Matematika 1
Rešitve 3. sklopa nalog

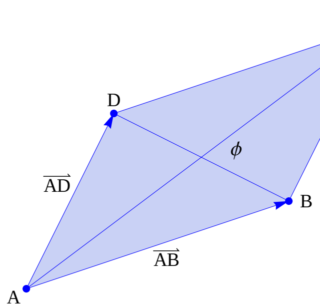
Vektorski prostor $\mathbb{R}^3$

(1) Dan je paralelogram z oglišči $A(-3,-2,0)$, $B(3,-3,1)$, $C(5,0,2)$ in $D(-1,1,1)$.

(a) Izračunaj dolžino stranic paralelograma in kot med njegovima diagonalama.

(b) Izračunaj ploščino paralelograma $ABCD$.

Rešitev: (a) Dolžine stranic paralelograma lahko izračunamo tako, da najprej izračunamo ustrezne vektorje, nato pa še njihovo dolžino (slika je simbolna).



Stranici paralelograma sta določeni z vektorjema $\overrightarrow{AB}=(6,-1,1)$ in $\overrightarrow{AD}=(2,3,1)$, zato je

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}} = \sqrt{36+1+1} = \sqrt{38},$$
$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}.$$

Kot med premicama je po definiciji ostri kot med njunima smernima vektorjema. Smeri obeh diagonal sta določeni z vektorjema $\overrightarrow{AC}=(8,2,2)$ in $\overrightarrow{BD}=(-4,4,0)$, od koder s pomočjo skalarnega produkta lahko izračunamo, da velja

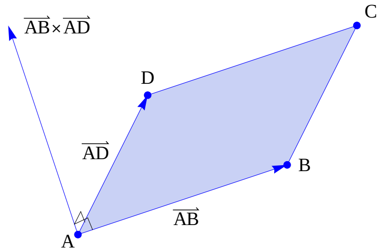
$$\cos\phi = \frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|} = \frac{|-32+8|}{\sqrt{64+4+4}\cdot\sqrt{16+16}} = \frac{24}{\sqrt{72\cdot 32}} = \frac{1}{2}.$$

To pomeni, da je $\phi = 60°$.

(b) Izračunajmo najprej vektorski produkt

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i}+2\vec{j}+18\vec{k}-(3\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}) = (-4,-4,20).$$

Ploščino paralelograma $ABCD$ lahko potem izračunamo s pomočjo vektorskega produkta na naslednji način. Vektorski produkt vektorjev $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AD}$ kaže v smer normale na ravnino paralelograma, njegova dolžina pa je enaka ploščini paralelograma, ki ga napenjata ta dva vektorja.



Od tod dobimo

$$S = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = |(-4,-4,20)| = \sqrt{16+16+400} = 12\sqrt{3}.$$

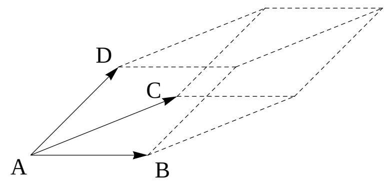
□

(2) Dane so točke $A(1,1,2)$, $B(1,4,-1)$, $C(3,3,2)$ in $D(4,-1,4)$.

(a) Izračunaj prostornino paralelepipeda, ki je napet na vektorje $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{AD}$.

(b) Izračunaj prostornino piramide $ABCD$.

Rešitev: (a) Paralelepiped je štiristrana poševna prizma, katere osnovna ploskev ima obliko paralelograma.



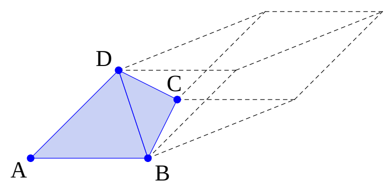
Najprej izračunajmo stranice paralelepipeda:

$$\overrightarrow{AB} = (0,3,-3),$$
$$\overrightarrow{AC} = (2,2,0),$$
$$\overrightarrow{AD} = (3,-2,2).$$

Prostornina danega paralelepipeda je potem enaka mešanemu produktu

$$V = \left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 12 - (-18 + 0 + 12) = 18.$$

(b) Prostornina piramide je enaka šestini prostornine paralepipeda, torej je $V_{ABCD} = 3$.



□

(3) Izračunaj presečišči:

(a) premic $p : \vec{r} = (1,2,0) + t(1,1,1)$ in $q : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{3} = 1 - z$,

(b) ravnin $\Pi : 2x + 3y - z + 1 = 0$ in $\Sigma : x - y + z - 8 = 0$.

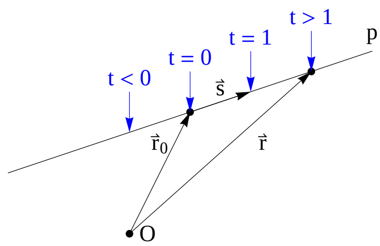
Rešitev: (a) Premica p v prostoru je podana s točko $\vec{r_0}$ na njej in z neničelnim smernim vektorjem $\vec{s} \in \mathbb{R}^3$, ali pa z dvema točkama na njej. Premico lahko parametriziramo s predpisom

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{s},$$

pri čemer je t parameter, ki določa, kje na premici smo, lahko pa jo podamo tudi v obliki sistema enačb

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma},$$

če uporabimo oznake $\vec{r} = (x,y,z)$, $\vec{r_0} = (x_0,y_0,z_0)$ in $\vec{s} = (\alpha,\beta,\gamma)$.



Iz podatkov preberemo, da leži na premici p točka $\vec{r_p} = (1,2,0)$ in da ima premica p smer $\vec{s_p} = (1,1,1)$, medtem, ko leži na premici q točka $\vec{r_q} = (2,3,1)$, njena smer pa je $\vec{s_q} = (2,3,-1)$.

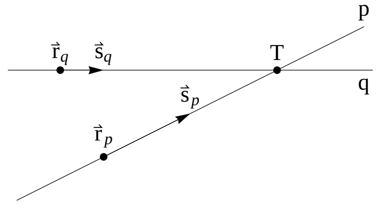
Enačbi obeh premic lahko zapišemo po komponentah kot

$$\begin{aligned} x &= 1 + t, \\ y &= 2 + t, \\ z &= t, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x &= 2 + 2s, \\ y &= 3 + 3s, \\ z &= 1 - s. \end{aligned}$$

Če komponente paroma izenačimo, dobimo sistem treh enačb za dve neznanki

$$\begin{aligned} 1 + t &= 2 + 2s, \\ 2 + t &= 3 + 3s, \\ t &= 1 - s, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $s = 0$, $t = 1$. Presečišče premic p in q je torej točka $T(2,3,1)$.



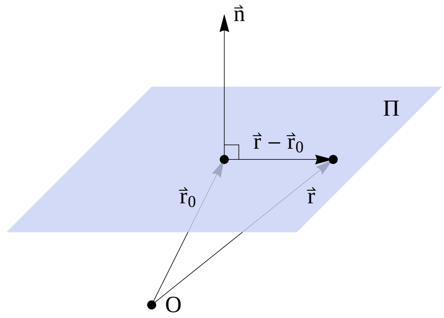
(b) Ravnina Π v prostoru je določena s točko na njej in z normalnim vektorjem, s premico in točko, ki ne leži na premici, ali pa s tremi nekolinearnimi točkami. Če ima ravnina za normalo vektor $\vec{n} \neq \vec{0}$, na njej pa leži točka s krajevnim vektorjem $\vec{r}_0$, lahko zapišemo enačbo ravnine v obliki

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0.$$

Če označimo $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ in $\vec{n} = (a, b, c)$, lahko enačbo ravnine napišemo v *standardni* oziroma *normalni* obliki

$$ax + by + cz = d,$$

kjer je $d = ax_0 + by_0 + cz_0$.

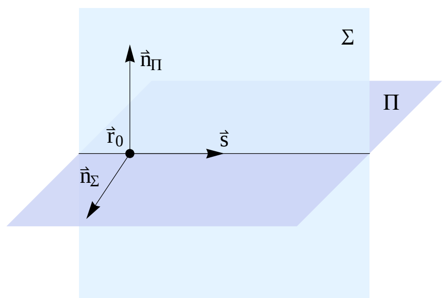


Ravnini imata normalna vektorja $\vec{n}_\Pi = (2, 3, -1)$ in $\vec{n}_\Sigma = (1, -1, 1)$, kar pomeni, da nista vzporedni. V takšnem primeru je njun presek premica s smerjo $\vec{s} = \vec{n}_\Pi \times \vec{n}_\Sigma$, za izhodiščno točko pa lahko izberemo poljubno točko, ki leži na obeh ravninah. Sledi:

$$\vec{s} = \vec{n}_\Pi \times \vec{n}_\Sigma = (2, 3, -1) \times (1, -1, 1) = (2, -3, -5).$$

Za točko na premici pa lahko na primer izberemo točko $\vec{r}_0 = (1, 2, 9)$. Torej je presek obeh ravnin premica

$$\vec{r} = (1, 2, 9) + t(2, -3, -5).$$



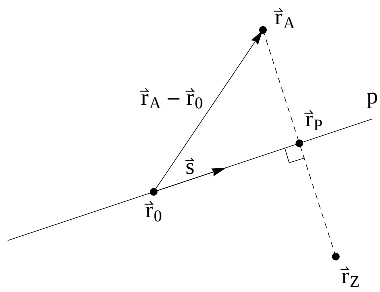
$\square$

(4) Dani sta točka $A(7, 1, 3)$ in premica $p : \vec{r} = (3, -1, 0) + t(1, 1, 2)$.

(a) Poišči pravokotno projekcijo točke A na premico p.

(b) Poišči zrcalno sliko točke A glede na premico p.

Rešitev: (a) Poglejmo si najprej skico.



Pravokotno projekcijo točke A na premico p lahko izračunamo po formuli

$$\vec{r}_P = \vec{r}_0 + ((\vec{r}_A - \vec{r}_0) \cdot \vec{s}) \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|^2}$$

V našem primeru je $\vec{s} = (1,1,2)$ in $|\vec{s}|^2 = 6$. Od tod dobimo

$$\vec{r}_P = (3,-1,0) + \big((4,2,3) \cdot (1,1,2)\big)\frac{\vec{s}}{6} = (5,1,4).$$

(b) Zrcalna slika točke A glede na premico p pa je

$$\vec{r}_Z = \vec{r}_A + 2(\vec{r}_P - \vec{r}_A) = 2\vec{r}_P - \vec{r}_A = (10,2,8) - (7,1,3) = (3,1,5).$$

□

(5) Naj bo p premica z enačbo $\vec{r} = (4,5,1) + t(3,3,0)$, premica q pa naj bo določena kot presečišče ravnin

$$\Pi : 2x + 3y - 5z = 3,$$
$$\Sigma : 3x - 4y + z = -4.$$

Izračunaj enačbo premice, ki jo dobimo, če premico p prezrcalimo preko premice q v ravnini, ki jo določata premici p in q.

Rešitev: Najprej izračunajmo enačbo premice q. Smerni vektor kaže v smeri vektorskega produkta normal ravnin Π in Σ:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (2,3,-5) \times (3,-4,1) = (-17,-17,-17).$$

Zaradi enostavnosti vzemimo vzporedni vektor $\vec{s} = (1,1,1)$. Najti moramo še točko na premici q. Če fiksiramo $x = 1$, dobimo sistem enačb $3y - 5z = 1$ in $-4y + z = -7$, ki ima rešitev $y = 2$ in $z = 1$. Enačba premice q je torej

$$\vec{r} = (1,2,1) + s(1,1,1).$$

Presečišče premic p in q je določeno s sistemom enačb

$$\begin{aligned} 4 + 3t &= 1 + s, \\ 5 + 3t &= 2 + s, \\ 1 &= 1 + s. \end{aligned}$$

Ta sistem ima rešitev $s = 0$ in $t = -1$, kar pomeni, da se premici p in q sekata v točki $T(1,2,1)$. Zrcalno sliko premice p glede na premico q dobimo tako, da najprej prezrcalimo neko točko A na premici p preko premice q v točko A' in nato potegnemo premico skozi točki T in A'. Izberimo točko $A(4,5,1)$. Pravokotna projekcija točke A na premico q je

$$\vec{r}_P = \vec{r}_T + ((\vec{r}_A - \vec{r}_T)\cdot\vec{s})\,\frac{\vec{s}}{|\vec{s}|^2} = (1,2,1) + ((3,3,0)\cdot(1,1,1))\,\frac{\vec{s}}{3} = (3,4,3).$$

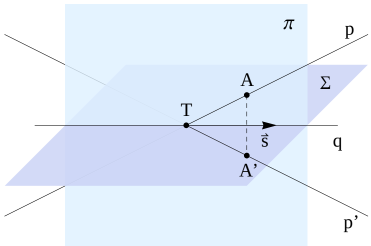
Zrcalna slika točke A glede na premico q pa je

$$\vec{r}_{A'} = \vec{r}_A + 2(\vec{r}_P - \vec{r}_A) = 2\vec{r}_P - \vec{r}_A = (2,3,5).$$

Enačba zrcalne slike premice p je tako enaka

$$\vec{r} = (1,2,1) + u(1,1,4).$$

Poglejmo še sliko.



□

(6) Dana je vektorska enačba $(\vec{a}\cdot\vec{x})(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\times\vec{x}$.

(a) Reši enačbo v primeru, ko je $\vec{a} = \vec{i}$ in $\vec{b} = \vec{j}$.

(b) Kaj geometrijsko predstavlja rešitev dane enačbe, če sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ poljubna linearno neodvisna vektorja?

Rešitev: (a) Pišimo $\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Potem je

$$\begin{aligned} \vec{i}\cdot\vec{x} &= x,\\ \vec{i}\times\vec{j} &= \vec{k},\\ \vec{i}\times\vec{x} &= -z\vec{j} + y\vec{k}. \end{aligned}$$

Z uporabo teh enakosti se enačba poenostavi v vektorsko enačbo

$$x\vec{k} = -z\vec{j} + y\vec{k}.$$

Ker sta vektorja $\vec{j}$ in $\vec{k}$ linearno neodvisna, od tod dobimo sistem dveh skalarnih enačb

$$\begin{aligned} x &= y,\\ z &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je premica v ravnini $z = 0$, ki se ujema s simetralo lihih kvadrantov.

(b) Naj bosta sedaj $\vec{a}$ in $\vec{b}$ poljubna linearno neodvisna vektorja. Potem tvori trojica $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}\}$ bazo prostora $\mathbb{R}^3$, kar nam omogoča, da lahko zapišemo

$$\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma(\vec{a}\times\vec{b}),$$

za enolično določene α, β in γ. Sedaj velja

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{x} &= \vec{a}\cdot(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma(\vec{a}\times\vec{b})) = \alpha|\vec{a}|^2+\beta\vec{a}\cdot\vec{b},\\ \vec{a}\times\vec{x} &= \vec{a}\times(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma(\vec{a}\times\vec{b})) = \beta(\vec{a}\times\vec{b})+\gamma\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b}).\end{aligned}$$

Z uporabo teh enakosti lahko prvotno enačbo prepišemo v obliko

$$(\alpha|\vec{a}|^2+\beta\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}\times\vec{b} = \beta(\vec{a}\times\vec{b})+\gamma(\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b}))$$

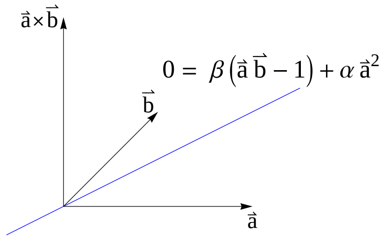
oziroma

$$(\alpha|\vec{a}|^2+\beta\vec{a}\cdot\vec{b}-\beta)\vec{a}\times\vec{b} = \gamma(\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})).$$

Vektorja $\vec{a}\times\vec{b}$ in $\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})$ sta oba neničelna in pravokotna, zato sta linearno neodvisna. Od tod sledi

$$\begin{aligned}\alpha|\vec{a}|^2+\beta(\vec{a}\cdot\vec{b}-1) &= 0,\\ \gamma &= 0.\end{aligned}$$

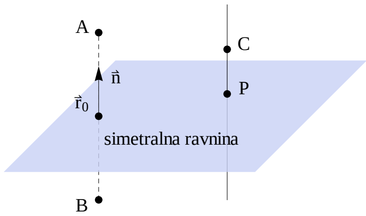
Rešitev je premica v ravnini, ki jo napenjata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, z enačbo $|\vec{a}|^2\alpha+(\vec{a}\cdot\vec{b}-1)\beta = 0$. Pri tem sta α in β koordinati na tej ravnini.



□

(7) Dane so točke $A(3,4,1)$, $B(-1,0,5)$ in $C(6,5,-4)$. Med točkami, ki so enako oddaljene od A in B, poišči tisto, ki je najbližje C.

Rešitev: Točke, ki so enako oddaljene od točk A in B, tvorijo simetralno ravnino. Ta ravnina vsebuje točko $\vec{r}_0 = (1,2,3)$, ki je razpolovišče daljice AB, njena normala pa ima smer $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (-4,-4,4)$.



Normalna oblika enačbe te ravnine je

$$\begin{aligned}(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n} &= 0,\\ (x-1,y-2,z-3)\cdot(-4,-4,4) &= 0,\\ -4x+4-4y+8+4z-12 &= 0,\\ -x-y+z &= 0.\end{aligned}$$

Točka na simetralni ravnini, ki je najbliže C, je kar projekcija točke C na simetralno ravnino. Le-to lahko poiščemo kot presek simetralne ravnine in pa premice skozi C, ki je pravokotna na ravnino. Ta premica ima parametrično enačbo

$$\vec{r} = (6, 5, -4) + t(-4, -4, 4),$$

oziroma $x = 6 - 4t$, $y = 5 - 4t$ in $z = -4 + 4t$. Če to vstavimo v enačbo simetralne ravnine, dobimo

$$\begin{aligned} -x - y + z &= 0, \\ -(6 - 4t) - (5 - 4t) + (-4 + 4t) &= 0, \\ t &= \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

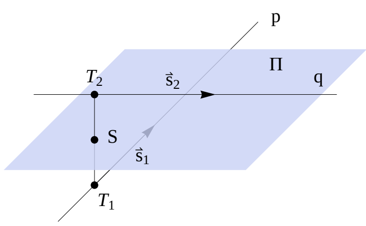
Iskana točka je torej $P(1, 0, 1)$. □

(8) Dani sta premici p in q z enačbama $\vec{r} = (-1, 2, 1) + t(-2, 2, -1)$ ter $\frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z-6}{-2}$. Izračunaj normalno enačbo ravnine π, ki je enako oddaljena od premic p in q in nobene izmed njiju ne seka.

Rešitev: Če hočemo, da ravnina π ne seka premic p in q, mora biti vzporedna obema premicama. Zato kaže njen normalni vektor v smeri vektorskega produkta smeri obeh premic:

$$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = (-2, 2, -1) \times (2, 1, -2) = (-3, -6, -6).$$

Zaradi preprostosti vzemimo normalni vektor $\vec{n} = (1, 2, 2)$. Za zapis enačbe ravnine potrebujemo še točko na ravnini, ki jo lahko najdemo na naslednji način. Razdalja ravnine π od premic p in q je enaka kot razdalja ravnine π od njej vzporednih ravnin, ki vsebujeta premici p oziroma q. Če torej vzamemo dve točki iz teh dveh vzporednih ravnin, bo njuno razpolovišče ležalo v ravnini π.



Vzemimo na primer točki $T_1(-1, 2, 1)$ in $T_2(0, 1, 6)$. Njuno razpolovišče je potem točka $S(-1/2, 3/2, 7/2)$, od koder dobimo:

$$\begin{aligned} (\vec{r} - \vec{r}_S) \cdot \vec{n} &= 0, \\ (x + 1/2, y - 3/2, z - 7/2) \cdot (1, 2, 2) &= 0, \\ x + 1/2 + 2y - 3 + 2z - 7 &= 0. \end{aligned}$$

Normalna enačba ravnine π je torej

$$2x + 4y + 4z = 19.$$

□