

Matematika 1

5. sklop nalog

Vrste

(1) Razišči konvergenco vrst:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$.

(2) Razišči konvergenco vrst s pomočjo primerjalnega kriterija:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n}$.

(3) Razišči konvergenco vrst s pomočjo kvocientnega kriterija:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 2^{1-n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n (2n)!}{(3n)!}$.

(4) Razišči konvergenco vrst s pomočjo korenskega kriterija:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n+2} \right)^{n(n+1)}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2 + \frac{1}{n})^n}$.

(5) Razišči konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}$ za $a > 0$.

(6) Ugotovi, ali naslednji vrsti konvergirata absolutno oziroma pogojno:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, za $\alpha > 0$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$.

Funkcije ene realne spremenljivke

(1) Hiperbolični tangens je definiran s predpisom $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

- (a) Določi definicijsko območje, zalogo vrednosti in nato skiciraj graf funkcije th .
- (b) Poišči inverz funkcije th .
- (c) Pokaži, da za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$ velja enakost:

$$\operatorname{th}(x + y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}.$$