Matematika 1
Rešitve 11. sklopa nalog

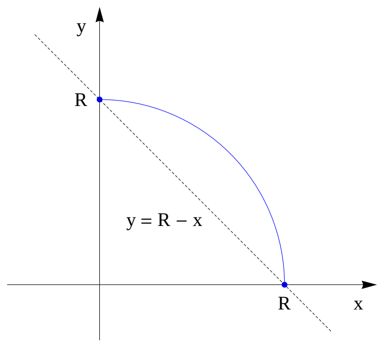
Uporaba integrala

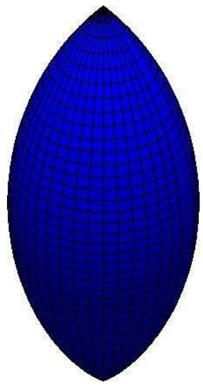
(8) Dan je krožni lok

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R\},$$

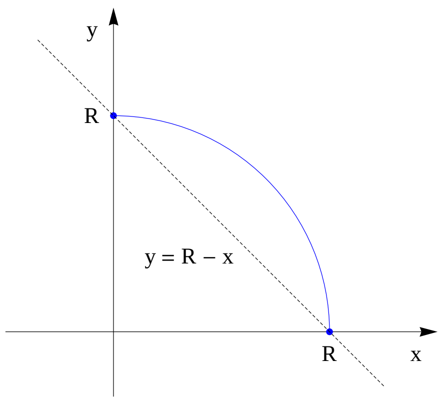
kjer je R pozitivno realno število. Kolikšna je površine vrtenine, ki jo dobimo, če dani lok zavrtimo okoli premice $y = R - x$?

Rešitev: Našo vrtenino dobimo tako, da krožni lok zavrtimo okrog tetive.

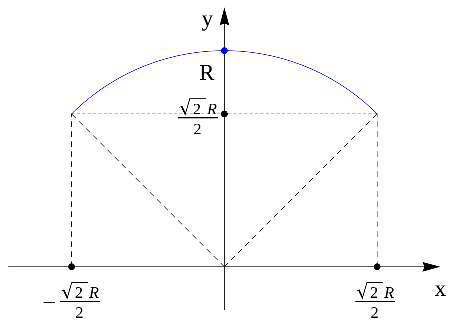




Da bomo lahko direktno uporabili formulo za računanje volumna vrtenin, bomo najprej krožni lok in tetivo zavrteli za 45°.



$\rightsquigarrow$



Isto telo dobimo, če graf funkcije $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{\sqrt{2}}{2}R$ zavrtimo okoli abscisne osi na intervalu $[-\frac{\sqrt{2}}{2}R, \frac{\sqrt{2}}{2}R]$. Ker je $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, je površina vrtenine torej enaka

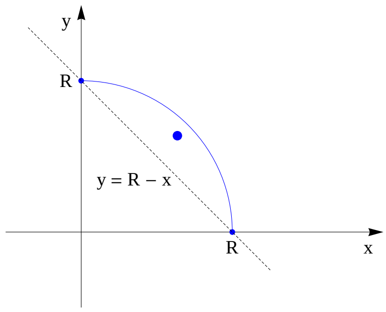
$$P = 2\pi \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}R}^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} \left(\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{\sqrt{2}}{2}R\right) \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx.$$

Računajmo:

$$
\begin{aligned}
P &= 2\pi \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}R}^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} \left(\sqrt{R^2-x^2} - \frac{\sqrt{2}}{2}R\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx, \\
&= 2\pi \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}R}^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} \left(R - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{R^2}{\sqrt{R^2-x^2}}\right) dx, \\
&= 2\pi \left(Rx - \frac{\sqrt{2}}{2}R^2 \arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\right)\Bigg|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}R}^{\frac{\sqrt{2}}{2}R}, \\
&= 2\pi\left(\sqrt{2}R^2 - \sqrt{2}R^2\frac{\pi}{4}\right), \\
&= \underline{\underline{2\sqrt{2}\pi R^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}}.
\end{aligned}
$$

Opomba: Površino plašča vrtenine lahko izračunamo tudi s pomočjo Guldinovega pravila.

Guldinovo pravilo: Površina plašča vrtenine, ki ga dobimo pri vrtenju loka okoli neke osi, je enaka produktu dolžine loka in pa dolžine poti, ki jo pri enem vrtljaju opiše geometrijsko središče loka.



Koordinati geometrijskega središča loka $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ sta:

$$
\begin{aligned}
x_* &= \frac{\int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}{l}, \\
y_* &= \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}{l},
\end{aligned}
$$

kjer je l dolžina loka.

V našem primeru sta zaradi simetrije obe koordinati središča enaki, zato potrebujemo samo x-koordinato središča krožnega loka $f(x) = \sqrt{R^2-x^2}$ na $x \in [0, R]$. Dobimo jo po formuli

$$
x_* = \frac{\int_0^R x\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx}{l}.
$$

Dolžina krožnega loka je $l = \frac{\pi R}{2}$, integral v števcu pa je enak:

$$\begin{aligned}\int_0^R x\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx &= \int_0^R x\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}\,dx,\\ &= R\int_0^R \frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx; \qquad R^2-x^2=t,\\ &= -\frac{R}{2}\int_{R^2}^0 \frac{dt}{\sqrt{t}},\\ &= -R\cdot t^{1/2}\Big|_{R^2}^0,\\ &= R^2.\end{aligned}$$

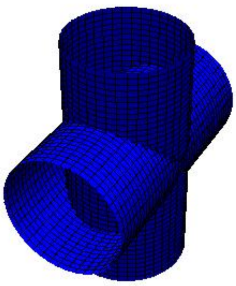
Od tod sledi, da za središče krožnega loka velja $x_* = \frac{2R}{\pi}$, iz Guldinovega pravila pa sledi

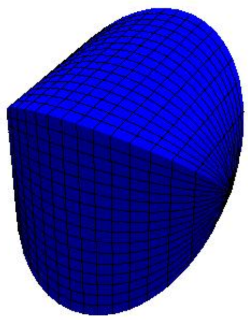
$$P = 2\pi\left(\sqrt{2}\frac{2R}{\pi} - \frac{\sqrt{2}}{2}R\right)\frac{\pi R}{2} = \underline{\underline{2\sqrt{2}\pi R^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}}.$$

□

(9) Izračunaj volumen telesa, ki ga dobimo kot presek dveh središčno in pravokotno sekajočih se valjev enakih polmerov.

Rešitev: Poglejmo si primer, ko imata oba valja polmer R in ko ima eden izmed njiju os v smeri osi y, drugi pa v smeri osi z.





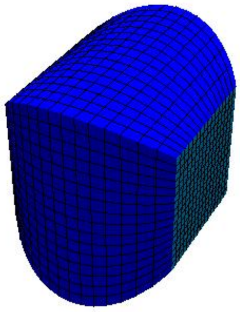
V tem primeru naše telo ni dobljeno z vrtenjem nekega lika, zato moramo za izračun volumna ubrati drugačno pot. Telo lahko predstavimo kot množico točk

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2\le R^2,\ x^2+z^2\le R^2\}.$$

Če presekamo telo z ravnino $x = x_0$, dobimo kot presek kvadrat

$$\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 \,|\, y^2\le R^2-x_0^2,\ z^2\le R^2-x_0^2\},$$

katerega ploščina je enaka $S(x_0) = 4(R^2-x_0^2)$.



Volumen bomo sedaj izračunali tako, da bomo telo najprej razdelili na kvadre, ki jih dobimo z odebelitvijo takšnih presekov, in nato sešteli vsote njihovih volumnov s pomočjo Riemannovega integrala. Velja

$$dV = 4(R^2 - x^2)dx$$

in

$$V = \int_{-R}^{R} dV = 4\int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)\,dx = 4\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R} = \underline{\underline{\frac{16}{3}R^3}}.$$

□

Taylorjeva vrsta

(1) Izračunaj Taylorjeve polinome:

(a) reda 2 funkcije $f(x) = x\ln^2 x$ okoli točke $a = 1$,

(b) reda 4 funkcije $p(x) = x^4 + x^2 + 1$ okoli točke $a = -1$,

(c) reda 2 funkcije $E(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ okoli točke $a = 0$.

Rešitev: Pogosto znamo natančno izračunati vrednosti funkcije f in njenih odvodov v neki točki $x = a$, v točkah blizu a pa ne. Za približen izračun vrednosti funkcije v okolici točke a si pomagamo s Taylorjevimi polinomi. Poljubno n-krat odvedljivo funkcijo f lahko v okolici točke $x = a$ aproksimiramo s Taylorjevim polinomom reda n

$$T_n\,f(x;a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Red Taylorjevega polinoma izberemo tako, da dobimo željeno natančnost aproksimacije. Pri višanju reda dobimo čedalje boljše aproksimacije $f(x) \approx T_n\,f(x;a)$ za x blizu a. V posebnem primeru, ko je f polinom stopnje n, Taylorjev polinom $T_n\,f$ sovpada z f.

(a) Za funkcijo $f(x) = x\ln^2 x$ velja:

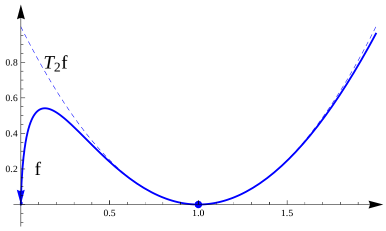
$$f'(x) = \ln^2 x + 2\ln x,$$

$$f''(x) = \frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{x}.$$

Od tod dobimo $f(1) = f'(1) = 0$ in $f''(1) = 2$, kar nam da

$$T_2 f(x; 1) = (x-1)^2.$$

Kot vidimo na sliki, Taylorjev polinom $T_2 f$ precej dobro aproksimira funkcijo f v okolici stacionarne točke $x = 1$.



(b) Izračunajmo sedaj Taylorjev polinom reda 4 polinoma p v okolici točke $a = -1$. Pri tem bomo dobili ravno razvoj polinoma p po potencah polinoma $x + 1$. Velja:

$$\begin{aligned} p'(x) &= 4x^3 + 2x, \\ p''(x) &= 12x^2 + 2, \\ p'''(x) &= 24x, \\ p''''(x) &= 24. \end{aligned}$$

Od tod dobimo $p(-1) = 3$, $p'(-1) = -6$, $p''(-1) = 14$, $p'''(-1) = -24$ in $p''''(-1) = 24$, kar nam da

$$T_4 p(x; -1) = 3 - 6(x+1) + 7(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + (x+1)^4.$$

Ker je p polinom stopnje 4, je $p(x) = T_4 p(x; -1)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

(c) Izraz $E(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ predstavlja polno energijo relativističnega delca z maso m in s hitrostjo v. Odvoda funkcije E sta:

$$\begin{aligned} E'(v) &= mc^2 \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{2v}{c^2}\right) = mv\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}, \\ E''(v) &= m\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} + mv\left(-\frac{3}{2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{5}{2}}\left(-\frac{2v}{c^2}\right). \end{aligned}$$

Sledi $E(0) = mc^2$, $E'(0) = 0$ in $E''(0) = m$, od koder dobimo aproksimacijo

$$E(v) \approx mc^2 + \tfrac{1}{2}mv^2.$$

Pri majhnih hitrostih je torej polna energija delca približno enaka vsoti mirovne energije mc^2 in pa nerelativistične kinetične energije $\frac{1}{2}mv^2$.

Opomba: Taylorjev polinom $T_n f$, ki ga dobimo pri aproksimaciji funkcije f v okolici točke $x = a$, ima lastnost, da je

$$(T_n f)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad \text{za vse } 0 \leq k \leq n.$$

V posebnem primeru je $T_1 f$ linearna funkcija, katere graf je tangenta na graf funkcije f v točki $x = a$. Polinomi $T_n f$ so torej posplošitev pojma tangente. Rečemo, da imata funkciji f in $T_n f$ *kontakt reda n* v točki $x = a$. $\square$

(2) (a) Kakšno napako naredimo pri aproksimaciji $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$, če je $|x| < \frac{1}{2}$?
(b) Kateri Taylorjev polinom moramo vzeti, da bo napaka manjša od 0.001?

Rešitev: (a) Poljubno n-krat odvedljivo funkcijo f lahko zapišemo kot vsoto

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + R_n(x) = T_n\, f(x;a) + R_n(x).$$

Pri tem smo z R_n označili ostanek oziroma napako pri aproksimaciji funkcije f v okolici točke $x = a$ s Taylorjevim polinomom reda n. Taylorjev izrek nam pove, da lahko ostanek $R_n(x)$ zapišemo v obliki

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

za nek ζ na intervalu med a in x. Od tod dobimo grobo oceno za velikost napake pri aproksimaciji

$$|R_n(x)| \leq \max_{\zeta \in I(a,x)} |f^{(n+1)}(\zeta)| \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!},$$

kjer je $I(a,x) \in \{[a,x],[x,a]\}$.

Vzemimo sedaj $f(x) = \cos x$. Potem je $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$ in zato

$$T_2\,(x;0) = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Sedaj bi radi ocenili napako pri aproksimaciji funkcije cos v okolici $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ točke $x = 0$ s Taylorjevim polinomom reda 2. Ker je $f'''(x) = \sin x$, je

$$|R_2(x)| = \left| \frac{\sin(\zeta)}{3!} x^3 \right| \leq \sin \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{6} \leq \frac{1}{96}.$$

Pri tem smo uporabili oceno $\sin x \leq x$, ki velja za vse $x \geq 0$.

Opomba: Taylorjev izrek nam zagotavlja, da bo napaka pri aproksimaciji manjša od $\frac{1}{96} \approx 0.01$. Vendar pa je to samo ocena za zgornjo mejo napake. V našem primeru je za $|x| < \frac{1}{2}$ napaka pri aproksimaciji $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ manjša od 0.0026. Vidimo torej, da je lahko dejanska napaka precej manjša od ocene, ki jo dobimo s Taylorjevim izrekom.

(b) Odvode funkcije $f(x) = \cos x$ lahko strnemo v naslednjem kompaktnem zapisu:

$$\begin{aligned} f^{(4n)}(x) &= \cos x, \\ f^{(4n+1)}(x) &= -\sin x, \\ f^{(4n+2)}(x) &= -\cos x, \\ f^{(4n+3)}(x) &= \sin x. \end{aligned}$$

Od tod dobimo naslednje Taylorjeve polinome glede na točko $x = 0$

$$T_{2n}\, f(x;0) = T_{2n+1}\, f(x;0) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Ocenimo

$$|R_{2n}(x)| \leq \sin \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}}{(2n+1)!}.$$

Sedaj iščemo takšen n, da bo veljalo

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}}{(2n+1)!} \leq 0.001.$$

Za $n = 1$ že vemo, da ne zadošča. Je pa dober $n = 2$, saj je

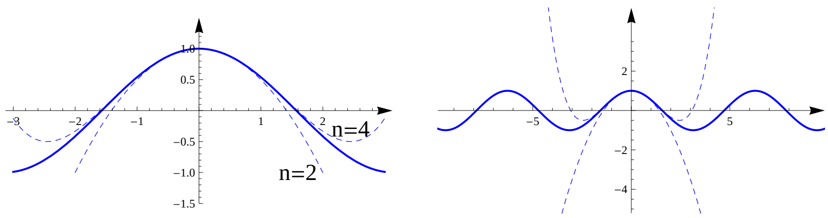
$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{6}}{5!} = \frac{1}{7680} < 0.001.$$

Polinom

$$T_4\, f(x;0) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$$

torej aproksimira funkcijo cos na intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ na vsaj 0.001 natančno. Dejanska napaka je v tem primeru manjša od 0.000022.

Poglejmo še skico. Vidimo, da funkcij cos, T_2 cos in T_4 cos praktično ne moremo razločiti na intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Sta pa ti aproksimaciji pri večjih vrednostih čedalje slabši, saj sta polinoma neomejena, kosinus pa omejen.



$\square$

(3) Izračunaj limite s pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[2n]{x^{2n} + x^{2n-1}} - \sqrt[2n]{x^{2n} - x^{2n-1}} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$

Rešitev: S Taylorjevim izrekom lahko ocenimo napako pri aproksimaciji s Taylorjevim polinomom. Pogosto pa nas ne zanima točna vrednost napake, ampak samo velikostni red napake. Pri tem uporabljamo notacijo

$$\mathrm{o}(x^n)\ldots \text{funkcija (oziroma razred funkcij), za katero je } \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{o}(x^n)}{x^n} = 0.$$

Natančna definicija funkcije, ki jo označimo z $\mathrm{o}(x^n)$ nas ne zanima. Vemo pa, da je v majhni okolici točke $x = 0$ funkcija $\mathrm{o}(x^n)$ po absolutni vrednosti precej manjša od $|x|^n$. Tako je npr.

$$x^3, x^4 \in \mathrm{o}(x^2),$$

vendar pa

$$x, x^2 \notin \mathrm{o}(x^2),$$

V primerih, ki bodo zanimivi za nas, si lahko mislimo, da je

$$\mathrm{o}(x^n) = x^n g(x),$$

kjer je g neka zvezna funkcija, za katero je $g(0) = 0$. Analogno lahko definiramo tudi $\mathrm{o}((x-a)^n)$. Taylorjev izrek za razvoj funkcije f v okolici točke $x = a$ lahko sedaj zapišemo v obliki

$$f(x) = T_n f(x; a) + \mathrm{o}((x-a)^n).$$

(a) Pri tej limiti bomo uporabili Taylorjevi aproksimaciji $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \mathrm{o}(x^5)$ in $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \mathrm{o}(x^5)$. Računajmo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \mathrm{o}(x^5) - 1}{1 - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \mathrm{o}(x^5))}, \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \frac{x^4}{2} + \mathrm{o}(x^5)}{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} - \mathrm{o}(x^5)}, \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{\mathrm{o}(x^5)}{x^2}}{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} - \frac{\mathrm{o}(x^5)}{x^2}}, \\
&= 2.
\end{aligned}$$

(b) Uvedimo najprej novo spremenljivko $x = \frac{1}{t}$, da dobimo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[2n]{x^{2n} + x^{2n-1}} - \sqrt[2n]{x^{2n} - x^{2n-1}} \right) &= \lim_{x\to\infty} \left(x \sqrt[2n]{1 + \frac{1}{x}} - x \sqrt[2n]{1 - \frac{1}{x}} \right), \\
&= \lim_{t\to 0+} \frac{\sqrt[2n]{1+t} - \sqrt[2n]{1-t}}{t}.
\end{aligned}$$

Če označimo $f(t) = \sqrt[2n]{1+t} - \sqrt[2n]{1-t}$ in nato f razvijemo okoli $t = 0$ do prvega reda, dobimo

$$f(t) = \frac{1}{n} t + \mathrm{o}(t).$$

Sledi

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[2n]{x^{2n} + x^{2n-1}} - \sqrt[2n]{x^{2n} - x^{2n-1}} \right) = \lim_{t\to 0+} \frac{\frac{1}{n} t + \mathrm{o}(t)}{t} = \frac{1}{n}.$$

□

(4) Izračunaj konvergenčni polmer in območje konvergence naslednjih potenčnih vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n n}$.

Rešitev: Funkcijska vrsta oblike

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

se imenuje *potenčna vrsta* s središčem v a. Za vsako potenčno vrsto obstaja število $R \geq 0$, ki mu rečemo *konvergenčni polmer* vrste, da velja:

(a) Vrsta konvergira za $x \in (a-R, a+R)$, divergira za $|x-a| > R$, v točkah $|x-a| = R$ pa lahko ali konvergira ali pa divergira.

(b) Vrsta konvergira absolutno in enakomerno na $[a-r, a+r]$ za vsak $r \in R$.

(c) Vsota vrste je analitična funkcija na $(a-R, a+R)$. Če vrsta konvergira v kakšnem izmed krajišč, je tudi tam zvezna po Abelovem izreku.

Konvergenčni polmer potenčne vrste lahko izračunamo s pomočjo naslednjih formul:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$
$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$
$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$:

V tem primeru imamo potenčno vrsto s središčem v točki $a = 0$ in s koeficienti $a_n = n+1$. Sledi

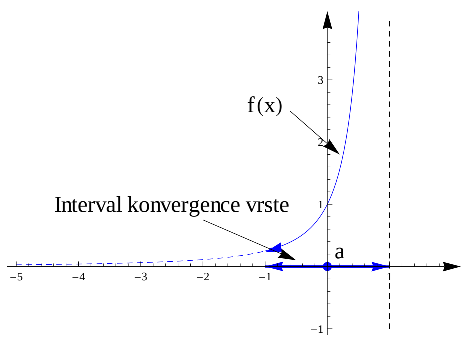
$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1.$$

Vrsta torej konvergira na intervalu $I = (-1, 1)$. Poglejmo še robni točki:

$\cdot\ x = -1 \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1) \Rightarrow$ vrsta divergira pri $x = -1$,

$\cdot\ x = 1 \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) = \infty \Rightarrow$ vrsta divergira pri $x = 1$.

Opomba: Od tod sklepamo, da vsota vrste določa zvezno funkcijo na intervalu $(-1, 1)$. Da se pokazati, da vrsta na intervalu $(-1, 1)$ konvergira k funkciji $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. V tem smislu je funkcija $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ razširitev vsote potenčne vrste na interval $(-1, 1)$, dana potenčna vrsta pa predstavlja razvoj te funkcije v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 0$.



(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$:

Sedaj imamo potenčno vrsto s središčem v koordinatnem izhodišču in s koeficienti $a_n = \frac{1}{n^n}$. Sledi

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

V tem primeru je konvergenčni polmer vrste enak $R = \infty$, kar pomeni, da vrsta konvergira za vsa realna števila. Funkcijam, ki so enake vsoti kakšne potenčne vrste na celi realni osi, rečemo *cele* funkcije. Najbolj znani primeri takšnih funkcij so polinomi, eksponentne funkcije in pa sinus ter kosinus.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n n}$:

V tem primeru imamo opravka s potenčno vrsto, ki ima neskončno ničelnih koeficientov. Velja namreč $a_{2n} = \frac{1}{4^n n}$ in $a_{2n+1} = 0$. V takšnih primerih moramo ponavadi za izračun konvergenčnega polmera uporabiti bolj splošno formulo

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{4^n n}} = \frac{1}{2} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{n}} = \frac{1}{2}.$$

Vidimo, da vrsta konvergira na intervalu $I = (-2, 2)$. V robnih točkah pa velja:

$$x = \pm 2 \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 2)^{2n}}{4^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \Rightarrow \text{vrsta divergira pri } x = \pm 2.$$

$\square$