} \left(y + \frac{3}{2} - \frac{y^2}{2} \right) dy, \\ &= \left(\frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}x - \frac{y^3}{6} \right) \Big|_{-1}^{3}, \\ &= \underline{\underline{\frac{16}{3}}}. \end{aligned}$$

2. način: Pri tem načinu bomo integrirali po spremenljivki x. Spodnji rob lika je v našem primeru sestavljen iz krivulje $y = -\sqrt{2x+1}$ na intervalu $[-\frac{1}{2}, 0]$ in pa iz krivulje $y = x-1$ na intervalu $[0,4]$. Zgornji del roba sestoji iz krivulje $y = \sqrt{2x+1}$ na intervalu $[-\frac{1}{2}, 4]$. Ploščino lika bomo izračunali, tako da bomo lik razdelili na dva kosa (en del bo levo od ordinatne osi, drugi del pa desno od ordinatne osi). S tem dosežemo, da imata oba lika zgornji in spodnji rob definiran s po enim samim predpisom.



Računajmo

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(\sqrt{2x+1} - \left(-\sqrt{2x+1}\right)\right)\, dx + \int_0^4 \left(\sqrt{2x+1} - (x-1)\right)\, dx, \\
&= 2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \sqrt{2x+1}\, dx + \int_0^4 \left(\sqrt{2x+1} - x + 1\right)\, dx, \\
&= \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} + \left(\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^4, \\
&= \frac{2}{3} + \left((9-8+4) - \frac{1}{3}\right), \\
&= \underline{\underline{\frac{16}{3}}}.
\end{aligned}$$

Opomba: Pri tej nalogi smo videli, da integracija po x ni vedno najboljša in najlažja pot. Če smo integrirali po y, smo lahko ploščino izračunali v enem kosu, pa še integrand je bil bolj enostaven. □

(2) Izračunaj ploščino lika, ki ga omejuje astroida. Astroida je podana v parametrični obliki:

$$\begin{aligned}
x(t) &= a\cos^3 x, \\
y(t) &= a\sin^3 x
\end{aligned}$$

za $t \in [0, 2\pi]$ in nek $a > 0$.

Rešitev: Astroida je krivulja, ki po obliki spominja na zvezdo.

Podamo jo lahko v parametrični obliki z vektorsko funkcijo $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, kjer je:

$$x(t) = a\cos^3 t,$$
$$y(t) = a\sin^3 t,$$

za parametre $t \in [0, 2\pi]$. Lahko pa jo podamo tudi v implicitni obliki z enačbo

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Če imamo krivuljo v parametrični obliki podano s predpisom $\vec{r} : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2$, potem družina zveznic med krivuljo in pa koordinatnim izhodiščem opiše lik, katerega ploščina je enaka

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - \dot{x}y)\, dt.$$

Pri tem je treba biti pozoren na predznak. Če se po krivulji premikamo v 'pozitivni' smeri glede na izhodišče, dobimo običajno ploščino, pri premikanju v 'negativni' smeri pa negativno predznačeno ploščino. Če se del poti premikamo v pozitivni smeri del poti pa v negativni smeri, je treba obravnavati vsak kos posebej. Če je krivulja sklenjena (to je $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$), pa lahko uporabimo katerokoli izmed formul

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - \dot{x}y)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} x\dot{y}\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}y\, dt.$$

Za izračun ploščine astroide moramo najprej izračunati odvoda koordinat x in y:

$$\dot{x} = -3a\cos^2 t\sin t,$$
$$\dot{y} = 3a\sin^2 t\cos t.$$

Od tod dobimo $x\dot{y} - \dot{x}y = 3a^2\cos^2 t\sin^2 t$ in

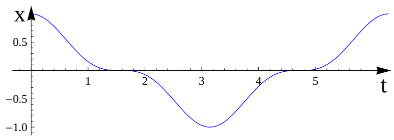
$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3a^2\cos^2 t\sin^2 t\, dt = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\, dt = \underline{\underline{\frac{3\pi a^2}{8}}}.$$

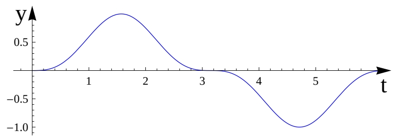
Opomba 1: Vektorska funkcija oziroma parametrično podana krivulja je funkcija

$$\vec{r} : D \to \mathbb{R}^2,$$

kjer je $D \subset \mathbb{R}$. Najlažje si jo predstavljamo kot gibanje točke po ravnini. Parameter $t \in D$ si predstavljamo kot čas, vrednost $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ pa kot položaj točke ob času t.

Pri skiciranju tira vektorske funkcije običajno najprej skiciramo grafa obeh koordinat. V primeru funkcij $x(t) = \cos^3 t$ in $y(t) = \sin^3 t$ tako dobimo

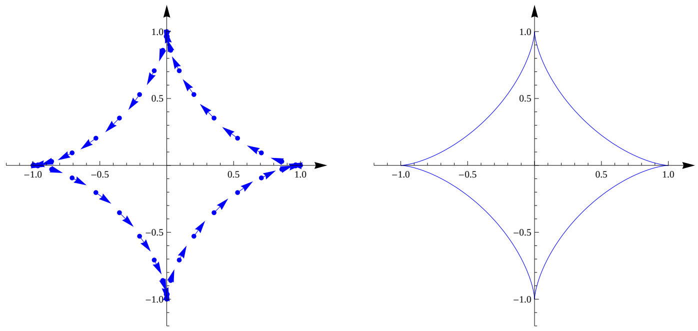




Na intervalih, kjer funkcija $x(t)$ narašča, se točka premika v desno, kjer pa pada, pa v levo. Podobno nam naraščanje funkcije $y(t)$ pove, da se točka premika navzgor, padanje pa pomeni, da se premika navzdol. V stacionarnih točkah funkcije x, je tangenta na tir funkcije navpična, v stacionarnih točkah funkcije y pa vodoravna. Če imata ob nekem času obe funkciji x in y odvod enak nič, se lahko zgodi, da dobimo na tiru ost. Preden skiciramo tir vektorske funkcije, ponavadi izračunamo še odvod vektorske funkcije oziroma hitrost točke.

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t).$$

Sedaj najprej izračunamo položaje točke ob nekaterih časih in jih opremimo še z majhnimi puščicami v smeri hitrosti. Nato skozi te točke potegnemo krivuljo.

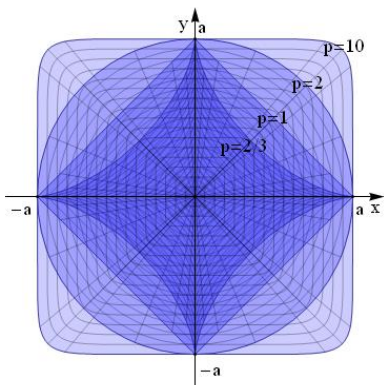


Opomba 2: Astroida spada v družino krivulj oblike $|x|^p + |y|^p = a^p$ za $p \in (0, \infty)$. Pri $p = 2$ dobimo krožnico s polmerom a, pri $p = \frac{2}{3}$ pa astroido. Te krivulje imajo naravno parametrizacijo

$$x(t) = \pm a|\cos t|^{\frac{2}{p}},$$
$$y(t) = \pm a|\sin t|^{\frac{2}{p}},$$

za $t \in [0, 2\pi]$. Predznaki so določeni s predznaki funkcij cos oziroma sin.

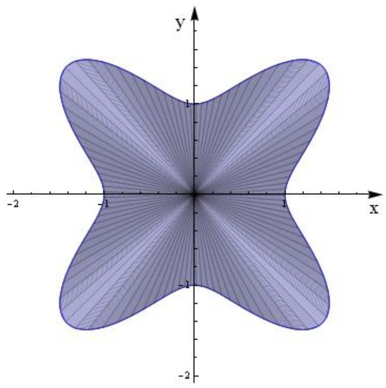
Pri velikih p dobimo like, ki čedalje bolj aproksimirajo kvadrat, pri majhnih p pa like s ploščino, ki se približuje 0.



□

(3) Izračunaj ploščino lika, ki ga omejuje krivulja $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$. Pomagaj si z zapisom krivulje v polarni obliki.

Rešitev: Poglejmo najprej skico lika.



Za izračun njegove ploščine bomo najprej njegov rob izrazili v polarnih koordinatah. Če pišemo $x = r\cos\phi$ in $y = r\sin\phi$, je rob lika podan s krivuljo $r^4(\cos^4\phi + \sin^4\phi) = r^2$ oziroma

$$r^2 = \frac{1}{\cos^4\phi + \sin^4\phi}.$$

Ploščino lika, ki je omejen s krivuljo podano v polarnih koordinatah, izračunamo po formuli

$$S = \frac{1}{2}\int_{\phi_1}^{\phi_2} r^2\, d\phi.$$

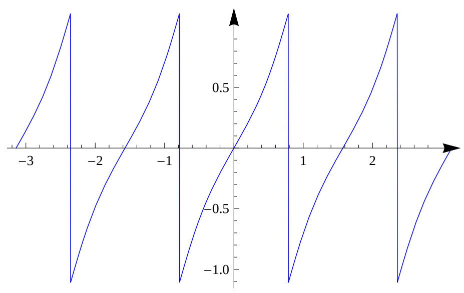
V našem primeru tako dobimo

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^4\phi + \sin^4\phi}\, d\phi.$$

Izračunajmo najprej nedoločeni integral funkcije $f(\phi) = \frac{1}{\cos^4\phi+\sin^4\phi}$. S pomočjo substitucij $u = 4\phi$ in $\operatorname{tg}\frac{u}{2} = t$ dobimo

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin^4\phi + \cos^4\phi}\, d\phi &= \int \frac{1}{1 - 2\sin^2\phi\cos^2\phi}\, d\phi = \int \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\phi}\, d\phi, \\
&= \int \frac{1}{1 - \frac{1-\cos 4\phi}{4}}\, d\phi = \int \frac{4}{3 + \cos 4\phi}\, d\phi, \\
&= \int \frac{4}{3 + \cos 4\phi}\, d\phi = \int \frac{du}{3 + \cos u} = \int \frac{1}{3 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}, \\
&= \int \frac{1}{2 + t^2}\, dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} 2\phi\right) + C.
\end{aligned}$$

Ta nedoločeni integral ni zvezen v točkah, kjer ima funkcija $\operatorname{tg} 2\phi$ pole.



Da bi dobili zvezno primitivno funkcijo funkcije f, bi morali na vsakem izmed intervalov med poli izbrati ustrezno konstanto. V našem primeru pa bomo za izračun ploščine lika upoštevali njegovo simetrijo. Dovolj je namreč izračunati del lika, ki ustreza parametrom $\phi \in [0, \pi/4]$. Sledi

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\cos^4\phi + \sin^4\phi} = 4\int_0^{\pi/4} \frac{d\phi}{\cos^4\phi + \sin^4\phi} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{tg}\, 2\phi\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \underline{\underline{\pi\sqrt{2}}}.$$

$\square$

(4) Izračunaj obseg astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ za $a > 0$.

Rešitev: Spomnimo se, da lahko astroido parametriziramo s predpisom:

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos^3 t, \\ y(t) &= a\sin^3 t \end{aligned}$$

za $t \in [0, 2\pi]$. Sledi:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3a\cos^2 t \sin t, \\ \dot{y} &= 3a\sin^2 t \cos t. \end{aligned}$$

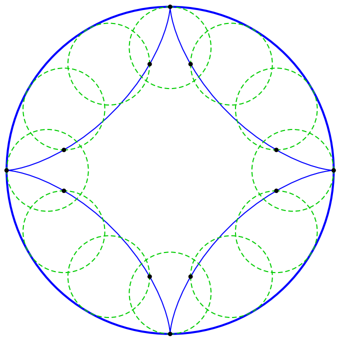
Dolžino parametrično podane krivulje izračunamo po formuli

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

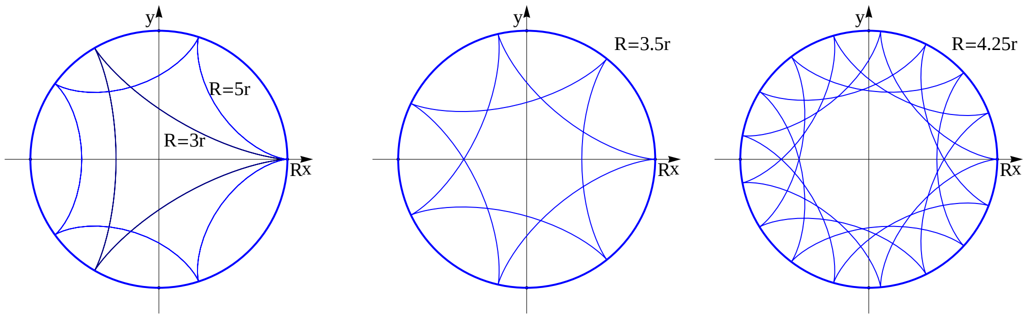
Tako dobimo:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{9a^2\cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t}\, dt, \\ &= 3a\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t}\, dt, \\ &= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\, dt, \\ &= 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt, \\ &= -3a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}, \\ &= \underline{\underline{6a}}. \end{aligned}$$

<u>Opomba</u>: Astroida spada tudi v družino hipocikloid. To so krivulje, ki jih dobimo s kotaljenjem krožnice s polmerom r po notranjem obodu večje krožnice s polmerom R. Če velja $R = 4r$, dobimo ravno astroido.



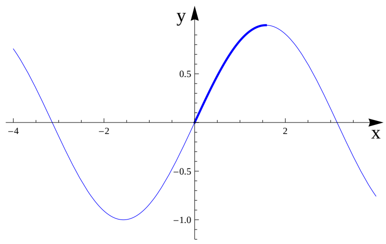
Če je razmerje $R = nr$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, dobimo krivuljo z n ostmi, če pa je $R = \frac{p}{q}r$, pa dobimo krivuljo s p ostmi, ki q-krat 'obkroži' izhodišče preden se spet sklene.



$\square$

(5) S pomočjo trapezne metode izračunaj dolžino sinusoide $f(x) = \sin x$ na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tako da bo napaka manjša od 0.01.

Rešitev: Računamo dolžino loka sinusoide na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



Ker je $f'(x) = \cos x$, nas torej zanima določeni integral

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx.$$

Pri računanju dolžin krivulj praviloma naletimo na integrale iracionalnih funkcij, ki jih je težko integrirati, zato nam prav pridejo metode numerične integracije. Označimo

$$g(x) = \sqrt{1 + \cos^2 x}.$$

Spomnimo se, da je napaka aproksimacije pri trapezni metodi enaka

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a,b]} |g''(x)| = \frac{\pi^3}{96n^2} \max_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} |g''(x)|.$$

Število n bomo izbrali tako, da bo iz zgornje ocene sledilo $|R_n| < 0.01$. V ta namen moramo najprej oceniti velikost $|g''(x)|$. Odvoda funkcije g sta:

$$g'(x) = -\frac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\cos^2 x}},$$
$$g''(x) = -\frac{2\cos 2x\sqrt{1+\cos^2 x} - \frac{\sin^2 2x}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}}{2(1+\cos^2 x)}.$$

Maksimum funkcije g'' sicer lahko poiščemo natančno, a je s tem lahko kar nekaj dela, zato je dovolj, če ga navzgor ocenimo. Velja

$$|g''(x)| \leq \frac{2|\cos 2x|\sqrt{1+\cos^2 x} + \frac{\sin^2 2x}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}}{2(1+\cos^2 x)} \leq \frac{2\cdot 1\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{2}}{2\cdot 1} = \sqrt{2}+\frac{1}{4} < \frac{7}{4}.$$

Od tod sledi, da je

$$|R_n| \leq \frac{\pi^3}{96n^2}\max_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}|g''(x)| \leq \frac{7\pi^3}{4\cdot 96n^2}.$$

Ker želimo, da bo $|R_n| < 0.01$, je dovolj najti n, ki zadošča

$$\frac{7\pi^3}{0.01\cdot 4\cdot 96} \leq n^2.$$

Dobri so $n \geq 8$. Torej bomo integrirali funkcijo $g(x) = \sqrt{1+\cos^2 x}$ na intervalu $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ s trapezno metodo pri $n = 8$. Poglejmo si tabelo vrednosti v delilnih točkah:

x_k	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{2\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{4\pi}{16}$	$\frac{5\pi}{16}$	$\frac{6\pi}{16}$	$\frac{7\pi}{16}$	$\frac{\pi}{2}$
y_k	1.414	1.401	1.361	1.301	1.225	1.144	1.071	1.019	1

Sledi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx \approx \frac{\pi}{32}\left(y_0+2y_1+2y_2+2y_3+2y_4+2y_5+2y_6+2y_7+y_8\right) = 1.9101.$$

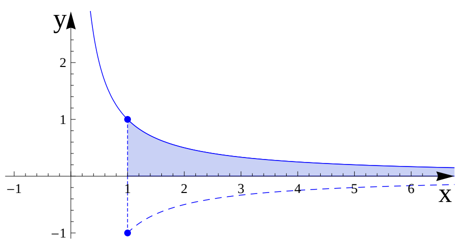
Dejanska dolžina tega loka sinusoide je približno 1.910098895. Vidimo, da je napaka precej manjša od naše ocene. $\square$

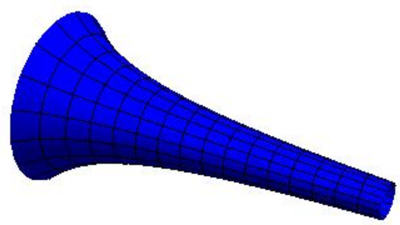
(6) Graf funkcije f, kjer je $f(x) = \frac{1}{x}$, zavrtimo na intervalu $[1,\infty)$ okoli osi x.

(a) Izračunaj volumen dobljenega telesa.

(b) Pokaži, da je površina dobljenega telesa neskončna.

Rešitev: Telo, ki ga študiramo pri tej nalogi, včasih imenujemo tudi Torricellijeva trobenta. To je bil eden prvih znanih primerov teles, ki imajo končen volumen in neskončno površino.





(a) Volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo, če zavrtimo graf funkcije f okoli osi x na intervalu $[x_1, x_2]$, je enak

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)^2 \, dx.$$

Volumen Torricellijeve trobente je tako enak

$$V = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx = -\pi \frac{1}{x}\Big|_1^\infty = \underline{\underline{\pi}}.$$

(b) Površina rotacijskega telesa, ki ga dobimo, če zavrtimo graf funkcije f okoli osi x na intervalu $[x_1, x_2]$, pa je enaka

$$P = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx.$$

Ker je $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, moramo torej pokazati, da integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \, dx$$

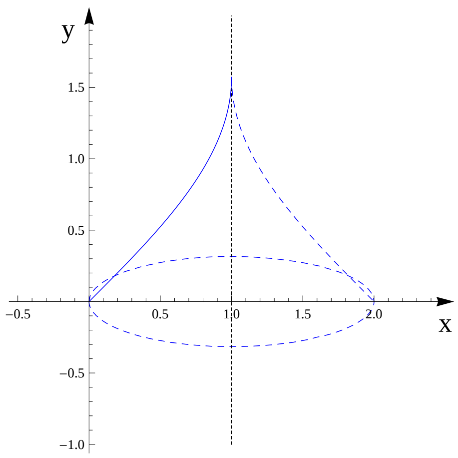
divergira. To bi lahko pokazali s pomočjo kriterija, ki smo ga spoznali pri obravnavi izlimitiranih integralov. Lahko pa naredimo preprosto oceno

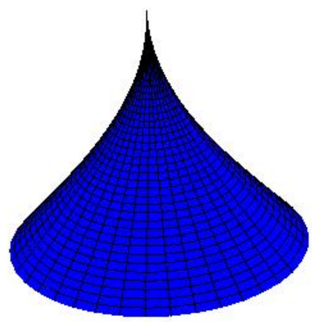
$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \, dx > \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty.$$

Ker integral na desni divergira, divergira tudi integral na levi. $\square$

(7) Izračunaj volumen vrtenine, ki jo dobimo, če krivuljo $y = \arcsin x$, $x \in [0, 1]$, zavrtimo okoli osi $x = 1$.

Rešitev: Pri vrtenju krivulje $y = \arcsin x$ okoli osi $x = 1$ dobimo telo naslednje oblike.





Ker tokrat krivuljo vrtimo okoli navpične osi, bomo integrirali po spremenljivki y na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Razdalja točke na krivulji $y = \arcsin x$, ki je na višini y, od osi $x = 1$ je enaka $d(y) = 1 - \sin y$. Od tod sledi

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d(y)^2 \, dy, \\
&= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\sin y + \sin^2 y) \, dy, \\
&= \pi \left((y + 2\cos y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{4} \right), \\
&= \underline{\underline{\pi \left(\frac{3\pi}{4} - 2 \right)}}.
\end{aligned}$$

$\square$