Matematika 1
4. sklop nalog

Zaporedja

(1) Izračunaj limito zaporedja s splošnim členom:

(a) $a_n = \log_2\left(\frac{2n^2+n+1}{(n+1)^2}\right)$,

(b) $a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$,

(c) $a_n = \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$,

(d) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$,

(e) $a_n = \left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{2n+2}$.

(2) Naj bo $a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ korenov}}$ za $n \geq 1$. Izračunaj limito zaporedja (a_n).

(3) Zaporedje je podano z rekurzivnim predpisom $a_{n+1} = \sqrt[3]{7a_n+6}$. Dokaži, da je zaporedje konvergentno ne glede na izbiro začetnega člena $a_0 \in \mathbb{R}$. Limito tudi izračunaj.

(4) Zaporedji sta podani z rekurzivnima predpisoma $a_{n+1} = \frac{a_n^2+b_n^2}{a_n+b_n}$ in $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+b_n)$, kjer je $a_1 > b_1 > 0$.

(a) Pokaži, da je zaporedje (a_n) padajoče, zaporedje (b_n) pa naraščajoče.

(b) Dokaži, da sta obe zaporedji konvergentni in da imata skupno limito.

(5) Izračunaj limito zaporedja s splošnim členom

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

(6) Naj bo (a_n) zaporedje s pozitivnimi členi. Potem velja: Če je konvergentno zaporedje $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, je konvergentno tudi zaporedje $c_n = \sqrt[n]{a_n}$ in je $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(c_n)$.

Izračunaj limite zaporedij z danimi splošnimi členi:

(a) $a_n = \sqrt[n]{n}$,

(b) $a_n = \sqrt[n]{n^2+1}$,

(c) $a_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.