Matematika 1
Rešitve 4. sklopa nalog

Zaporedja

(1) Izračunaj limito zaporedja s splošnim členom:

(a) $a_n = \log_2\left(\dfrac{2n^2+n+1}{(n+1)^2}\right)$,

(b) $a_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$,

(c) $a_n = \dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$,

(d) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$,

(e) $a_n = \left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^{2n+2}$.

Rešitev: Pri računanju limit si bomo pomagali z naslednjimi limitami oziroma s pravili za računanje s konvergentnimi zaporedji:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) \pm \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)}$,

4) $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$ za vsak $c \in \mathbb{R}$,

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha} = 0$ za vsak $\alpha > 0$,

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n = e^r$ za vsak $r \in \mathbb{R}$,

7) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ za vsak $|q| < 1$,

8) $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)$.

Prva štiri pravila veljajo ob predpostavki, da sta (a_n) in (b_n) konvergentni zaporedji, pri pravilu 3) pa zahtevamo še, da so členi zaporedja (b_n) in njegova limita neničelni. Pravilo 8) velja za poljubno zvezno funkcijo in nam pove, da je limita vrednosti zvezne funkcije na nekem zaporedju enaka vrednosti funkcije v limiti zaporedja. To pravilo je zelo uporabno pri računanju limit, dokazali pa ga bomo v razdelku o zveznih funkcijah.

(a)
$$\lim_{n\to\infty}\log_2\left(\frac{2n^2+n+1}{(n+1)^2}\right) = \log_2\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{n^2+2n+1}\right) = \log_2\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\right),$$
$$= \log_2 2 = 1.$$

Pri tej limiti smo uporabili pravilo 8) za zvezno funkcijo $f(x) = \log_2 x$.

(b)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\frac{2}{3})^n+1}{2(\frac{2}{3})^n+3} = \dfrac{1}{3}.$

(d)
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} \cdot \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}, \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}, \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}}, \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^{2n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{3}{n+1}\right)^{2n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(1-\dfrac{3}{n+1}\right)^{n+1}\right)^2 = (e^{-3})^2 = e^{-6}.$

Pri tej limiti smo uporabili pravilo 8) za zvezno funkcijo $f(x) = x^2$. Lahko bi jo izračunali tudi drugače. Opravka imamo z limito oblike

$$\lim_{n\to\infty} f(n)^{g(n)},$$

kjer je $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 1$ in $\lim\limits_{n\to\infty} g(n) = \pm\infty$. S prevedbo na limito $\lim\limits_{n\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ lahko izpeljemo, da v takem primeru velja

$$\lim_{n\to\infty} f(n)^{g(n)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(f(n)-1)g(n)}.$$

V našem primeru tako dobimo

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{2n+2} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}-1\right)(2n+2)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-6n-6}{n+1}} = e^{-6}.$$

□

(2) Naj bo $a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ korenov}}$ za $n \geq 1$. Izračunaj limito zaporedja (a_n).

Rešitev: Pri tej nalogi imamo zaporedje (a_n) sicer podano eksplicitno, a na težko izračunljiv način. Če izračunamo prvih nekaj členov, bi dobili vrednosti (zaokrožene na tri decimalke):

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1.414, \\
a_2 &= 1.848, \\
a_3 &= 1.962, \\
a_4 &= 1.990, \\
a_5 &= 1.998.
\end{aligned}$$

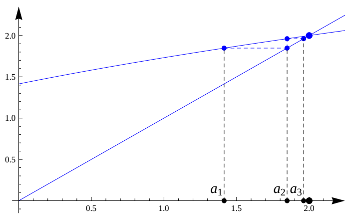
Začetni členi nam dajejo slutiti, da zaporedje (a_n) narašča, vendar še ne vemo točno, ali kam konvergira, ali pa raste v nedogled. Ko računamo člene, lahko opazimo, da jih pravzaprav računamo rekurzivno enega za drugim. To pomeni, da lahko zaporedje (a_n) podamo z rekurzivnim predpisom $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ in z začetnim členom $a_1 = \sqrt{2}$.

Recimo najprej, da je zaporedje (a_n) konvergentno z limito a. Če na rekurzivni zvezi uporabimo limito, dobimo

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{2 + a_n} / \lim_{n\to\infty} \\ a &= \sqrt{2 + a} \\ a^2 &= 2 + a. \end{aligned}$$

Rešitvi te enačbe sta $a \in \{-1, 2\}$. Ker so členi zaporedja (a_n) pozitivni, je $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 2$, če seveda ta limita obstaja. Obstoj limite ponavadi dokažemo tako, da pokažemo, da je zaporedje monotono in omejeno.

Da dobimo občutek, kaj se dogaja s členi zaporedja, si ponavadi pomagamo z naslednjim cik-cak diagramom:



Označimo funkciji $f(x) = x$ in $g(x) = \sqrt{2 + x}$. Začnemo s točko na abscisni osi, ki ustreza začetni vrednosti a_1 in poiščemo pripadajočo točko na grafu funkcije g. Nato izmenično vlečemo vodoravno črto do grafa funkcije f ali pa navpično do grafa funkcije g. Projekcije oglišč te lomljene črte na abscisno os so vrednosti zaporedja (a_n).

Risanje cik-cak črt je v bistvu grafična predstavitev računanja zaporednih členov. Točka na premici $y = x$ nam predstavlja vrednost člena a_n. Ko se dvignemo ali spustimo na ustrezno točko na grafu funkcije g, smo prišli v točko (a_n, a_{n+1}). Če želimo najti točko z absciso a_{n+1}, se moramo torej premakniti levo (desno) do premice $y = x$.

Slika nam da slutiti, da je zaporedje (a_n) naraščajoče in navzgor omejeno z 2. Formalno bomo to domnevo dokazali s pomočjo indukcije. Najprej opazimo, da za $x \in (0, 2)$ velja

$$x < \sqrt{2 + x} < 2.$$

Pokažimo najprej, da je zaporedje navzgor omejeno z 2. Po definiciji je $a_1 = \sqrt{2} < 2$. Denimo sedaj, da je $a_n < 2$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Če v neenakost $\sqrt{2 + x} < 2$ vstavimo $x = a_n$, dobimo $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < 2$.

Pokazati moramo še, da je zaporedje naraščajoče. Ker vsi členi zaporedja (a_n) ležijo na intervalu $(0, 2)$, iz enakosti $x < \sqrt{2 + x}$ sledi $a_n < \sqrt{2 + a_n} = a_{n+1}$.

Zaporedje (a_n) je torej naraščajoče in navzgor omejeno z 2, torej je konvergentno, na začetku pa smo že pokazali, da od tod sledi

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ korenov}} = 2.$$

$\square$

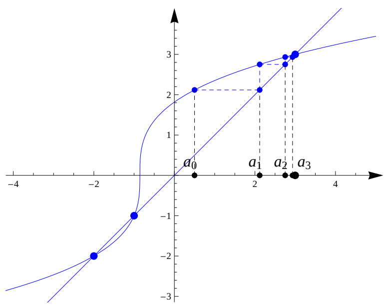
(3) Zaporedje je podano z rekurzivnim predpisom $a_{n+1} = \sqrt[3]{7a_n + 6}$. Dokaži, da je zaporedje konvergentno ne glede na izbiro začetnega člena $a_0 \in \mathbb{R}$. Limito tudi izračunaj.

Rešitev: Recimo najprej, da je zaporedje (a_n) konvergentno z limito a. Potem je:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt[3]{7a_n + 6} / \lim_{n\to\infty} \\ a &= \sqrt[3]{7a + 6} \\ a^3 &= 7a + 6. \end{aligned}$$

Rešitve zgornje kubične enačbe so $a \in \{-2, -1, 3\}$. Ker ima zaporedje realnih števil lahko največ eno limito, smo tako prišli do potencialnega problema. Ni namreč jasno, katero izmed teh treh vrednosti bi vzeli za limito. Izkazalo se bo, da je dejanska vrednost limite odvisna od začetnega člena a_0. Pri različnih izbirah začetnega člena a_0 namreč dobimo različna zaporedja. Iz rekurzivne formule sledi, da so pri začetnih vrednostih $a_0 \in \{-2, -1, 3\}$ zaporedja (a_n) konstantno enaka a_0. Torej so vse tri rešitve kubične enačbe možne limite.

Da dobimo občutek, kaj se dogaja s členi zaporedja pri poljubni začetni vrednosti, si pomagajmo s cik-cak diagramom (narisan je primer $a_0 = \frac{1}{2}$):



Označimo funkciji $f(x) = x$ in $g(x) = \sqrt[3]{7x + 6}$. Z grafa sklepamo, da bo pri začetni vrednosti $a_0 = \frac{1}{2}$ zaporedje konvergiralo k limiti 3. V splošnem pa nam grafična predstavitev omogoča, da postavimo naslednjo hipotezo:

· Če je $a_0 \in (-\infty, -1)$, bo $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = -2$.

· Če je $a_0 = -1$, bo $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = -1$.

· Če je $a_0 \in (-1, \infty)$, bo $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 3$.

Pri dokazu naše domneve se bomo oprli na rezultat s predavanj, ki pravi, da je vsako naraščajoče in navzgor omejeno zaporedje konvergentno. Analogna trditev velja tudi za padajoča navzdol omejena zaporedja.

Najprej opomnimo, da je enačba $x = g(x)$ ekvivalentna polinomski enačbi $x^3 = 7x + 6$, za katero vemo, da ima rešitve $\{-2, -1, 3\}$. Podobno sta neenačbi $x > g(x)$ in $x < g(x)$ ekvivalentni neenačbama $x^3 > 7x + 6$ oziroma $x^3 < 7x + 6$. Od tod sledi

$$\begin{aligned} &x > g(x) \text{ na } (-2, -1) \cup (3, \infty), \\ &x < g(x) \text{ na } (-\infty, -2) \cup (-1, 3). \end{aligned}$$

S to opazko si bomo pomagali pri dokazovanju naše domneve.

Podrobneje si bomo pogledali primer, ko je $a_0 \in (-\infty, -2)$. Radi bi pokazali, da je v tem primeru zaporedje (a_n) naraščajoče in navzgor omejeno z -2. Pri tem si bomo pomagali s principom popolne indukcije. Naj bo $T(n)$ izjava

$$T(n): \qquad a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < -2.$$

Naš cilj je pokazati, da izjava $T(n)$ drži za vsa naravna števila. Izjava $T(0)$ je veljavna, ker je po naši predpostavki $a_0 < -2$.

Predpostavimo sedaj, da velja $T(n)$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Naš cilj je potem pokazati, da je

$$\begin{aligned} a_n &< a_{n+1}, \\ a_{n+1} &< -2. \end{aligned}$$

Ker je po indukcijski predpostavki $a_n < -2$, iz naše opazke sledi, da je $a_n < g(a_n)$ oziroma

$$a_n < a_{n+1}.$$

Ker pa je g naraščajoča funkcija, pa iz $a_n < -2$ sledi tudi $g(a_n) < g(-2) = -2$ oziroma

$$a_{n+1} < -2.$$

Pokazali smo torej, da iz veljavnosti izjave $T(n)$ sledi veljavnost izjave $T(n+1)$. Po principu popolne indukcije od tod sledi, da je zaporedje (a_n) naraščajoče in navzgor omejeno z -2, kar pa pomeni, da je konvergentno. Izmed možnih kandidatov $a \in \{-2, -1, 3\}$ za limito, je možna limita le $a = -2$.

Na podoben način lahko dokažemo tudi naslednje trditve:

· Če je $a_0 \in (-2, -1)$, je zaporedje (a_n) padajoče in $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = -2$.

· Če je $a_0 \in (-1, 3)$, je zaporedje (a_n) naraščajoče in $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 3$.

· Če je $a_0 \in (3, \infty)$, je zaporedje (a_n) padajoče in $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 3$.

Opomba: V zgornjem dokazu smo prišli do polinomske neenačbe $x^3 > 7x + 6$, ki jo rešimo, tako da:

· poiščemo ničle enačbe $x^3 = 7x + 6$,

· z ničlami razdelimo realna števila na nekaj intervalov,

· z izračunom v poljubni točki intervala na vsakem intervalu posebej ugotovimo, ali je neenačba izpolnjena.

Nekaj podobnega velja v splošnem. Če sta f in g zvezni funkciji, za kateri je $f(x) = g(x)$ na neki končni množici točk, lahko neenačbo $f(x) > g(x)$ rešimo z istim postopkom. $\square$

(4) Zaporedji sta podani z rekurzivnima predpisoma $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n}$ in $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, kjer je $a_1 > b_1 > 0$.

(a) Pokaži, da je zaporedje (a_n) padajoče, zaporedje (b_n) pa naraščajoče.

(b) Dokaži, da sta obe zaporedji konvergentni in da imata skupno limito.

Rešitev: (a) Najprej bomo pokazali, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n > b_n$. Po predpostavki je to res za $n = 1$. Denimo sedaj, da za nek $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n > b_n$ in poskusimo pokazati, da od tod sledi $a_{n+1} > b_{n+1}$. Z uporabo rekurzivnega predpisa dobimo:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &> b_{n+1}, \\ \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n} &> \frac{1}{2}\left(a_n + b_n\right), \\ 2(a_n^2 + b_n^2) &> (a_n + b_n)^2, \\ a_n^2 + b_n^2 &> 2a_n b_n, \\ (a_n - b_n)^2 &> 0. \end{aligned}$$

Od tod bo sedaj sledilo, da je zaporedje (a_n) padajoče, zaporedje (b_n) pa naraščajoče.

Zaporedje (a_n) je padajoče:

Iz rekurzivnega predpisa sledi

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n} = \frac{(a_n + b_n)^2}{a_n + b_n} - \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = a_n + b_n - b_n \frac{2a_n}{a_n + b_n} = a_n + b_n \frac{b_n - a_n}{a_n + b_n}.$$

Ker je $a_n > b_n$, je člen $b_n \frac{b_n - a_n}{a_n + b_n}$ negativen, od koder sledi $a_{n+1} < a_n$.

Zaporedje (b_n) je naraščajoče:

Z uporabo neenakosti $a_n > b_n$ dobimo

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + b_n\right) > \frac{1}{2}(b_n + b_n) = b_n.$$

(b) Iz že dokazanega sledi, da je zaporedje (a_n) padajoče in navzdol omejeno (vsak člen zaporedja (b_n) je namreč spodnja meja). Vemo, da je takšno zaporedje konvergentno. Analogno lahko sklepamo, da je zaporedje (b_n) naraščajoče in navzgor omejeno, torej je konvergentno. Označimo $a = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$ in $b = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$. Potem iz danih rekurzivnih zvez $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n}$ in $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} a &= \frac{a^2 + b^2}{a + b}, \\ b &= \frac{1}{2}(a + b), \end{aligned}$$

ki ima rešitev $a = b$. □

(5) Izračunaj limito zaporedja s splošnim členom

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}.$$

Rešitev: Limito zaporedja (a_n) bomo izračunali z uporabo izreka o sendviču, ki pravi naslednje. Če sta zaporedji (b_n) in (c_n) konvergentni in imata enaki limiti ter velja še $b_n \leq a_n \leq c_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ od nekod dalje, je tudi zaporedje (a_n) konvergentno in velja

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(c_n).$$

Želimo najti zaporedji (b_n) in (c_n), ki imata isto limito in omejujeta zaporedje (a_n). Vsak člen v vsoti

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

je manjši od $\frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}$. Torej je $a_n \leq 1$ za vsak n. Po drugi strani pa je vsak člen v zgornji vsoti večji od $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, kar pomeni, da je $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n$.

Sedaj definirajmo

$$b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}},$$
$$c_n = 1.$$

Potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $b_n \leq a_n \leq c_n$ in $\lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(c_n) = 1$. Z uporabo izreka o sendviču sledi

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = 1.$$

□

(6) Naj bo (a_n) zaporedje s pozitivnimi členi. Potem velja: Če je konvergentno zaporedje $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, je konvergentno tudi zaporedje $c_n = \sqrt[n]{a_n}$ in je $\lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(c_n)$.

Izračunaj limite zaporedij z danimi splošnimi členi:

(a) $a_n = \sqrt[n]{n}$,

(b) $a_n = \sqrt[n]{n^2+1}$,

(c) $a_n = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Rešitev: Najprej dokažimo trditev iz naloge. Predpostavimo, da je zaporedje $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ konvergentno in označimo $q = \lim_{n\to\infty}(b_n)$. Izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Radi bi našli naravno število N, da bo za vse $n \geq N$ veljalo

$$q - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} < q + \epsilon.$$

Ker je zaporedje (b_n) konvergentno, lahko najdemo tak N', da za vse $n \geq N'$ velja

$$q - \frac{\epsilon}{2} < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \frac{\epsilon}{2}$$

oziroma

$$a_n\left(q - \frac{\epsilon}{2}\right) < a_{n+1} < a_n\left(q + \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Izberimo za n po vrsti N' in $N'+1$

$$a_{N'}\left(q - \frac{\epsilon}{2}\right) < a_{N'+1} < a_{N'}\left(q + \frac{\epsilon}{2}\right),$$

$$a_{N'+1}\left(q - \frac{\epsilon}{2}\right) < a_{N'+2} < a_{N'+1}\left(q + \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Če vstavimo $a_{N'+1}$ iz prve neenakosti v drugo neenakost, dobimo

$$a_{N'}\left(q - \frac{\epsilon}{2}\right)^2 < a_{N'+2} < a_{N'}\left(q + \frac{\epsilon}{2}\right)^2.$$

S pomočjo indukcije lahko izpeljemo tudi, da za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja

$$a_{N'}\left(q-\frac{\epsilon}{2}\right)^k < a_{N'+k} < a_{N'}\left(q+\frac{\epsilon}{2}\right)^k.$$

Označimo sedaj v zgornji neenakosti $n = N' + k$. Sledi

$$a_{N'}\left(q-\frac{\epsilon}{2}\right)^{n-N'} < a_n < a_{N'}\left(q+\frac{\epsilon}{2}\right)^{n-N'},$$

oziroma

$$\left(q-\frac{\epsilon}{2}\right)\sqrt[n]{\frac{a_{N'}}{(q-\frac{\epsilon}{2})^{N'}}} < \sqrt[n]{a_n} < \left(q+\frac{\epsilon}{2}\right)\sqrt[n]{\frac{a_{N'}}{(q+\frac{\epsilon}{2})^{N'}}}.$$

Števili $\frac{a_{N'}}{(q-\frac{\epsilon}{2})^{N'}}$ in $\frac{a_{N'}}{(q+\frac{\epsilon}{2})^{N'}}$ sta fiksni realni števili. Predpostavimo lahko, da sta obe pozitivni, saj je v nasprotnem primeru leva neenakost avtomatično izpolnjena. Sedaj bomo uporabili limito

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1,$$

ki velja za vsako pozitivno realno število a. Lahko jo izračunamo direktno po definiciji, ali pa upoštevamo, da je funkcija $f(x) = a^x$ zvezna v točki $x = 0$ in $a^0 = 1$. Sledi

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_{N'}}{(q-\frac{\epsilon}{2})^{N'}}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_{N'}}{(q+\frac{\epsilon}{2})^{N'}}} = 1,$$

zato obstaja N, da je za $n \geq N$

$$q-\epsilon < \left(q-\frac{\epsilon}{2}\right)\sqrt[n]{\frac{a_{N'}}{(q-\frac{\epsilon}{2})^{N'}}} < \sqrt[n]{a_n} < \left(q+\frac{\epsilon}{2}\right)\sqrt[n]{\frac{a_{N'}}{(q+\frac{\epsilon}{2})^{N'}}} < q+\epsilon.$$

Trditev je tako dokazana.

S pomočjo te trditve lahko izračunamo nekatere limite, kjer nastopajo n-ti koreni.

(a) Poglejmo si najprej limito $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$. Izberimo $a_n = n$ in naj bo $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ter $c_n = \sqrt[n]{a_n}$. Potem je $b_n = \frac{n+1}{n}$ in $c_n = \sqrt[n]{n}$. Iz $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$ sledi

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$$

(b) Izberimo sedaj $a_n = n^2 + 1$. Potem je $b_n = \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}$ in $c_n = \sqrt[n]{n^2+1}$. Iz limite $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} = 1$ sledi

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+1} = 1.$$

(c) Izberimo $a_n = \frac{n^n}{n!}$. Potem velja

$$\lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot n^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Po trditvi iz naloge sledi, da tudi zaporedje (c_n) konvergira k e. Ker pa je $c_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$, je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Opomba 1: Na podoben način lahko izračunamo tudi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1,$$

kjer je k poljubno naravno število in p poljuben polinom s pozitivnimi koeficienti.

Opomba 2: Implikacija iz trditve ne velja v obratni smeri.

Če vzamemo $a_n = \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$, $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ in $c_n = \sqrt[n]{a_n}$, za vsak n velja

$$\frac{1}{2^n} \leq a_n \leq \frac{2}{2^n}$$

in zato tudi

$$\frac{1}{2} \leq c_n \leq \frac{\sqrt[n]{2}}{2}.$$

Z uporabo izreka o sendviču od tod dobimo

$$\lim_{n\to\infty} (c_n) = \frac{1}{2}.$$

Po drugi strani pa velja $b_{2k} = \frac{1}{4}$ in $b_{2k+1} = 1$, zato zaporedje (b_n) ni konvergentno.

Opomba 3: Podobna zaporedja bomo srečali pri uporabi kvocientnega in pa korenskega kriterija za konvergenco vrst. Ta trditev pove, da nam da korenski kriterij isto limito kot kvocientni kriterij. $\square$