Matematika 1
Rešitve 5. sklopa nalog

Vrste

(1) Razišči konvergenco vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$.

Rešitev: Številska vrsta je zaporedje števil (a_n), ki ga zapišemo kot formalno vsoto

$$\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Za poljubno vrsto lahko definiramo zaporedje delnih vsot

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

in rečemo, da vrsta $\sum a_n$ konvergira, če konvergira zaporedje njenih delnih vsot. Vsota vrste je definirana s predpisom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (s_n).$$

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$:

Velja

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Od tod sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

Opomba: Za izračun vsote poljubne geometrijske vrste lahko uporabimo formulo

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots = \frac{a}{1-q},$$

ki velja za vse $|q| < 1$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$:

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja enakost

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Torej je

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty}(s_n) = 1.$$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$:

Potreben pogoj za konvergenco vrste je, da konvergirajo njeni členi proti 0. Ker je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = 1,$$

od tod sklepamo, da vrsta $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$ divergira. $\square$

(2) Razišči konvergenco vrst s pomočjo primerjalnega kriterija:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n}$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo uporabili:

Primerjalni kriterij: Naj bosta $\sum a_n$ in $\sum b_n$ vrsti s pozitivnimi členi in naj velja $a_n \leq b_n$ za vse n od nekod dalje.

- Če je vrsta $\sum b_n$ konvergentna, je tudi vrsta $\sum a_n$ konvergentna.
- Če je vrsta $\sum a_n$ divergentna, je tudi vrsta $\sum b_n$ divergentna.

Tipično bomo vrste primerjali z vrstami oblike $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. Pri tem bomo uporabili dejstvo, da vrsta $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ konvergira natanko tedaj, ko je $\alpha > 1$.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$:

Uporabimo oceno

$$\frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n^3}}.$$

Torej je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Ker je $\frac{3}{2} > 1$, vrsta $\sum \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ konvergira, zato po primerjalnem kriteriju sledi, da tudi vrsta $\sum \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ konvergira.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}}$:

Ocenimo

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} < \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}(2\sqrt{n})} = \frac{1}{2\sqrt[6]{n^7}}.$$

Ker vrsta $\sum \frac{1}{2\sqrt[6]{n^7}}$ konvergira ($\frac{7}{6} > 1$), tudi vrsta $\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}}$ konvergira.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n}$:

Uporabili bomo neenakost $\sin x < x$, ki velja za vse $x > 0$. Sledi

$$2^n \sin \frac{1}{3^n} < \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Velja torej $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Geometrijska vrsta na desni konvergira, zato je tudi vrsta $\sum 2^n \sin \frac{1}{3^n}$ konvergentna. $\square$

(3) Razišči konvergenco vrst s pomočjo kvocientnega kriterija:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 2^{1-n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n (2n)!}{(3n)!}$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo uporabili:
Kvocientni kriterij: Naj bo $\sum a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in naj obstaja $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

· Če je $L < 1$, je vrsta konvergentna.
· Če je $L > 1$, je vrsta divergentna.
· Če je $L = 1$, je vrsta ali konvergentna ali divergentna.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 2^{1-n}$:

Računajmo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}2^{-n}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}2^{1-n}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!!(2n)!!}{(2n+2)!!(2n-1)!!} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Ker je $L < 1$, vrsta $\sum \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 2^{1-n}$ konvergira.
Pri računanju limite smo uporabili naslednji enakosti

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n-1)!!} = \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{(2n-1)(2n-3)\cdots 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1} = 2n+1,$$

$$\frac{(2n+2)!!}{(2n)!!} = \frac{(2n+2)2n(2n-2)\cdots 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}{2n(2n-2)\cdots 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} = 2n+2.$$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n(2n)!}{(3n)!}$:

Tokrat imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+2)^{n+1}(2n+2)!}{(3n+3)!}}{\frac{(2n)^n(2n)!}{(3n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = \frac{8e}{27} < 1,$$

kar pomeni, da vrsta $\sum \frac{(2n)^n(2n)!}{(3n)!}$ konvergira. □

(4) Razišči konvergenco vrst s pomočjo korenskega kriterija:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+1)}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo uporabili:
Korenski kriterij: Naj bo $\sum a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in naj obstaja $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

- Če je $L < 1$, je vrsta konvergentna.
- Če je $L > 1$, je vrsta divergentna.
- Če je $L = 1$, je vrsta ali konvergentna ali divergentna.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+1)}$:

Računajmo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{4}{n+2}\right)^{n+1} = e^{-4}.$$

Ker je $e^{-4} < 1$, vrsta $\sum \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+1)}$ konvergira.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$:

Tokrat je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Vrsta $\sum \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$ torej konvergira. Pri tem smo upoštevali, da velja

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1.$$

$\square$

(5) Razišči konvergenco vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$ za $a > 0$.

Rešitev: Z uporabo kvocientnega ali pa korenskega kriterija bi dobili

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1,$$

kar nam nič ne pove o konvergenci vrste. V takšnih primerih nam včasih pomaga:
Raabejev kriterij: Naj bo $\sum a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in naj obstaja

$$L = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

· Če je $L > 1$, je vrsta konvergentna.

· Če je $L < 1$, je vrsta divergentna.

· Če je $L = 1$, je vrsta ali konvergentna ali divergentna.

Računajmo

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{n!}{(a+1)\cdots(a+n)}}{\frac{(n+1)!}{(a+1)\cdots(a+n+1)}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a+n+1}{n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{an}{a+n} = a.$$

Po Raabejevem kriteriju sledi, da je vrsta $\sum \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$ konvergentna za $a > 1$ in divergentna za $a < 1$. Pri $a = 1$ dobimo harmonično vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(1+1)(1+2)\cdots(1+n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n},$$

ki divergira.

Opomba 1: Pri $a = 2$ dobimo konvergentno vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2+1)(2+2)\cdots(2+n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

S primerjalnim kriterijem lahko potem dokažemo, da vrsta $\sum \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$ konvergira za $a \geq 2$, divergira pa za $a \leq 1$. Za $1 < a < 2$ pa je konvergenco vrste težko dokazati brez uporabe Raabejevega kriterija.

Opomba 2: S pomočjo Raabejevega kriterija lahko dokažemo, da vrsta $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ konvergira natanko tedaj, ko je $\alpha > 1$.

Opomba 3: Če izračunamo $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, avtomatično sledi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. $\square$

(6) Ugotovi, ali naslednji vrsti konvergirata absolutno oziroma pogojno:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, za $\alpha > 0$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$.

Rešitev: Za vrsto $\sum a_n$ z ne nujno pozitivnimi členi rečemo, da:

· konvergira absolutno, če konvergira vrsta $\sum |a_n|$,

· konvergira pogojno, če konvergira, a ne konvergira absolutno.

Alternirajoča vrsta je vrsta oblike $\sum (-1)^{n-1} a_n$ ali pa $\sum (-1)^n a_n$, kjer je $a_n \geq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Za alternirajoče vrste lahko pogosto uporabimo:

Leibnizev kriterij: Če absolutne vrednosti

$$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$$

členov alternirajoče vrste monotono padajo proti nič, je vrsta konvergentna.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$:

Vrsta je alternirajoča, zaporedje absolutnih vrednosti členov vrste

$$1, \frac{1}{2^\alpha}, \frac{1}{3^\alpha}, \frac{1}{4^\alpha}, \ldots$$

pa monotono pada proti nič, saj je funkcija $f(x) = x^\alpha$ za $\alpha > 0$ naraščajoča, zvezna na $[0, \infty)$ in $f(0) = 0$. Sklepamo, da je vrsta $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ konvergentna za vsak $\alpha > 0$.

Vemo že, da je vrsta $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ absolutno konvergentna natanko tedaj, ko je $\alpha > 1$. Za $0 < \alpha \leq 1$ je vrsta pogojno konvergentna.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$:

Vrsta je alternirajoča. Zaporedje absolutnih vrednosti členov vrste

$$\operatorname{tg} 1, \operatorname{tg} \frac{1}{2}, \operatorname{tg} \frac{1}{3}, \operatorname{tg} \frac{1}{4}, \ldots$$

monotono pada proti nič, saj je funkcija tg naraščajoča in zvezna na $[0, 1]$ ter $\operatorname{tg}(0) = 0$. Torej je vrsta $\sum (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ konvergentna.

Pokažimo sedaj, da vrsta ne konvergira absolutno. Za $x \in [0, 1]$ velja ocena $\operatorname{tg} x \geq x$, od koder sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Vrsta $\sum (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ je torej pogojno konvergentna. $\square$

Funkcije ene realne spremenljivke

(1) Hiperbolični tangens je definiran s predpisom $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

(a) Določi definicijsko območje, zalogo vrednosti in nato skiciraj graf funkcije th.

(b) Poišči inverz funkcije th.

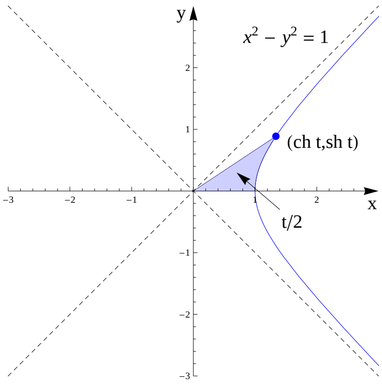
(c) Pokaži, da za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$ velja enakost:

$$\operatorname{th}(x + y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}.$$

Rešitev: (a) Hiperbolični sinus in kosinus sta definirana s predpisoma:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

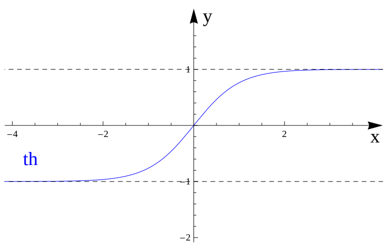
Podobno kot lahko s sinusom in kosinusom parametriziramo krožnico $x^2 + y^2 = 1$, lahko s predpisom $\vec{r}(t) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ parametriziramo desni krak parabole $x^2 - y^2 = 1$. Parameter t pri tem ustreza dvakratniku predznačene ploščine lika, ki ga opišejo zveznice hiperbole s koordinatnim izhodiščem pri parametrih med 0 in t.



Hiperbolični tangens $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ je definiran kot kvocient funkcij sh in ch. Ker je funkcija ch povsod pozitivna, je th definiran na celi realni osi, v točki $x = 0$ pa ima ničlo. Ima vodoravni asimptoti:

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{th} x = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1,$$
$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{th} x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1.$$

S pomočjo odvoda se da pokazati, da povsod narašča. Poglejmo še skico njegovega grafa.



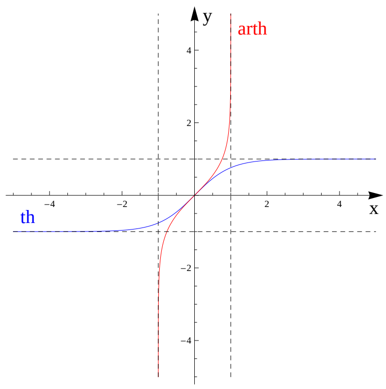
(b) Izračunajmo sedaj inverz funkcije th. Rečemo mu area hiperbolični tangens in ga označimo z arth. Funkcija arth je definirana na intervalu $(-1, 1)$, njen predpis pa dobimo s pomočjo naslednjega računa:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}},\\
e^y(x-1) &= -e^{-y}(x+1),\\
e^{2y} &= \frac{1+x}{1-x},\\
y &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.
\end{aligned}
$$

Od tod dobimo

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

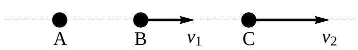
Poglejmo še grafa funkcij th in arth v istem koordinatnem sistemu.



(c) V nadaljevanju bomo izpeljali adicijski izrek za funkcijo th. Za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja:

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y} &= \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}}{1 + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}},\\
&= \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^y - e^{-y})(e^x + e^{-x})}{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})},\\
&= \frac{e^{x+y} - e^{y-x} + e^{x-y} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-x-y}}{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-x-y}},\\
&= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{e^{x+y} + e^{-x-y}},\\
&= \operatorname{th}(x+y).
\end{aligned}
$$

Opomba: Adicijski izrek za funkcijo th je pravzaprav matematična preobleka formule za seštevanje hitrosti v posebni teoriji relativnosti. Denimo, da imamo točke A, B in C ter privzemimo, da se točka B giblje s hitrostjo v_1 glede na točko A, točka C pa s hitrostjo v_2 glede na točko B.



V nerelativistični mehaniki se potem točka C premika glede na točko A s hitrostjo, ki je enaka

$$v = v_1 + v_2.$$

V posebni teoriji relativnosti se ne sešteva hitrosti, ampak parameter ω, ki je definiran s predpisom

$$\operatorname{th}\omega = \frac{v}{c} \Longleftrightarrow \omega = \operatorname{arth}\frac{v}{c}.$$

Iz enakosti $\omega = \omega_1 + \omega_2$ dobimo

$$\operatorname{th}\omega = \operatorname{th}(\omega_1 + \omega_2) = \frac{\operatorname{th}\omega_1 + \operatorname{th}\omega_2}{1 + \operatorname{th}\omega_1 \operatorname{th}\omega_2}.$$

Če sedaj upoštevamo definicijo parametra ω in dobljeno enakost pomnožimo s c, dobimo relativistično formulo za seštevanje hitrosti

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

Formula $v = v_1 + v_2$ je približek te formule, ki je veljaven pri majhnih hitrostih. $\square$